

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	7
--------------------	---

PRIMERA PARTE. VECTORES

I. ALGEBRA VECTORIAL

1. Vectores: sus clases	13
1. Magnitudes escalares y vectoriales; 2. Vectores; 3. Igualdad de vectores; 4. Vectores deslizantes y vectores fijos.	
Ejercicios	17
2. Componentes y cosenos directores de un vector	17
1. Componentes de un vector; 2. Cosenos directores de un vector; 3. Vectores paralelos; 4. Ángulo de dos vectores.	
Ejercicios	22
3. Adición y sustracción de vectores	23
1. Adición de vectores; 2. Sustracción de vectores; 3. Suma algebraica de varios vectores; 4. Producto de un vector por un escalar; 5. Versores fundamentales; 6. Descomposición canónica de un vector; 7. Descomposición de un vector por sus componentes según tres direcciones dadas; 8. Baricentro de un sistema de masas; 9. Coordenadas baricéntricas.	
Ejercicios	30
4. Producto escalar y producto vectorial	32
1. Producto escalar; 2. Las dos orientaciones del espacio; 3. Vectores axiales o pseudovectores; 4. Producto vectorial; 5. Componentes del producto vectorial; 6. Producto escalar y vectorial de pseudovectores.	
Ejercicios	41
5. Producto mixto y otros productos vectoriales	42
1. Producto mixto de tres vectores; 2. Pseudoescalares; 3. Doble producto vectorial; 4. Otros productos vectoriales; 5. Álgebra vectorial en el plano.	
Ejercicios	46

VECTORES Y TENSORES

6. Notas y complementos del capítulo I 47
 1. Definición axiomática de vector. Espacios vectoriales; 2. Diversas notaciones para el producto escalar y vectorial.

II. APLICACIONES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL

7. Las fórmulas fundamentales de la trigonometría 50
 1. Trigonometría plana; 2. Trigonometría esférica.
 Ejercicios 53

8. Aplicaciones a la geometría analítica 53
 1. Puntos y vectores; 2. Ecuación vectorial de la recta; 3. Ecuación vectorial del plano; 4. Distancia de un punto a un plano; 5. Distancia de un punto a una recta; 6. Mínima distancia entre dos rectas; 7. Propiedades angulares entre rectas y planos; 8. Volumen del tetraedro; 9. Geometría analítica del plano; 10. Teorema de Menelao.
 Ejercicios 66

9. Notas y complementos del capítulo II 68
 1. Teorema de Ptolomeo; 2. Área del cuadrilátero; 3. Teorema de Carnot; 4. Circunferencia de los nueve puntos; 5. Cónica por cinco puntos; 6. Una propiedad del ortotetraedro; 7. Teorema de Pohlke; 8. Vectores deslizantes, Fuerzas; 9. Aplicaciones a la navegación aérea.

III. LOS VECTORES Y LOS CAMBIOS DE COORDENADAS

10. Cambios de coordenadas cartesianas ortogonales 73
 1. El problema fundamental; 2. Cambio de versores fundamentales; 3. Cambios de coordenadas.
 Ejercicios 78

11. Definición analítica de vector 78
 1. Transformación de las componentes de un vector por cambios de coordenadas ortogonales; 2. Definición analítica de vector; 3. Cambios de coordenadas en el plano; 4. Escalares y pseudoescalares.
 Ejercicios 85

12. Notas y complementos del capítulo III 85
 1. Forma explícita de las transformaciones ortogonales; 2. Angulos de Euler; 3. Cuaterniones.

IV. ANÁLISIS VECTORIAL. OPERADORES VECTORIALES

13. Campos escalares. Gradiente 89
 1. Campos escalares; 2. El gradiente de una función de punto; 3. Propiedades geométricas del gradiente; 4. Superficies de nivel y líneas de gradiente; 5. Derivadas direccionales; 6. Derivada total y derivada parcial de un escalar o un vector respecto del tiempo.
 Ejercicios 95

14. Campos vectoriales. Divergencia de un vector 96
 1. Campos vectoriales; 2. Divergencia de un vector; 3. Interpretaciones físicas de la divergencia.
 Ejercicios 103

15. El rotor 103
 1. El rotor; 2. Líneas de rotor o torbellino; 3. Significado físico del rotor. Ejemplos; 4. Velocidad angular. Otra interpretación del rotor.
 Ejercicios 110

16. El laplaciano. Fórmulas vectoriales 111
 1. El operador "nabla"; 2. El laplaciano; 3. Laplaciano de un vector. 4. Fórmulas vectoriales; 5. Líneas de campo normales a superficies.
 Ejercicios 116

17. Los operadores vectoriales en coordenadas curvilíneas 117
 1. Coordenadas polares en el plano y en el espacio; 2. Coordenadas curvilíneas en general; 3. Coordenadas curvilíneas ortogonales; 4. Las componentes de un vector en coordenadas curvilíneas ortogonales; 5. El gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales; 6. La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales; 7. El laplaciano en coordenadas curvilíneas ortogonales; 8. El rotor en coordenadas curvilíneas ortogonales; 9. El laplaciano de un vector en coordenadas curvilíneas ortogonales.
 Ejercicios 128

18. Notas y complementos del capítulo IV 128
 1. Coordenadas elipsoidales; 2. Coordenadas cilíndrico-parabólicas; 3. Coordenadas parabólicas; 4. Coordenadas esféricas; 5. Coordenadas toroidales.

