

TESIS DE LA CARRERA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

**Análisis no lineal de inestabilidades en el
problema acoplado termohidráulico-neutrónico**

Ing. Germán Theler
Maestrando

Dr. Fabián J. Bonetto
Director

San Carlos de Bariloche
Octubre de 2008

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

*Dedicado a los que hacen bien el
pedacito de país que les toca y contribuyen
a que todos vivamos mejor en general,
y a mis padres en particular...*

*No dedicado a los que hacen mal el
pedacito de país que les toca y contribuyen
a que todos vivamos peor en general,
y a también a ellos en particular...*

Resumen

Análisis no lineal de inestabilidades en el problema acoplado termohidráulico-neutrónico

El análisis de la influencia de los efectos mutuos que existen entre la termohidráulica y la neutrónica sobre la dinámica es el problema central de la ingeniería de un reactor nuclear. En particular, es clave el estudio de la estabilidad, especialmente en etapas de diseño conceptual. En este trabajo proponemos un método general de análisis de estabilidad no lineal basado en el cálculo de la dimensión fractal de las órbitas que sigue un sistema dinámico en el espacio de las fases, y estudiamos modelos matemáticos de dos diseños diferentes de reactores nucleares de potencia. Comenzamos ilustrando la aplicación del método no lineal de análisis de estabilidad al sistema caótico de Lorenz y luego investigamos el origen físico de las inestabilidades termohidráulicas tanto en una como en dos fases por un lado, y de la dinámica neutrónica por otro. Finalmente, acoplamos el problema termohidráulico al neutrónico desarrollando dos sistemas dinámicos que modelan el comportamiento de un reactor integrado de convección natural y de un reactor de canales paralelos verticales. En cada caso, construimos mapas de estabilidad en el espacio de parámetros prestando especial atención a las principales variables de diseño, identificando aquellas que contribuyen a inestabilizar el sistema.

Palabras clave: CANAL EN EBULLICIÓN, CANALES PARALELOS, CONVECCIÓN NATURAL, DIMENSIÓN FRACTAL, DINÁMICA NO LINEAL, LÓGICA DIFUSA, INESTABILIDAD, NEUTRÓNICA, REACTOR NUCLEAR, TERMOHIDRÁULICA

Abstract

Non-linear analysis of instabilities in the coupled thermal hydraulic-neutronic problem

The analysis of the role that the mutual effects of the thermal hydraulic and the neutronic aspects play in the dynamic behaviour of a nuclear reactor is the central problem of its engineering design. Particularly, stability studies are key issues, especially during conceptual stages. In this work we propose a general non-linear stability analysis method based on the computation of the fractal dimension of the orbits followed by a dynamical system in phase space, and we develop and further study two mathematical models for different nuclear power reactor designs. We start by showing how the proposed method works applying it to the well known chaotic Lorenz system. Then, on the one hand, we investigate the physical origin of the thermal hydraulic instabilities in both single and two-phase flow, and that of the neutronic dynamics on the other hand. Finally, we couple the thermal hydraulic and the neutronic problem developing two dynamical systems that model the behaviour of an integrated natural circulation reactor and a parallel vertical channel reactor. In each case, we construct stability maps in parameter space, paying special attention to the main design variables and identifying those that contribute most to rendering the system unstable.

Keywords: BOILING CHANNEL, FUZZY LOGIC, FRACTAL DIMENSION, INSTABILITY, NATURAL CIRCULATION, NEUTRONIC, NONLINEAR DYNAMICS, NUCLEAR REACTOR, PARALLEL CHANNELS, THERMAL HYDRAULIC

Contenidos

1. Introducción	1
2. Dinámica no lineal	7
2.1. Sistemas dinámicos	8
2.1.1. Sistemas lineales y no lineales	9
2.1.2. Espacio de las fases	10
2.2. Estabilidad	11
2.2.1. Estabilidad lineal	12
2.2.2. Estabilidad estructural	14
2.3. Dinámica	15
2.3.1. Conjuntos límite omega	17
2.3.2. Atractores	18
2.3.3. Bifurcaciones	18
2.3.4. Medidas	20
2.3.5. Sistemas disipativos	21
2.4. Dimensión fractal	21
2.4.1. Dimensión de Hausdorff	21
2.4.2. Dimensión generalizada	24
2.5. Análisis de series temporales	26
2.5.1. Embedding	27
2.6. Control de sistemas dinámicos	29
2.6.1. Teoría clásica de control lineal	30
2.6.2. Sistemas difusos de Takagi-Sugeno	33
3. Análisis no lineal de inestabilidades	35
3.1. El sistema de Lorenz	36
3.2. Dimensión de caja	38
3.3. Dimensión de correlación	41
3.3.1. Contando cajas	43
3.3.2. Midiendo distancias	45
3.4. Caracterización del espacio de parámetros	49

