

INDICE GENERAL

	PÁG.
<i>Presentación</i>	XVII
<i>Nota a la segunda edición</i>	XIX
<i>Plan de la obra</i>	XX
1. Finalidad y estructura. 2. Contenido. 3. Bibliografía general.	

CAPÍTULO I

FUNDAMENTACIÓN DEL NÚMERO RACIONAL

§ 1.	Introducción lógica	1
	1. Unidad y conjunto. 2. Lógica deductiva. 3. Métodos de demostración. 4. Conceptuación matemática. 5. Igualdad. Relaciones de equivalencia. 6. Definiciones por abstracción. 7. Axiomática. 8. Estructura de la Matemática. Ejercicios.	
§ 2.	El número natural	13
	1. Diversas fundamentaciones del número natural. 2. Introducción completa. Axiomas de PEANO. 3. Definiciones por recurrencia. 4. Operaciones fundamentales. 5. Definición de mayor y menor. Leyes de la desigualdad. 6. Leyes formales: principio de permanencia. 7. Concepto de orden. 8. Correspondencia. 9. Conjuntos finitos. 10. Número cardinal. 11. Conjuntos numerables. Ejercicios.	
§ 3.	El número entero	30
	1. Definición de número entero. 2. Enteros positivos y negativos. 3. Suma, producto y desigualdad. 4. Ley uniforme y leyes formales. 5. Isomorfismo entre los números naturales y los enteros positivos. 6. La sustracción. Operaciones enteras. 7. Módulos de las operaciones fundamentales. 8. Productos de valor nulo. 9. Regla de los signos y de la desigualdad. 10. Representación gráfica. 11. La facultad de abstracción. Ejercicios.	
§ 4.	Símbolos numéricos y operatorios. Polinomios ...	39
	1. Símbolos numéricos. 2. Monomios. 3. Símbolo II. 4. Símbolo Σ . 5. Producto de potencias de igual base. 6. Supresión de paréntesis. 7. Polinomios. 8. Producto de dos sumas. 9. Producto de varias sumas. 10. Casos notables. 11. Valor numérico de un polinomio. Ejercicios.	

	PÁG
§ 5. Divisibilidad numérica	46
1. División entera. 2. Divisibilidad y orden parcial. 3. La divisibilidad respecto a la adición y a la sustracción. 4. La divisibilidad respecto a la multiplicación. 5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números. 6. El algoritmo de EUCLIDES. 7. Divisores y múltiplos comunes de varios números. 8. Descomposición en factores primos: teorema fundamental. 9. Aplicaciones del teorema fundamental. 10. Obtención de todos los divisores de un número. 11. Congruencias y clases residuales. 12. Operaciones con clases residuales. Grupos, anillos, cuerpos. Ejercicios.	
§ 6. El número racional	65
1. Definición de número racional. 2. Suma y producto de números racionales: leyes formales. 3. Isomorfismo con los enteros. 4. La división en el campo racional. Operaciones racionales. b. La desigualdad en el campo de los números racionales. 6. Representación gráfica de los números racionales. 7. Potencias de exponente entero. 8. Series de fracciones iguales y desiguales. 9. Medias aritméticas, geométricas y armónicas. Ejercicios.	
Notas al Capítulo I	77
I. El álgebra de BOOLE. II. El algoritmo de la numeración. III. Complementos sobre divisibilidad numérica. IV. Bibliografía.	

CAPÍTULO II

EL NÚMERO REAL Y EL NÚMERO COMPLEJO

§ 7. Concepto de número real	93
1. Segmentos inconmensurables y resolución aproximada de ecuaciones. 2. Sucesiones. 3. Aproximaciones decimales y su generalización. 4. Definición de número real por sucesiones de intervalos encajados. 5. Operaciones fundamentales y desigualdad entre números reales. 6. Clases contiguas y cortaduras de DEDEKIND. 7. Conjuntos lineales: intervalos. Ejercicios.	
§ 8. Potencias y logaritmos de los números reales ...	111
1. Raíz aritmética. 2. Cálculo de radicales. 3. Racionalización de denominadores. 4. Potencias de exponente racional. 5. Variación y representación gráfica de las potencias de exponente racional. 6. Potencias de exponente real: su variación. 7. Logaritmos de los números reales positivos: su variación. 8. Cálculo logarítmico. Ejercicios.	
§ 9. Concepto de número complejo	126
1. Origen aritmético de los números complejos. 2. Definición de número complejo. Operaciones fundamentales.	