V. FÓRMULAS INTEGRALES

19. Derivación de vectores. Curvas. Integrales curvilíneas 133
 1. Vectores función de un parámetro; 2. Vector función de varios parámetros; 3. Curvas. Tangente. Elemento de arco; 4. Integrales curvilíneas; 5. Circulación.
 Ejercicios 142

20. Superficies. Integrales de superficie 143
 1. Superficies. Versor normal; 2. Elemento de arco sobre una superficie; 3. Integrales dobles y triples. Formas diferenciales exteriores; 4. Elemento de área sobre una superficie; 5. Integral de superficie; 6. Flujo.
 Ejercicios 153

21. Teorema de la divergencia. Fórmulas de Green 156
 1. Teorema de la divergencia. Fórmula integral de Gauss-Ostrogradski; 2. El teorema de la divergencia para el plano; 3. Consecuencias del teorema de la divergencia; 4. Casos particulares de la fórmula de Gauss; 5. Fórmulas de Green; 6. La ecuación de Laplace. Funciones armónicas. Tercera fórmula de Green; 7. Aplicaciones de las fórmulas de Green.
 Ejercicios 165

22. Teorema del rotor 166
 1. Teorema del rotor. Fórmula de Stokes; 2. Casos particulares de la fórmula de Stokes; 3. Líneas y tubos de torbellino; 4. Superficies orientables y no orientables; 5. Diferenciación exterior de formas diferenciales.
 Ejercicios 174

23. Campos de gradientes y de rotores 175
 1. Definiciones; 2. Campos de gradientes; 3. Campos de rotores; 4. Descomposición de un campo vectorial en suma de uno irrotacional y otro solenoidal; 5. Observaciones sobre la unicidad; 6. Campo engendrado por un hilo de torbellino; 7. Caso de una curva cerrada; 8. Ángulo sólido; 9. Integral de Gauss.

Ejercicios 190

24. Notas y complementos del capítulo V 190
 1. Nota histórica; 2. Campos vectoriales en el plano: característica de una curva e índice de un punto; 3. Campos vectoriales tangentes a una superficie; 4. Teoremas sobre puntos fijos; 5. Sobre campos solenoidales.

VI. APLICACIONES DEL ANÁLISIS VECTORIAL

25. Aplicaciones a la teoría de curvas 197
 1. Triedro de Frenet; 2. Fórmulas de Frenet; 3. Cálculo de la curvatura y de la torsión; 4. Definición geométrica de la curvatura y de la torsión; 5. Esfera osculatriz; 6. Curvas esféricas; 7. Superficies regladas; 8. Superficies desarrollables.

Ejercicios 208

26. Aplicaciones al electromagnetismo 209
 1. Las ecuaciones de Maxwell; 2. Potencial escalar y potencial vector del campo electromagnético; 3. Energía del campo electromagnético. Vector de Poynting; 4. Ondas electromagnéticas.

Ejercicios 215

27. Aplicaciones a la mecánica de fluidos 216
 1. La ecuación de continuidad y la ecuación de Euler; 2. Otras formas e integrales de la ecuación de Euler; 3. Torbellinos.

Ejercicios 222

28. Notas y complementos del capítulo VI 223
 1. Funciones de Bessel y de Legendre; 2. Movimiento relativo.

SEGUNDA PARTE. TENSORES

VII. TRANSFORMACIONES LINEALES. MATRICES

29. El espacio afín de n dimensiones 231
 1. Espacios n -dimensionales; 2. El espacio afín n -dimensional; 3. El espacio euclidiano n -dimensional.

Ejercicios 234

30. Transformaciones lineales. Matrices 235
 1. Transformaciones lineales; 2. Producto de transformaciones lineales; 3. Adición, sustracción y producto por un escalar; 4. Matriz traspuesta de otra.

Ejercicios 238

31. Matrices cuadradas 239
 1. Matrices cuadradas. Transformaciones inversas; 2. Algunas propiedades de las matrices; 3. Matrices simétricas y antisimétricas; 4. Potencia de una matriz; 5. Grupos lineales general y especial.