4. Inestabilidades en flujo de una fase	53
4.1. El loop toroidal anular	53
4.1.1. Ecuaciones de conservación	54
4.1.2. Adimensionalización	57
4.2. Caso particular: condiciones de contorno QT	59
4.2.1. Reducción al sistema de Lorenz	59
4.3. Análisis no lineal de inestabilidades	64
4.3.1. Solución numérica	64
4.3.2. Embedding	66
4.3.3. Mapa de estabilidad	66
4.3.4. Explicación física de la inestabilidad	68
4.4. Control basado en lógica difusa	70
4.4.1. Control difuso del sistema de Lorenz	70
4.4.2. Control del loop toroidal	75
5. Inestabilidades neutrónicas	80
5.1. Ecuaciones de cinética puntual	81
5.2. Análisis de estabilidad lineal	82
5.2.1. Estabilidad sin lazo de control	84
5.2.2. Estabilidad con lazo de control	86
5.3. Efectos no lineales	88
5.3.1. Estabilidad de Lyapunov	88
5.3.2. Realimentación	92
5.3.3. Coeficientes de reactividad	93
5.3.4. Fórmula de perturbaciones	95
5.4. Mapas de estabilidad	96
5.4.1. Mapa de estabilidad	98
6. Inestabilidades en flujo de dos fases	103
6.1. Tipos de inestabilidades	103
6.1.1. Inestabilidad excursiva de Ledinegg	104
6.1.2. Ondas de densidad	104
6.2. El modelo de Clausse y Lahey	106
6.2.1. Zona de una fase	106
6.2.2. Zona de dos fases	109
6.2.3. Conservación de momento	112
6.2.4. El sistema dinámico	117
6.3. Estabilidad	119
6.4. Canales paralelos	123
6.5. Riser adiabático	127
6.5.1. Estabilidad	134

7. Reactor nuclear integrado de convección natural	140
7.1. Modelo matemático	141
7.1.1. Circuito termohidráulico	142
7.1.2. Combustible	151
7.1.3. Neutrónica	155
7.2. Sistema dinámico	158
7.2.1. Estado estacionario	160
7.2.2. Implementación	162
7.3. Limitaciones del modelo	163
7.4. Caso particular	166
7.4.1. Estado estacionario	170
7.4.2. Transitorios	172
7.5. Estabilidad	178
7.5.1. Coeficiente de vacío vs. pérdida de carga	178
7.5.2. Potencia vs. longitud del riser	181
8. Reactor nuclear de canales paralelos	184
8.1. Modelo matemático	184
8.1.1. Fluidodinámica	186
8.1.2. Termodinámica	189
8.1.3. Neutrónica	195
8.2. Canales iguales	196
8.3. Canales diferentes	200
8.3.1. Potencia homogénea	200
8.3.2. Distribución radial de potencia	203
9. Conclusiones	206
9.1. Trabajos futuros	208
A. Derivación del estado estacionario de un boiling channel	210
A.1. El problema	210
A.2. Solución	212
A.2.1. Adimensionalización	213
A.2.2. Estado estacionario	217
B. El software MELON	223
B.1. Controladores basados en lógica difusa	223
B.2. Esquema de I/O	224
B.3. Implementación	227
B.3.1. Mecanismos de sincronización	229
B.3.2. Esquema multi-threading	230
B.4. Ejemplos de códigos fuzzy	231
B.4.1. Controlador difuso por shared memory	231

B.4.2. Sistema de adquisición remota	233
C. Drivers de hardware de adquisición para Linux	234
C.1. Placa interna de adquisición ADQ12B	235
C.1.1. Módulo adq12b	236
C.1.2. Detalles de la implementación	238
C.2. Módulos externos RIAC	239
C.2.1. Módulo qfserial	241
C.2.2. Detalles de la implementación	244
C.3. Ejemplo: control difuso de temperatura	244
Referencias	248

Introducción

También hay sorteos impersonales, de propósito indefinido: uno decreta que se arroje a las aguas del Éufrates un zafiro de Taprobana; otro, que desde el techo de una torre se suelte un pájaro; otro, que cada siglo se retire (o se añada) un grano de arena de los innumerables que hay en la playa. Las consecuencias son, a veces, terribles.