3. Representación geométrica. 4. Módulo y argumento de un número complejo. 5. Las operaciones racionales en el campo complejo. Ejercicios.

§ 10. **Potencias y raíces en el campo complejo** 137

1. Potencias de exponente entero. 2. Raíces de los números complejos: representación gráfica. 3. Raíz cuadrada en forma binómica. 4. Raíces de los números reales. 5. Raíces primitivas de la unidad. Ejercicios.

Notas al Capítulo II 144

I. Plenitud y unicidad del sistema de los números reales. II. El infinito matemático. III. Sistemas hipercomplejos. IV. Bibliografía.

CAPÍTULO III

COMBINATORIA. ALGEBRA LINEAL

§ 11. **Análisis combinatorio** 153

1. Variaciones. 2. Permutaciones. 3. Combinaciones. 4. Números combinatorios. 5. Sustituciones. 6. Sustituciones circulares: descomposición en ciclos. Ejercicios.

§ 12. **Potencias de binomios y polinomios** 166

1. Potencia de un binomio. 2. Potencia de un polinomio. Ejercicios.

§ 13. **Determinantes** 170

1. Origen de la teoría de los determinantes. 2. Determinantes de segundo y tercer orden. 3. Determinantes de orden cualquiera: sus propiedades. 4. Desarrollo de un determinante. 5. Menores complementarios. Regla de LAPLACE. 6. Producto de determinantes. 7. Determinantes especiales. Ejercicios.

§ 14. **Cálculo de matrices** 191

1. Definiciones. 2. Dependencia lineal de filas y columnas. 3. Característica de una matriz; su cálculo. Ejercicios.

§ 15. **Sistemas de ecuaciones lineales** 195

1. Expresiones algebraicas: su valor numérico. 2. PlanTEAMIENTO y transformación de ecuaciones. 3. Teorema fundamental de equivalencia en los sistemas de ecuaciones lineales: método de reducción. 4. Regla de CRAMER. 5. Sistema general de ecuaciones lineales. 6. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas. 7. Sustituciones lineales. Ejercicios.

Notas al Capítulo III 214

I. Grupos de sustituciones entre permutaciones. II. Bibliografía.

CAPÍTULO IV

ALGORITMO ALGEBRAICO

§ 16.	Principio de identidad. Operaciones racionales con polinomios	221
	1. Principio de identidad de los polinomios de una variable. 2. Principio de identidad de polinomios de varias variables. 3. Operaciones enteras con polinomios. 4. División entera de dos polinomios de una variable. 5. División de un polinomio por $x - \alpha$. 6. División entera de dos polinomios de varias variables. 7. Método de los coeficientes indeterminados. Ejercicios.	
§ 17.	Divisibilidad algebraica	231
	1. Concepto de irreducibilidad en un campo racional. 2. Teoremas fundamentales de la divisibilidad algebraica entre polinomios de una o más variables. 3. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de los polinomios de una variable. 4. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de los polinomios de varias variables. 5. Descomposición en factores primos de un polinomio de una o más variables: teorema fundamental. Ejercicios.	
§ 18.	Ceros de dos polinomios de una variable	245
	1. Teorema fundamental del álgebra. 2. Descomposición factorial. Relaciones entre las raíces y los coeficientes. Ejercicios.	
§ 19.	Resolución elemental de ecuaciones por radicales .	250
	1. Ecuación de segundo grado. 2. Ecuaciones reducibles a cuadráticas. 3. Ecuación cúbica. 4. Ecuación cuártica. Ejercicios.	
	<i>Notas al Capítulo IV</i>	265
	I. Números algebraicos y trascendentes. II. Problemas clásicos del álgebra. III. Bibliografía.	