Ejercicios 243

32. Transformaciones y matrices ortogonales 244
 1. Transformaciones y matrices ortogonales; 2. Propiedades de los elementos de una matriz ortogonal; 3. Matrices ortogonales de segundo orden.

Ejercicios 247

33. Notas y complementos del capítulo VII 247
 1. Representación de Cayley para las matrices ortogonales.

VIII. TENSORES CARTESIANOS

34. Tensores cartesianos 249
 1. El convenio de supresión del símbolo de suma; 2. Tensores cartesianos del espacio ordinario; 3. Paso a n dimensiones; 4. Invariantes. Producto escalar de vectores.

Ejercicios 254

35. Operaciones con tensores cartesianos 255
 1. Adición, sustracción y producto de tensores; 2. Contracción de índices; 3. Permutación de índices; 4. Tensores simétricos y antisimétricos; 5. Derivación de tensores; 6. Criterio para reconocer el carácter tensorial.

Ejercicios 260

36. Tensores de segundo orden 260
 1. El tensor de Kronecker; 2. Tensores deducidos de un tensor de segundo orden; 3. Reducción de un tensor simétrico a la forma diagonal.

Ejercicios 268

37. Pseudotensores o densidades tensoriales 268
 1. Pseudotensores o densidades tensoriales; 2. El pseudotensor o densidad tensorial de Levi-Civita; 3. Propiedades de las densidades tensoriales. Dualidad.

Ejercicios 271

38. Tensores cartesianos isotrópicos. Unicidad de los operadores vectoriales elementales 272
 1. Tensores cartesianos isotrópicos; 2. Unicidad de los operadores vectoriales elementales.

Ejercicios 276

39. Notas y complementos del capítulo VIII 277
 1. Tensor isotrópico de cuarto orden; 2. Invariantes de un tensor de segundo orden en el espacio de tres dimensiones.

IX. APLICACIONES DE LOS TENSORES CARTESIANOS

40. Ejemplos de tensores cartesianos. Aplicaciones a la elasticidad 278
 1. El tensor de inercia; 2. Tensor de deformación; 3. Tensor de tensiones; 4. Tensor elástico.

41. El espacio-tiempo. La relatividad especial 284
 1. El espacio de cuatro dimensiones; 2. El espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski; 3. Las fórmulas de Lorentz: aplicaciones.

42. Ecuaciones relativistas de la física 290
 1. Ecuaciones relativistas de la física; 2. Campo escalar; 3. Campo vectorial; 4. Ecuaciones de Maxwell; 5. Campo determinado por un tensor de segundo orden simétrico.

43. Notas y complementos del capítulo IX 295
 1. Transformaciones que dejan invariante una forma cuadrática; 2. La fórmula de Gauss en el espacio-tiempo.

X. TENSORES EN GENERAL

44. Tensores en general. Álgebra tensorial 298
 1. Coordenadas curvilíneas; 2. Vectores contravariantes y covariantes; 3. Tensores en general; 4. Ejemplos de tensores; 5. Operaciones con tensores; 6. Contracción de índices; 7. Invariantes; 8. Criterio para reconocer el carácter tensorial; 9. Pseudotensores o densidades tensoriales; 10. Tensores y pseudotensores obtenidos por derivación ordinaria.

Ejercicios 307

45. Derivación covariante 308
 1. Derivación covariante de vectores; 2. Derivación covariante de tensores; 3. Derivación covariante de densidades tensoriales.

Ejercicios 314

46. Espacios de conexión afín 315
 1. Espacios de conexión afín; 2. Paralelismo de vectores; 3. Propiedades del tensor de curvatura; 4. Espacios de conexión afín simétrica; 5. Las identidades de Bianchi.

Ejercicios 320

47. Espacios de Riemann 321
 1. Espacios de Riemann; 2. El tensor fundamental; 3. Ascenso y descenso de índices. Componentes covariantes y contravariantes de un vector; 4. Producto escalar de vectores. Sistemas coordinados ortogonales; 5. Los símbolos de Christoffel. La conexión de Levi-Civita; 6. Relaciones entre los símbolos de Christoffel.

Ejercicios 327

48. Curvas geodésicas. Tensor de curvatura 328
 1. Curvas extremales; 2. Líneas geodésicas; 3. Operadores diferenciales; 4. Componentes físicas de un vector; 5. El tensor de curvatura en espacios de Riemann; 6. Tensores deducidos del de curvatura por contracción; 7. Laplaciano de un vector.

Ejercicios 336

49. Idea de la teoría de la relatividad general 336
 1. La relatividad general; 2. La solución de Schwarzschild; 3. Geodésicas del espacio de Schwarzschild.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS 343

BIBLIOGRAFÍA 365

ÍNDICE ALFABÉTICO 369