

Contenidos

1	Elementos de probabilidad	1
1.1	Introducción a las variables aleatorias	1
1.2	Esquema axiomático*	1
1.2.1	Probabilidad condicionada	3
1.2.2	Teorema de Bayes	4
1.2.3	Independencia estadística	4
1.2.4	Variable aleatoria	5
1.3	Esquema frecuencial	6
1.3.1	Densidad de probabilidad	7
1.3.2	Propiedades de la densidad de probabilidad $P_X(x)$	8
1.4	Función característica	9
1.4.1	La más sencilla de las caminatas al azar (<i>Random Walk</i>)*	11
1.4.2	Ejemplos de $G(k)$ no desarrollables en serie de Taylor*	13
1.4.3	Función característica en una red toroidal*	15
1.4.4	Función de función característica	16
1.5	Desarrollo en cumulantes	18
1.6	Teorema central del límite	19
1.7	Transformación de variables aleatorias	21
1.8	Correlaciones entre variables aleatorias	22
1.8.1	Independencia estadística	23
1.9	Desarrollo en fluctuaciones	24
1.10	Función característica multidimensional	25
1.10.1	Desarrollos en diagramas (varias variables)	25
1.11	Cumulantes de Terwiel*	27
1.12	Distribución gaussiana (varias variables)	29
1.12.1	Distribución gaussiana con momentos impares nulos	30
1.12.2	Teorema de Novikov*	31
1.13	Transformación para densidades en n dimensiones	32
1.13.1	Densidad de probabilidad marginal	33
1.14	Densidad de probabilidad condicionada	35
2	Fluctuaciones en el equilibrio termodinámico	41
2.1	Correlaciones espaciales (distribución de Einstein)	41
2.1.1	Aproximación gaussiana	42
2.2	Trabajo mínimo*	47

2.2.1	Fluctuaciones en términos de $\Delta P, \Delta V, \Delta T, \Delta S$ 	50
2.3	Fluctuaciones en variables de carácter mecánico	51
2.3.1	Fluctuaciones de una cuerda tensa	52
2.4	Correlaciones temporales	55
3	Elementos de procesos estocásticos	59
3.1	Introducción.	59
3.1.1	Variable aleatoria dependiente del tiempo	59
3.1.2	Funcional característica (representación en ensemble)	60
3.1.3	Jerarquía de Kolmogorov (representación multidimensional)	63
3.1.4	Generalidades sobre la representación multidimensional	65
3.1.5	Generalidades sobre la representación en ensemble	66
3.2	Probabilidad condicionada	66
3.3	Procesos de Markov	67
3.3.1	Ecuación de Chapman-Kolmogorov	68
3.4	Procesos estacionarios	70
3.5	Procesos no estacionarios 2π -periódicos 	72
3.6	Movimiento browniano (proceso de Wiener)	73
3.6.1	Incrementos del proceso de Wiener*	75
3.7	Incrementos de un proceso estocástico arbitrario*	75
3.8	Criterios de convergencia*	76
3.8.1	Teorema de Markov (ergodicidad)	78
3.8.2	Continuidad de las realizaciones	79
3.9	Ruido gaussiano blanco	80
3.10	Procesos gaussianos	82
3.10.1	Caso no singular	82
3.10.2	Caso singular (correlación blanca)*	82
3.11	Espectro de fluctuaciones de procesos escalantes*	83
3.12	Procesos markovianos y gaussianos	86
3.12.1	Caso no estacionario 2π -periódico 	90
3.12.2	Proceso de Ornstein-Uhlenbeck	90
3.13	Relación de Einstein	92
3.14	Proceso de Ornstein-Uhlenbeck generalizado*	93
3.15	Difusión de la fase*	95
3.15.1	Relajación dieléctrica	96
3.16	Realizaciones estocásticas (desarrollo en autofunciones)	98
3.17	Ecuaciones diferenciales estocásticas	101
3.17.1	Ecuación de Langevin	101
3.17.2	Integrales de Wiener en el cálculo de Stratonovich	102
3.17.3	Ecuaciones diferenciales estocásticas de Stratonovich	103
3.18	La ecuación de Fokker-Planck	108
3.18.1	Perfiles estocásticos*	113
3.19	La ecuación de Fokker-Planck multidimensional*	116
3.19.1	Movimiento browniano esférico	117