Jorge Luis Borges, La Lotería en Babilonia, 1944

El análisis de los efectos acoplados entre la neutróica y la termohidráulica es el problema central en la ingeniería de un reactor nuclear de potencia ya que estos dos aspectos son los que determinan el diseño final del núcleo. En particular, interesa estudiar la dependencia de la estabilidad del reactor con las principales variables de diseño para lograr una ingeniería conceptual satisfactoria o bien para conocer el efecto de modificaciones sobre diseños existentes. Es por eso que este trabajo trata sobre el análisis de estabilidad en el problema acoplado termohidráulico-neutrónico.

Por otro lado, la mayoría de los sistemas físicos —y ciertamente los tecnológicos— de interés son complejos, por lo que presentan un comportamiento cuyo tratamiento matemático presenta grandes dificultades y que no es posible estudiar utilizando técnicas de análisis lineal. El problema termohidráulico-neutrónico es esencialmente no lineal, por lo que la aplicación de técnicas lineales para su análisis está limitada al rango de aplicabilidad de la aproximación lineal correspondiente. Más aún, los sistemas no lineales presentan características propias que no se manifiestan en las aproximaciones lineales. En este sentido, el análisis de estabilidad que proponemos no se basa en obtener aproximaciones lineales de las ecuaciones que describen el problema sino que estudiamos la evolución temporal de los sistemas dinámicos involucrados y analizamos las características de los espacios de fases resultantes en el dominio temporal, a diferencia de las técnicas lineales basadas en análisis en frecuencia.

Aunque un sistema dinámico admita una solución estacionaria, no necesariamente será ésta la solución real del problema. Por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes admiten las soluciones laminares para cualquier combinación de parámetros, pero sólo son estables para bajos números de Reynolds. Si bien esta idea es la base del concepto de estabilidad, desde un punto de vista de diseño lo que interesa es que el sistema se comporte de la manera esperada. Por lo tanto, si es conveniente un régimen turbulento, la inestabilidad de la solución laminar es deseable.

El análisis no lineal de estabilidad que proponemos se basa en la idea de que dada la evolución temporal de un sistema dinámico, un observador hu-