CAPÍTULO V

EL LÍMITE ARITMÉTICO

§ 20.	Sucesiones de números reales	273
	1. Límites finitos e infinitos. 2. Propiedades de los límites finitos. 3. Sucesiones contenidas en otra. 4. Sucesiones monótonas de números reales. 5. Límites de oscilación de una sucesión. 6. Criterio general de convergencia. Sucesiones regulares. Ejercicios.	
§ 21.	Cálculo de límites	282
	1. Límites de las operaciones racionales. 2. Límite de los logaritmos y potencias. 3. Límites de potencias en los	

	PÁG.
casos singulares. 4. Límites indeterminados. 5. El número e . 6. Sucesiones de números complejos. Ejercicios.	
§ 22. Series numéricas	295
1. Propiedades generales de las series. 2. Series de términos positivos: criterios de convergencia. 3. Series alternadas. 4. Series de términos positivos y negativos. 5. Series de términos complejos. 6. Operaciones con series. Ejercicios.	
<i>Notas al Capítulo V</i>	330
I. Algoritmos generales de convergencia y sumación. II. Aritmética decimal de los números aproximados. III. Fracciones continuas. IV. Bibliografía.	
CAPÍTULO VI	
LAS FUNCIONES REALES Y LA CONTINUIDAD	
§ 23. La noción de función	353
1. Variables y constantes. 2. Noción de función. 3. Campo de existencia. Funciones uniformes y multiformes. Definición general de función. 4. Característica de una función. Funciones de varias variables. 5. Breve reseña histórica. 6. Expresión algorítmica de funciones. 7. Funciones racionales y funciones enteras. 8. Funciones algebraicas y curvas algebraicas. Funciones trascendentes. 9. Funciones pares e impares. 10. Función potencial. 11. Funciones crecientes o decrecientes. 12. Funciones inversas. 13. Función de función. 14. Cotas y extremos de variables o conjuntos reales. Ejercicios.	
§ 24. El límite funcional	372
1. El límite de una función. 2. Propiedades de los límites. 3. Infinitésimos. 4. Cálculo de límites. 5. Límite infinito y límite para $x \rightarrow \infty$. 6. Forma topológica de la definición de límite. 7. Criterio de convergencia de BOLZANO-CAUCHY. 8. Límites de oscilación. 9. Límite aritmético y límite funcional. Ejercicios.	
§ 25. Noción de continuidad. Discontinuidades	387
1. Continuidad. 2. Diversas clases de discontinuidades. 3. Discontinuidades evitables. Verdadero valor. 4. Límites laterales y discontinuidades de primera especie. 5. Continuidad lateral y continuidad en un intervalo. 6. Discontinuidades de segunda especie. 7. Operaciones con las funciones continuas. Ejercicios.	
§ 26. Propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado	396
1. Conservación de signo en el entorno de un punto. 2. Ceros de las funciones continuas. 3. Resolución de	

ecuaciones. 4. La propiedad D de las funciones continuas. 5. Máximos y mínimos de funciones continuas. 6. Continuidad uniforme. Teorema de HEINE-CANTOR. Ejercicios.

Notas al Capítulo VI 401

I. Nota histórica sobre la continuidad. II. Conjuntos lineales. III. El lema de BOREL y sus aplicaciones. IV. Discontinuidades puntuales y totales. V. Funciones semicontinuas. VI. Bibliografía.

CAPÍTULO VII

LAS FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES

§ 27. **Funciones exponencial, logarítmica y potencial** .. 411

1. Función exponencial. 2. La continuidad en las funciones monótonas. 3. Función logarítmica. 4. Función potencial. Ejercicios.

§ 28. **Funciones circulares** 414

1. Funciones circulares. 2. El límite de $(\sin x)/x$ para $x \rightarrow 0$. 3. Periodicidad. 4. Función sinusoidal. 5. Funciones circulares inversas. 6. Continuidad de las funciones circulares. Ejercicios.