4 Irreversibilidad, ecuación de Fokker-Planck	121
4.1 Simetrías de Onsager	122
4.2 Producción de entropía en la aproximación lineal	124
4.2.1 Efecto mecánico-calórico*	125
4.3 Relaciones de Onsager en un circuito eléctrico	127
4.4 Proceso de Ornstein-Uhlenbeck multidimensional	130
4.4.1 Primer teorema de fluctuación-disipación	131
4.5 Distribución canónica en estadística clásica	134
4.6 Solución estacionaria de Fokker-Planck	135
4.6.1 Problema inverso	137
4.6.2 Balance detallado	137
4.7 Corriente de probabilidad	140
4.7.1 Caso 1-dimensional	140
4.7.2 Caso multidimensional	142
4.7.3 Ecuación de Kramers	145
4.7.4 Teorema de Onsager generalizado*	147
4.7.5 Comentarios sobre el cálculo del potencial de no equilibrio*	147
4.8 Procesos de Fokker-Planck no estacionarios*	148
4.8.1 Teoría de autovalores	148
4.8.2 El operador de Kolmogorov	149
4.8.3 Evolución en un período de tiempo	151
4.8.4 Balance detallado periódico	154
4.8.5 Mezcla fuerte	155
5 Irreversibilidad, respuesta lineal	161
5.1 Teorema de Wiener-Khinchin	161
5.2 Respuesta lineal, susceptibilidad	164
5.2.1 Relaciones de Kramers-Kroning*	165
5.2.2 Relajación frente a una discontinuidad en $t = 0$	168
5.2.3 Disipación de energía	170
5.3 Disipación y correlaciones	171
5.3.1 Partícula browniana en un potencial armónico	171
5.3.2 Partícula browniana en presencia de campo magnético	173
5.4 Sobre el teorema de fluctuación-disipación	176
5.4.1 Teorema II, fórmula de Green-Callen	176
6 Introducción al transporte difusivo	183
6.1 Cadenas de Markov	183
6.1.1 Propiedades de \mathbf{T}_1	184
6.2 Caminata aleatoria (<i>Random Walk</i>)	186
6.2.1 Funciones generatrices	188
6.2.2 Momentos de una caminata aleatoria	189
6.2.3 Realizaciones de una caminata aleatoria*	192
6.3 La Ecuación Maestra (difusión en la red)	195
6.3.1 Solución formal (función de Green)	198
6.3.2 Transición a primeros vecinos	199
6.3.3 Solución del problema homogéneo en una dimensión	200

6.3.4	Densidad de estados, localización	202
6.4	Modelos de desorden	203
6.4.1	Solución estacionaria	205
6.4.2	Tiempos cortos	206
6.4.3	Tiempos largos	207
6.5	Condiciones de contorno en la Ecuación Maestra	209
6.5.1	Introducción	209
6.5.2	Problema equivalente	210
6.5.3	Estado limbo absorbente	211
6.5.4	Estado reflectante	212
6.5.5	Condiciones de contorno (método de las imágenes)	214
6.5.6	Método de las imágenes en sistemas finitos*	215
6.6	Tiempos aleatorios de primer pasaje*	221
6.6.1	Probabilidad de supervivencia	222
7	Difusión en medios desordenados	227
7.1	Desorden en la Ecuación Maestra	227
7.2	Aproximación de medio efectivo	229
7.2.1	El problema de una impureza	229
7.2.2	Cálculo de la función de Green con una impureza	231
7.2.3	El medio efectivo	232
7.2.4	Límite de tiempos cortos	234
7.2.5	Límite de tiempos largos	235
7.3	Difusión anómala y la aproximación CTRW	239
7.3.1	Relación entre un CTRW y la Ecuación Maestra generalizada	242
7.3.2	Retorno al origen*	244
7.3.3	Relación entre la función de espera y el desorden*	247
7.3.4	Superdifusión*	250
7.4	Difusión con estados internos	253
7.4.1	Caso ordenado	253
7.4.2	Caso desordenado	254
7.4.3	Caso no factorizable*	255
8	Conductividad eléctrica	261
8.1	Transporte y la mecánica cuántica	261
8.2	Transporte y la fórmula de Kubo	262
8.2.1	Teorema III (Kubo)	264
8.2.2	Fórmula de Kubo*	264
8.2.3	Aplicación a la conductividad eléctrica	266
8.3	Conductividad en el límite clásico	267
8.3.1	Conductividad usando un modelo de relajación exponencial	268
8.4	Fórmula de Scher y Lax para la conductividad	269
8.4.1	Susceptibilidad de un gas de Lorentz	272
8.4.2	Límite estático (ley de Fick)	277
8.5	Transporte difusivo anómalo (conclusión)	280
8.5.1	La aproximación de CTRW	280
8.5.2	La técnica autoconsistente (AME)	282

8.5.3 Difusión en coordenadas esféricas*	284
8.6 Acerca del vm sobre el desorden (epílogo)	285
A Variables termodinámicas en mecánica estadística	289
A.1 El principio de Boltzmann	289
A.1.1 Sistemas en contacto	290
A.2 Primera y segunda ley de la termodinámica	291
B Relajación al estado estacionario	295
B.1 Evolución temporal	295
B.2 Función de Lyapunov	298
C La función de Green del problema de una impureza	301
C.1 Caso anisotrópico y asimétrico	301
C.2 Caso anisotrópico y simétrico	302
D La función de espera $\psi(t)$ del CTRW	303
E Efectos no markovianos frente a irreversibilidad	305
E.1 El núcleo $\Phi(t)$ y el cálculo diferencial generalizado	307
F Matriz densidad	309
F.1 Propiedades de la matriz densidad	310
F.2 Matriz densidad reducida	311
F.3 Ecuación de von Neumann.	311
F.4 Entropía de información	314
G Fórmula de Kubo para la susceptibilidad	315
G.1 Derivación alternativa de la fórmula de Kubo	318
H Fractales	321
H.1 Objetos autosimilares	321
H.2 Objetos estadísticamente autosimilares	324
Índice alfabético	331