

Índice

1	Motivação	1
1	Introdução ao Cálculo Variacional	15
2	Introducao	17
2.1	o problema da Braquistócrona	17
2.2	Geodésicas em \mathbb{R}^d , $d \geq 3$	19
2.2.1	Geodésica sobre esferas	21
2.3	Problema de Controle de Direcao	24
2.4	Problemas Isoperimétricos	25
2.4.1	Problema da catenária	27
2.5	Mínima Superfície de Revolução	28
2	6 Comentários	30
3	Formalização do Cálculo Variacional	33
3.1	Diferencial Gâteaux de um Operador	33
3.2	Diferencial Gâteaux de um Funcional	36
3.3	Notação Variacional	45
3.4	Lemas de du Bois-Raymonde Lagrange	47
4	Equacoes de Euler	51
4.1	Extremos, Extremos locais	52
4.2	Equação de Euler	54
4.3	Casos Especiais da Equação de Euler	56
4.4	Segunda Forma da Equação de Euler	62
4.5	Gradiente de um funcional	63
4.6	Condições Subsidiárias. Multiplicadores de Lagrange	72
4.7	Condições subsidiárias finitas	76
4.8	Funcionais Dependendo de Várias Variáveis Independentes	79
4.9	Funcionais Dependendo de Derivadas de Ordem Superior a Primeira	83
4.10	Funcionais dependendo de várias funções	84

4 . 1 1	Condições Naturais de Contorno	8 7
4 . 1 2	Variacao Geral de um Funcional	9 1
4.13	Extremos com Pontos Angulosos. Condições de Weierstrass-Erdmann	1 0 0
4.14	Problema Inverso no Cálculo Variacional. Operadores Potenciais	1 0 8

II Os Métodos Diretos no Cálculo Variacional 113

5	Métodos Variacionais	115
5 . 1	Introdução	115
5.2	Método dos Resíduos Ponderados	116
5 . 2 . 1	Método de Colocação	118
5 . 2 . 2	Método de Galerkin	121
5.2.3	Condições de Contorno Não-homogêneas	139
5 . 3	Método de Ritz	143
5 . 3 . 1	Mínimo de um Funcional	143
5 . 3 . 2	Sequências Minimizantes	149
5 . 3 . 3	Método de Ritz	150
5.3.4	Condições de Contorno Homogêneas	160
5 . 4	Método de Mínimos Quadrados	168
5	5 Conclusões	171

III 0 Cálculo Variacional na Mecânica 173

6	A Formulação Variacional	175
6 . 1	Introdução	175
6 . 2	Cinemática	176
6 . 2 . 1	Deformações	176
6.2.2	Movimento. Taxa de Deformação	180
6.2.3	Ações de Movimento. Restrições Cinemáticas	185
6.3	Dualidade entre Forças e Ações de Movimento	188
6.4	Dualidade entre Esforços Internos e Taxas de Deformação	189
6.5	Equilíbrio e Compatibilidade em Corpos Livres	193
6.5.1	Princípio da Potência Virtual	193
6 . 5 . 2	O Teorema da Representação	195
6.5.3	Princípio da Potência Virtual Complementar	198
6.6	Equilíbrio e Compatibilidade em Corpos com Restrições Bilaterais	198
6 . 6 . 1	Princípio da Potência Virtual	199
6 . 6 . 2	O Teorema da Representação	200
6.6.3	Princípio da Potência Virtual Complementar	203

7 Princípios Variacionais em Elasticidade. Pequenas Deformacoes	207
7.1 Introdução	207
7.2 Material Elástico. Comportamento Uniaxial	207
7.3 Extensão a Estados Múltiplos	212
7.4 Princípios Variacionais (Corpas Livres)	215
7.4.1 Princípio do Trabalho Virtual	216
7.4.2 Princípio de Mínima Energia Potencial Total	217
7.4.3 Equações Locais e Condições de Contorno	217
7.4.4 Compatibilidade. Princípio do Trabalho Virtual Complementar. Princípio de Mínima Energia Complementar	219
7.4.5 Princípio de Mínima Energia Complementar P.M.E.C.	221
7.5 Princípios Variacionais. Restrições Bilaterais.	223
7.5.1 Princípio do Trabalho Virtual (Restrições Bilaterais):	225
7.5.2 Princípio de Mínima Energia Potencial Total P.M.E.P.T.	225
7.5.3 Princípio do Trabalho Virtual Complementar P.T.V.C.	226
7.5.4 Princípio de Mínima Energia Complementar P.M.E.C.	227
7.6 Princípios Variacionais. Restrições Unilaterais Perfeitas (Sem Atrito)	228
7.6.1 Princípio de Mínima Energia Potencial Total	229
7.6.2 Princípio de Mínima Energia Complementar	230
7.7 Princípio de Min-Max. Funcional de Hellinger-Reissner	231
7.7.1 Princípio de Hellinger-Reissner	233
7.8 Funcional Generalizado	234
7.8.1 Princípio Variacional Generalizado	235
7.9 Teorema de Castigliano	237
7.10 Cotas para Deslocamentos e Cargas Generalizadas	238
7.11 Problema da Elastodinâmica (Restrições Bilaterais)	244
7.12 Solução Aproximada dos Problemas Variacionais	246
7.13 Problema da Elastostática. Restrições Bilaterais	247
7.14 Solução Aproximada do Problema Variacional de Hellinger-Reissner	253
7.15 Solução Aproximada do Princípio Variacional Generalizado	255
7.16 Algoritmos Numéricos para Problemas de Cantata em Elastostática	258

I V Apêndices **263**

A Definições e Notações	265
A l Espaço Vetorial Real e a l	265
A l Subespaço .	266
A.1.2 Variedade Linear. Translação de um Subespaço	266
A.2 Transformações Lineares .	267
A.3 O Espaço $\mathcal{L}(U, V)$	267
A 4 Funcionais	268
A 5 O Espaço Dual Algébrico	268
A 6 Alguns Elementos de Análise Real	269

A . . . 6 . . . 1 Sequências	271
A.7 Limite e Continuidade de Funcoes	273
A . . . 8 Espaços M é t r i c o s	274
A 9 Espaços Normados	277
A . 1 0 Espaços c o m Produto Interno	283
B A Convexidade no Cálculo Variacional		285
B . 1 I n t r o d u c a o	285
B . 2 F u n c o e s C o n v e x a s	287
B . 3 S e m i c o n t i n u i d a d e	288
8.4 Diferencial no Sentido de Gateaux	288
B.5 Minimização de Funcionais Convexos.		
Caracterizacão do Ponto de Mínimo	288
C Exercícios		291
C.1 Introducao	291