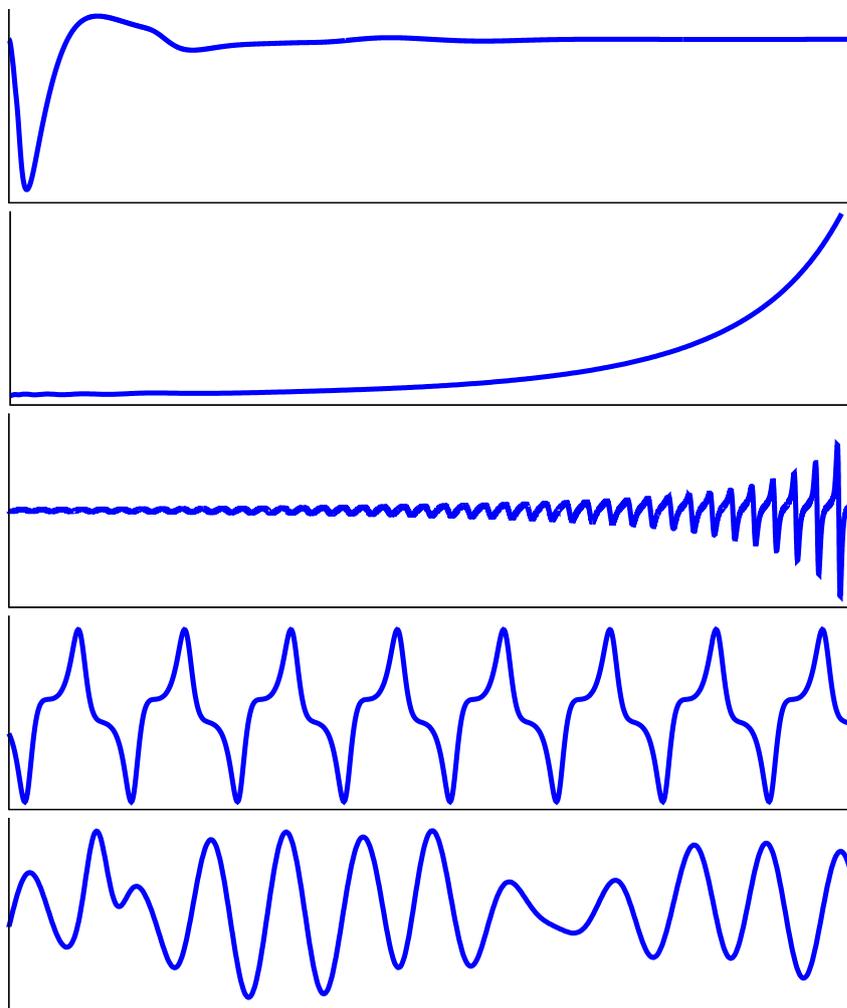


Figura 1.1: Un observador puede clasificar fácilmente los posibles comportamientos que un sistema no lineal puede presentar. Todas las evoluciones temporales provienen de sistemas estudiados en este trabajo.

mano puede decir si el sistema es estable o inestable, presenta un comportamiento periódico o resulta en una trayectoria caótica. En la figura 1.1 ilustramos algunos posibles comportamientos de características marcadamente diferentes que algunos sistemas dinámicos no lineales pueden presentar. Al analizar visualmente las órbitas de un sistema dinámico podríamos decidir fácilmente si la combinación de parámetros que da lugar a la serie temporal analizada es estable o no. Y más aún, podríamos clasificar el comportamiento según características esencialmente no lineales tales como aparición de ciclos límites y flujo caótico.

Las series temporales de la figura 1.1 —que no son simples combinaciones de senos y exponenciales— tienen una propiedad topológica que los diferencia, y que podemos utilizar para barrer sistemáticamente el espacio de parámetros de un sistema dinámico y construir mapas de estabilidad que tengan en cuenta las propiedades esencialmente no lineales de los problemas de interés. Un punto fijo estable es una variedad geométrica de dimensión cero, un ciclo límite estable tiene dimensión igual a uno y los comportamientos caóticos tienen una dimensión fractal mayor que dos. La construcción de mapas de estabilidad no lineales que proponemos consiste básicamente en calcular la dimensión fractal del comportamiento asintótico que el sistema bajo estudio presenta, variando los parámetros que dan lugar a ese comportamiento dentro de algún subespacio de parámetros.

Este trabajo no intenta realizar simulaciones numéricas precisas que predigan exactamente como se comportará un sistema físico —en particular un reactor nuclear— sino que el objetivo principal es por un lado desarrollar modelos razonablemente sencillos que mantengan los fenómenos físicos básicos que influyen en la dinámica del sistema real, y por otro estudiar cómo varía la estabilidad con los principales parámetros de diseño. En este sentido, debemos tener presente que los mapas de estabilidad mostrados en esta tesis no corresponden directamente a sistemas físicos reales sino que indican las propiedades de estabilidad del modelo matemático desarrollado, con sus limitaciones de aplicabilidad y efectos numéricos asociados. Por esta razón, los resultados que importan —desde el punto de vista puramente académico de esta tesis— no son las predicciones sobre la estabilidad absoluta de un sistema sino la *forma* de la dependencia de la estabilidad con el espacio de parámetros y la *variación* de los mapas de estabilidad con las principales variables de diseño. En este sentido, este trabajo no representa un riguroso estudio numérico sino que intenta proveer de herramientas útiles para asistir a la ingeniería conceptual de reactores nucleares de potencia que permitan conocer de antemano la influencia que pueden tener las diferentes opciones de diseño en la estabilidad del reactor.

Si bien esta tesis es una continuación del Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear “Controladores basados en lógica difusa y loops de

convección natural caótico” (Theiler, 2007) donde estudiamos el problema del control de sistemas dinámicos no lineales y mostramos que es posible estabilizar sistemas que en ausencia de control serían caóticamente inestables, el eje principal del presente trabajo de Maestría consiste en estudiar el comportamiento intrínseco de los sistemas analizados sin la intervención de sistemas de control. Si bien es deseable que un reactor sea inherentemente estable y pueda resistir perturbaciones en las condiciones de operación sin la necesidad de un lazo externo de control, pueden existir casos en los que la inestabilidad sea manejada por sistemas de control de operación normal. Por lo tanto, el hecho de que un sistema dinámico contenga una inestabilidad inherente no significa que no sea posible lograr la estabilidad buscada si utilizamos un controlador apropiado.