§ 29. **Funciones hiperbólicas** 425

1. Funciones hiperbólicas. 2. Representación paramétrica. Ejercicios.

Notas al Capítulo VII 428

I. Curvas de PEANO. II. Tablas de funciones.

CAPÍTULO VIII

FUNCIONES DERIVABLES

§ 30. **Concepto de derivada** 433

1. Incrementos y razón incremental. 2. Noción de derivada. 3. Cálculo directo de algunas derivadas. 4. Interpretación geométrica de la derivada. 5. Derivadas laterales. Derivada infinita. 6. La función derivada. 7. Ángulo de dos curvas. 8. Continuidad de las funciones derivables. Ejercicios.

§ 31. **Las primeras aplicaciones de la derivada** 442

1. Ecuación de la tangente a una curva plana uniforme. 2. Ecuación de la normal. 3. Segmentos determinados por la tangente y la normal. 4. Movimiento rectilíneo. Velocidad. Ejercicios.

	PÁG.
§ 32. Cálculo de la derivada	446
1. Linealidad de la derivación. 2. Derivada del logaritmo. 3. Derivada de una función de función. 4. El método de la derivada logarítmica. Reglas del producto y del cociente. 5. Derivación de determinantes. 6. Derivadas de las funciones potencial y exponencial. 7. Derivadas de las funciones circulares. 8. Derivada de la función inversa. 9. Aplicación a las funciones circulares inversas. 10. Derivadas de las funciones hiperbólicas directas e inversas. 11. Tabla de derivadas. Ejercicios.	
§ 33. Variación de las funciones	457
1. Criterios de crecimiento y decrecimiento. 2. Máximos y mínimos relativos. 3. Condición necesaria de máximo o de mínimo. 4. Determinación de máximos y mínimos. 5. Criterio 1º: Variación de la función. 6. Criterio 2º: Variación de la derivada primera. 7. Criterio 3º: Mediante la derivada segunda. 8. Simplificaciones en el cálculo de máximos y mínimos. 9. Concavidad. Puntos de inflexión. 10. Estudio de la variación. Ejercicios.	
§ 34. La diferencial	469
1. Definición de diferencial y expresión analítica. 2. Representación geométrica. 3. Relación con el incremento. 4. Reglas de diferenciación. 5. Diferencial de una función de función. 6. Tangente y normal a una curva plana dada en forma paramétrica. 7. Tangentes a las curvas planas en coordenadas polares. Ejercicios.	
Notas al Capítulo VIII	474
I. Orígenes del Cálculo diferencial.	

CAPÍTULO IX

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO Y
CONSECUENCIAS

§ 35. Teoremas del valor medio	477
1. El teorema del incremento finito y su significado geométrico. 2. Demostración del teorema de LAGRANGE. 3. Consecuencia. Teorema fundamental del Cálculo integral. 4. Acotación del error en una función. 5. Interpolación lineal. Acotación del error. 6. Cálculo aproximado de logaritmos. 7. Derivación gráfica. 8. Teorema de CAUCHY. Ejercicios.	
§ 36. Límites indeterminados	483
1. Forma 0/0. Regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL. 2. Aplicación reiterada. 3. Generalizaciones. Límite para $x \rightarrow \infty$, y forma ∞/∞ . 4. Formas $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$. 5. Formas exponenciales ∞^0 , 0^0 , 1^∞ . 6. Sustitución de variables equivalentes. Ejercicios.	

	<u>Pág.</u>
§ 37. Infinitésimos e infinitos. Asíntotas	492
1. Cálculo con infinitos. 2. Comparación de infinitos. 3. Órdenes fundamentales de infinitud. 4. Órdenes infinitesimales fundamentales. 5. Escalas de infinitésimos e infinitos. 6. Asíntotas y direcciones asíntóticas de las curvas planas. Ejercicios.	

<i>Notas al Capítulo IX</i>	499
I. Cálculo logarítmico. II. Relación de PEANO. III. Criterio de STOLZ. IV. Propiedades de la función derivada. V. Números derivados y funciones derivadas. VI. El teorema fundamental del Cálculo integral. VII. Funciones continuas sin derivada. VIII. Bibliografía.	

CAPÍTULO X

FÓRMULA DE TAYLOR. ECUACIONES ALGEBRAICAS

§ 38. Derivadas sucesivas y aplicaciones	515
1. Derivadas sucesivas. 2. Diferenciales sucesivas. 3. Aceleración en un movimiento rectilíneo. 4. Derivada n -ésima de un producto. 5. La función de CAUCHY. 6. Ceros reales de las funciones continuas. 7. Cambios de signo de $f(x)$ y de $f'(x)$. 8. Órdenes de contacto de dos curvas. Ejercicios.	