Con el objetivo de reducir la cantidad de parámetros independientes que influyen en la dinámica de los sistemas estudiados, en todos los casos trabajamos con una formulación adimensional del problema matemático. En el caso de los reactores nucleares, los parámetros adimensionales utilizados en las simulaciones no guardan ninguna relación directa con reactores reales y fueron estrictamente inventados —intentando conservar el orden de magnitud de casos reales— para observar fenómenos de interés desde el punto de vista de la estabilidad.

En el espíritu de recorrer el didáctico camino que va de lo general a lo particular atravesando situaciones de dificultad creciente, hemos dividido la tesis en capítulos que se relacionan en forma secuencial. Para intentar que el texto sea lo más autocontenido posible, comenzamos definiendo en el capítulo 2 las ideas básicas de teoría de sistemas dinámicos y los conceptos de estabilidad que utilizamos más adelante. Esta parte de la tesis es un compendio de definiciones técnicas y resultados que tomamos de la literatura existente (Ott, 2002; Alligood et al., 1997; Hirsch y Smale, 1974) y sirve para unificar la nomenclatura a utilizar. En el capítulo 3 desarrollamos el método de análisis de dimensión fractal modificando ligeramente un algoritmo propuesto por Theiler (1987). Esta propiedad topológica fue originalmente introducida por Mandelbrot (1977) y Grassberger y Procaccia (1983) propusieron utilizarla para caracterizar atractores caóticos. En este trabajo comparamos las diferentes clases de dimensiones fractales que existen e ilustramos la aplicación del método de análisis de estabilidad no lineal propuesto al sencillo sistema de Lorenz (1963).

Antes de analizar el problema acoplado termohidráulico-neutrónico, estudiamos el origen de las inestabilidades que se pueden dar en los problemas individuales desacoplados. En el capítulo 4 estudiamos inestabilidades en flujo de simple fase atacando en particular problema de un loop toroidal de convección natural, tomado como un notable caso de aparición de caos en sistemas termofluidodinámicos (Bau y Torrance, 1981; Ehrhard y Müller, 1990; Lahey, 1992). Construimos un mapa de estabilidad mostrando zonas de estabilidad,

de periodicidad y de comportamiento caótico, y mostramos que efectivamente es posible controlar este tipo de inestabilidades utilizando un controlador basado en lógica difusa.

Por otro lado, introducimos las ecuaciones de cinética puntual y estudiamos aspectos de estabilidad lineal no lineal desde el punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos en el capítulo 5. Partiendo de un modelo de parámetros acoplados (Etchepareborda, 2007) estudiamos el efecto relativo entre los coeficientes de reactividad por temperatura del moderador y del refrigerante.

En el capítulo 6 retomamos el análisis de inestabilidades termohidráulicas, esta vez estudiando el problema de flujo de dos fases que presenta complejidades matemáticas considerablemente mayores que en el caso de flujo en simple fase. Este hecho hace que el problema sea extremadamente no lineal y aparezcan interesantes características propias de esta clase de sistemas. Partiendo del modelo de elementos finitos móviles propuesto por Clause y Lahey (1991), obtenemos sistemas dinámicos cuya estabilidad es susceptible de ser analizada con el método no lineal propuesto. Estudiamos también el caso de dos canales paralelos, obteniendo oscilaciones en fase y en contra fase tal como muestran Guido Lavalle, Converti, y Clause (1991), y desarrollamos un modelo de ecuaciones con retardo para simular un riser adiabático. Si bien Chang y Lahey (1997) han encontrado comportamientos caóticos en canales con riser, nuestro modelo no arroja casos de caos sostenido.

Una vez estudiada la dinámica de los problemas termohidráulico y neutrónico por separado, comenzamos el análisis del problema acoplado. En el capítulo 7 desarrollamos un modelo matemático para describir el comportamiento de un reactor nuclear integrado refrigerado por convección natural y estudiamos pequeños transitorios alrededor del punto de operación normal. Identificamos los principales parámetros que influyen en la estabilidad de este tipo de reactores y construimos mapas de estabilidad en función de parámetros de diseño. Finalmente, en el capítulo 8 realizamos el mismo estudio para el caso de un reactor nuclear de canales paralelos verticales, estudiando cómo varía la estabilidad en función de la cantidad de canales y de las características individuales de cada uno de ellos.

Como trabajo anexo a la tesis propiamente dicha, continuamos el desarrollo del software de control basado en lógica difusa que comenzamos en el Proyecto Integrador. Además, formando parte del soporte de una serie de experimentos fluidodinámicos programados, escribimos desde cero drivers para el sistema operativo Linux para hardware de adquisición de fabricación nacional. Describimos estos dos desarrollos en los apéndices B y C.

Los objetivos principales de esta tesis son por un lado proponer un método de análisis no lineal de inestabilidades que sea aplicable a sistemas generales y poder diferenciar no sólo casos estables de inestables sino también, por ejem-

plo, ciclos límites de comportamientos caóticos. Por otro lado, los mapas de estabilidad encontrados en el estudio de inestabilidades termohidráulicas puras, neutrónicas puras y finalmente en el problema acoplado apuntan a formar una imagen mental de la influencia de los parámetros de diseño en la estabilidad desde el punto de vista de la ingeniería conceptual de un reactor nuclear.

Dinámica no lineal

The result of a mathematical development should be continuously checked against one's own intuition about what constitutes reasonable biological behavior. When such a check reveals disagreement, then the following possibilities must be considered:

- a) A mistake has been made in the formal mathematical development;
- b) The starting assumptions are incorrect and/or constitute a too drastic oversimplification;
- c) One's own intuition about the biological field is inadequately developed;
- d) A penetrating new principle has been discovered.

Harvey J. Gold, Mathematical Modeling of Biological Systems, 1977

La gran mayoría de los sistemas físicos de interés tiene una dinámica intrínsecamente no lineal y no pueden ser expresados como combinaciones de subsistemas más simples, susceptibles de ser analizados con las herramientas de la matemática lineal. Esto es así, por un lado porque en el inconcebible espacio vectorial de todos los sistemas dinámicos posibles, la cantidad de sistemas lineales que existen son realmente marginales o, de otra forma, los sistemas lineales tienen “medida cero” en este espacio. Por otro lado, la no linealidad es una necesidad básica de la complejidad. Cualquier sistema medianamente complejo necesita ser no lineal ya que —como demostramos en este capítulo— los sistemas lineales sólo pueden presentar un comportamiento simple y elemental.

Al intentar una aproximación al problema de analizar matemáticamente la estabilidad de un sistema no lineal, una técnica de aplicación común consiste en encontrar un sistema lineal que aproxime en algún sentido al sistema original y aplicar técnicas lineales de análisis de estabilidad. Si bien el proceso de linealizar un sistema tiene alguna clase de sustento matemático y permite

utilizar herramientas bien estudiadas como por ejemplo análisis de estabilidad basados en el dominio de la frecuencia, en general no es posible definir precisamente el grado de validez de la aproximación. El resultado es que hay una estabilidad que está bien definida —pues la herramienta de análisis es bien conocida y está bien caracterizada— pero no se puede saber exactamente si el sistema cuya estabilidad está siendo estudiada es realmente el sistema que se quiere estudiar. Más aún, existen efectos de origen enteramente no lineal tales como oscilaciones por ciclos límite que la linealización elimina sistemáticamente.

En este trabajo hacemos hincapié en el análisis *no lineal* de inestabilidades. Esto es, desarrollamos técnicas no lineales de análisis de sistemas en el dominio temporal con el objetivo particular de aplicarlas en problemas termohidráulicos en geometrías de interés para la ingeniería nuclear. La pregunta que queremos responder es: dada una combinación particular de los parámetros que definen un problema, ¿el sistema alcanzará el punto de trabajo para el que fue diseñado? O en forma equivalente, al poner el sistema a trabajar en el punto de diseño, ¿la introducción de perturbaciones (no necesariamente pequeñas) hacen que el sistema retorne al punto deseado o lo lleva a un régimen inadmisibles de trabajo? Para ello, en este capítulo introducimos algunas definiciones e ideas que servirán de sustento matemático para el análisis de los diferentes sistemas que presentamos en lo que resta de la tesis.

2.1. Sistemas dinámicos

Consideremos un sistema físico con un número n finito de grados de libertad, que evoluciona en el tiempo según leyes físicas deterministas. Es posible encontrar entonces un vector de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que define completamente el estado del sistema, y n funciones escalares bajo la forma de un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ tales que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

Si tanto las funciones $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ como sus derivadas con respecto a las componentes del vector \mathbf{x} son continuas en un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces la evolución temporal $\mathbf{x}(t)$ a partir de una condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ es única en el dominio U . Llamamos a $\mathbf{x}(t)$ la solución del sistema dinámico (2.1) y al número n , el *orden* del sistema. En este trabajo asumimos que todos los sistemas dinámicos de interés tienen solución única en \mathbb{R}^n . Cuando sea necesario, escribimos la dependencia de la solución con la condición inicial \mathbf{x}_0 explícitamente como $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.