§ 39. Fórmula de Taylor	525
1. Introducción: expresión de un polinomio por sus derivadas en un punto. 2. Fórmula de TAYLOR. 3. Diversas formas del término complementario. 4. Diversas expresiones de la fórmula de TAYLOR. 5. Desarrollos de las funciones elementales. 6. Aplicación al cálculo de límites indeterminados. Ejercicios.	

§ 40. Aproximación lineal y cuadrática	532
1. Aproximación lineal. 2. Discusión general de la concavidad e inflexiones. 3. Discusión general de los máximos y mínimos relativos. 4. Resolución aproximada de ecuaciones. 5. Parábola osculatrix. 6. Circunferencia osculatrix. Ejercicios.	

§ 41. Resolución numérica general de ecuaciones algebraicas	541
1. Función general de variable compleja. 2. Raíces múltiples. Función algebraica de varias variables. 3. Función racional de coeficientes reales: exceso algebraico. 4. Separación de raíces reales. Teorema de STURM. 5. Teorema de BUDAN-FOURIER. 6. Teorema de HARRIOT-DESCARTES. 7. Teorema de ROLLE. 8. Acotación de las raíces. 9. Investigación de las raíces racionales de una ecuación de coeficientes racionales. 10. Cálculo de las raíces irracionales de una ecuación de coeficientes reales. 11. Cálculo de las raíces complejas de una ecuación algebraica. 12. Introducción al método de GRÄFFE. Ejercicios.	

	PÁG.
§ 42. Eliminación algebraica	572
1. Eliminación: método del máximo común divisor. 2. Método de eliminación de EULER. 3. Método de eliminación de BÉZOUT. 4. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Teorema general de BÉZOUT. 5. Método de KRONECKER. Ejercicios.	

<i>Notas al Capítulo X</i>	587
I. Coeficientes diferenciales o derivadas generalizadas de PEANO. II. Derivadas sucesivas de una función de función. III. Funciones simétricas de las raíces: discriminante. IV. Resolución gráfica de ecuaciones: método de LILL. V. Bibliografía.	

CAPÍTULO XI

SERIES DE POTENCIAS

§ 43. Propiedades generales	601
1. Campo y radio de convergencia. 2. Operaciones con series de potencias. 3. Series de funciones. Convergencia uniforme. 4. Convergencia uniforme de series de potencias. 5. Derivadas y primitivas. Ejercicios.	

§ 44. Desarrollos en series de potencias	612
1. Definición y unicidad. 2. Desarrollo por la fórmula de MAC-LAURIN. 3. Función racional. Desarrollo por división. 4. Método de los coeficientes indeterminados. Ejercicios.	

§ 45. Aplicación a las trascendentes elementales	620
1. Función exponencial $y = e^x$. 2. Funciones circulares e hiperbólicas. 3. Las trascendentes elementales en el campo complejo. 4. Serie logarítmica. 5. Serie binómica. 6. Desarrollos de las funciones circulares inversas. Ejercicios.	

<i>Notas al Capítulo XI</i>	632
I. Teoremas tauberianos. II. El número π . III. Productos infinitos. IV. Bibliografía.	

CAPÍTULO XII

INTERPOLACIÓN Y DIFERENCIAS FINITAS

§ 46. Interpolación entre valores cualesquiera	641
1. Teorema de existencia. 2. Fórmula de LAGRANGE. 3. La interpolación parabólica progresiva. 4. Descomposición de una fracción algebraica en fracciones simples. Ejercicios.	

	PÁG.
§ 47. Interpolación entre valores equidistantes	650
1. Diferencias sucesivas de una función. 2. Operadores simbólicos. 3. Diferencias sucesivas de un polinomio. 4. Diferencias sucesivas de los factoriales. 5. Fórmula de NEWTON-GREGORY. 6. Término complementario y paso al límite. Ejercicios.	
<i>Notas al Capítulo XII</i>	656
I. Diferencias divididas. II. Empleo de diferencias centrales. III. Bibliografía.	