! Si las ecuaciones dinámicas del sistema físico en cuestión involucran derivadas de órdenes superiores o dependen explícitamente del tiempo, siem-

pre es posible introducir nuevas variables y llegar a un sistema de ecuaciones de primer orden de la forma (2.1).

La solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ proviene de integrar en el tiempo el campo de derivadas $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a partir del punto del espacio de las fases \mathbf{x}_0 . Como las funciones $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ son continuas en las componentes del vector \mathbf{x} , entonces la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ debe depender continuamente de la condición inicial \mathbf{x}_0 .

2.1.1. Sistemas lineales y no lineales

En general, no es posible encontrar la solución explícita $\mathbf{x}(t)$ del problema (2.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau \quad (2.2)$$

excepto cuando las funciones $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ cumplen ciertas condiciones muy particulares, en cuyo caso estamos ante un sistema *integrable*. Los sistemas dinámicos integrables son marginales y estructuralmente inestables (sección 2.2.2), como es el caso de los sistemas mecánicos Hamiltonianos, cuya integrabilidad discutió exhaustivamente Kolmogorov en el trabajo donde introduce el teorema que hoy conocemos como KAM (Kolmogorov, 1954). Nuevamente, en el gran espacio vectorial de todos los posibles sistemas dinámicos, aquellos cuya solución (2.2) tiene una expresión analítica explícita tiene medida cero. Sin embargo, dentro del conjunto de los sistemas dinámicos integrables, los sistemas lineales tienen gran interés ya que es posible utilizar las herramientas del análisis y del álgebra lineal para su estudio.

Definición 2.1 Sea un sistema dinámico de la forma (2.1), y sean $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ dos soluciones para dos condiciones iniciales $\mathbf{x}_1(0)$ y $\mathbf{x}_2(0)$. Si cualquier combinación lineal $\alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t)$ es también solución para la condición inicial $\alpha_1 \mathbf{x}_1(0) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(0)$, decimos entonces que el sistema dinámico es *lineal*

! Notar que debido a que la derivada del vector de estado de la ecuación (2.1) no depende explícitamente del tiempo, la definición dada de sistema lineal equivale a sistema lineal invariante en el tiempo. En este trabajo mantenemos consistentemente la idea de que los sistemas dinámicos estudiados no dependen explícitamente del tiempo por lo que la linealidad implica invariancia en el tiempo.

Proposición 2.1 *Cualquier sistema dinámico lineal de orden n puede escribirse como*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (2.3)$$

donde \mathbf{A} es una matriz cuadrada de $n \times n$ con coeficientes reales constantes.

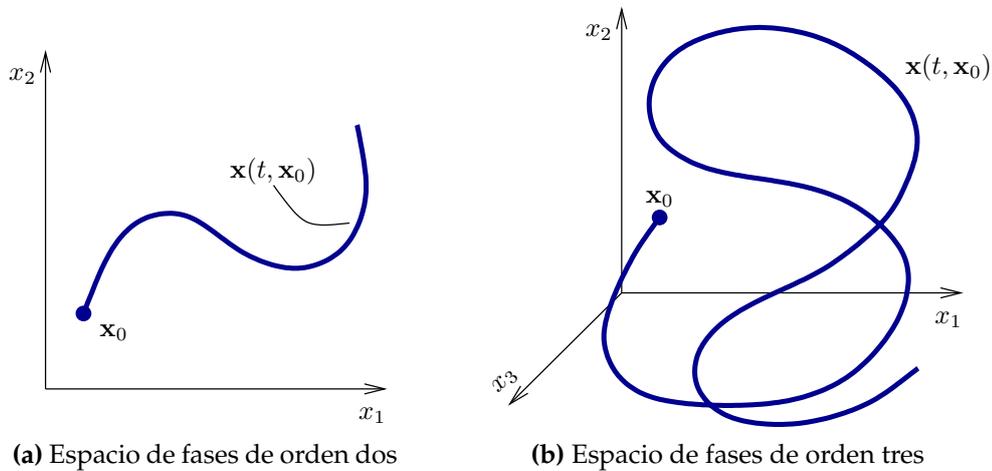


Figura 2.1: Retratos en el espacio de las fases. En (b), la solución describe una órbita compleja pero nunca se cruza a sí misma.