CAPÍTULO XIII

EL ÁREA Y LA INTEGRACIÓN

§ 48. Concepto de integral según Cauchy	663
1. Noción de área en el plano. 2. El área del trapecioide. 3. La integral definida. 4. Cálculo directo de algunas integrales. 5. Propiedades de la integral definida. 6. Teorema del valor medio. Ejercicios.	
§ 49. Integral de Riemann	674
1. La integral según RIEMANN. 2. Integrales inferior y superior. Ejercicios.	
§ 50. Integral y primitiva	677
1. La función integral y su derivada. 2. Regla de BARROW. 3. Sobre la aplicación de la regla de BARROW. 4. Integrales generalizadas. Ejercicios.	
<i>Notas al Capítulo XIII</i>	683
I. Orígenes de la noción de integral. II. La integral como límite según la norma. III. Condiciones de integrabilidad (R). IV. Derivada acotada no integrable (R). V. Bibliografía.	

CAPÍTULO XIV

CÁLCULO DE PRIMITIVAS Y APLICACIONES

§ 51. Métodos generales de integración	691
1. Primitivas inmediatas. 2. Integración por descomposición. 3. Integración por sustitución. 4. Integrales calculables por sustitución. 5. Integración por partes. Ejercicios.	
§ 52. Integración de clases particulares de funciones ..	704
1. Funciones racionales. 2. Irracionales algebraicas. 3. Funciones racionales de las funciones circulares. Ejercicios.	

	PÁG.
§ 53. Cálculo de algunas integrales definidas	716
1. Integrales calculables mediante primitivas. 2. Algunas integrales calculables por partes. 3. Fórmula de WALLIS. 4. Fórmula de STIRLING. 5. Integral de POISSON. Ejercicios.	
<i>Notas al Capítulo XIV</i>	722
I. Tablas de integrales.	

CAPÍTULO XV

APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS

§ 54. Áreas y volúmenes	723
1. Áreas en coordenadas cartesianas. 2. Áreas en coordenadas polares. 3. Volumen de un sólido de revolución. 4. Volumen por secciones. 5. Área de una superficie de revolución. Ejercicios.	
§ 55. Rectificación de curvas planas	732
1. Longitud de un arco. 2. Vector d.s. Cosenos directores de la tangente. 3. Rectificación de la elipse. Integrales elípticas. 4. Curvas planas en coordenadas polares. 5. Curvatura de curvas planas. 6. Curvatura en coordenadas polares. 7. Vértices de las curvas en general. 8. Evoluta. 9. Variación total y longitud. Ejercicios.	
§ 56. Aplicaciones físicas	747
1. Trabajo en un desplazamiento rectilíneo. 2. Trabajo de expansión de un gas. 3. Medias cuadráticas. Ejercicios.	
<i>Notas al Capítulo XV</i>	752
I. Convergencia según la norma. II. Principio de semi-continuidad inferior. III. Bibliografía.	

CAPÍTULO XVI

INTEGRACIÓN APROXIMADA

§ 57. Integración numérica	757
1. Objeto del capítulo. 2. Fórmula de los trapecios. 3. Método de SIMPSON. 4. Integración por desarrollo en serie. 5. Fórmula de integración de GAUSS. 6. Aplicación de los métodos de interpolación. Ejercicios.	
§ 58. Integración gráfica	767
1. Integración gráfica de funciones escalonadas. 2. Integración gráfica de funciones cualesquiera. Ejercicios.	

	PÁG.
§ 59. Integración mecánica	771
1. Intégrafo de ABDANK ABAKANOWITZ. 2. Planímetros de ruedecilla integradora. 3. Planímetro de PRYTZ. Ejercicios.	
<i>Notas al Capítulo XVI</i>	779
I. Método de P. MANSION. II. Fórmula sumatoria de EULER-MAC LAURIN. III. Polinomios de LEGENDRE. IV. Bibliografía.	
<i>Respuestas a ejercicios</i>	789
<i>Índice de símbolos y abreviaturas</i>	811
<i>Índice alfabético</i>	819