Proposición 2.2 *La solución de un sistema dinámico lineal de la forma (2.3) para una condición inicial \mathbf{x}_0 es*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cdot \exp(\mathbf{A} \cdot t) = \mathbf{x}_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A} \cdot t)^n}{n!} \quad (2.4)$$

2.1.2. Espacio de las fases

Para una condición inicial \mathbf{x}_0 dada, en cada instante de tiempo t la solución $\mathbf{x}(t)$ ocupa una posición bien definida en un espacio euclidiano de dimensión n . Llamamos a este espacio *espacio de las fases*, y al lugar geométrico de las sucesivas posiciones que toma el vector de estado $\mathbf{x}(t)$, *retrato*. Si tenemos en cuenta además el sentido temporal de la evolución en el espacio de las fases, hablamos del *flujo* de la solución en el espacio de las fases (figura 2.1).

Dadas dos soluciones $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ de un mismo sistema dinámico correspondientes a dos condiciones iniciales diferentes, es posible demostrar que si éstas tienen al menos un punto en común entonces sus flujos deben ser iguales para todo tiempo posterior. En efecto, supongamos que existe un punto \mathbf{x}^\dagger tal que $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2) = \mathbf{x}^\dagger$. Consideremos ahora la solución $\mathbf{x}(t)$ que resulta de tomar la condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^\dagger$. Como la solución es única, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t - t_1)$ y $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_2(t - t_2)$. Luego $\mathbf{x}_1(t - t_1) = \mathbf{x}_2(t - t_2)$.

Corolario 2.1 *Retratos en el espacio de las fases correspondientes a diferentes soluciones no pueden intersectarse entre sí ni cortarse a sí mismos.* ■

Definición 2.2 Si $\mathbf{x}(t, \mathbf{w})$ es la solución de un sistema dinámico para la condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}$, llamamos al conjunto de los puntos

$$O(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{w}) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}$$

la *órbita* que pasa por el punto \mathbf{w} .

Debido al corolario 2.1, las órbitas son conjuntos bien definidos. Más aún, una órbita es *invariante* con respecto al flujo en el sentido de que para todo $\mathbf{z} \in O(\mathbf{w})$ y todo tiempo t , sucede que $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}) \in O(\mathbf{w})$. En general, un conjunto S es invariante frente al flujo si la imagen de cualquier punto del conjunto a través de la solución $\mathbf{x}(t)$ también está en S , para cualquier tiempo.

2.2. Estabilidad

Dado un sistema dinámico (2.1), decimos que un punto \mathbf{x}^* del espacio de las fases es un *punto fijo* si

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$$

Definición 2.3 (Estabilidad de Lyapunov) Un punto fijo \mathbf{x}^* es estable —en el sentido de Lyapunov— si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, dada una condición inicial \mathbf{x}_0 que satisfaga $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0| < \delta(\epsilon)$, se cumple

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Más aún, el punto fijo es *asintóticamente estable* si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$$

para una condición inicial \mathbf{x}_0 tal que $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0| < \eta$. Si $\eta \rightarrow \infty$, entonces el punto \mathbf{x}^* es *global y asintóticamente estable*.

Definición 2.4 Dado un sistema dinámico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

y un punto fijo \mathbf{x}^* , una función $V(\mathbf{x}) : U \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ continua en U y diferenciable en $\{U - \mathbf{x}^*\}$ se llama *función de Lyapunov* si cumple simultáneamente

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} = 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \\ > 0 & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* \end{cases} \quad (2.5)$$

y

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.6)$$

en todo el dominio $\{U - \mathbf{x}^*\}$.

Teorema 2.1 (Lyapunov) *Un punto fijo \mathbf{x}^* es estable si existe una función de Lyapunov $V(\mathbf{x})$. El dominio U es la cuenca de atracción del punto fijo. Más aún, si la desigualdad (2.6) es estricta, el punto fijo es asintóticamente estable y si $U = \mathbb{R}^n$, el punto \mathbf{x}^* es globalmente estable.*

DEMOSTRACIÓN (HIRSCH Y SMALE (1974)) Sea $B_\delta(\mathbf{x}^*)$ una bola de radio δ centrada en \mathbf{x}^* , y sea α el mínimo valor que toma de la función V en la frontera de $B_\delta(\mathbf{x}^*)$. Entonces $\alpha > 0$ por (2.5). Por un lado, debido a la continuidad de V , el dominio $U_1 = \{\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}^*) / V(\mathbf{x}) < \alpha\}$ incluye al punto \mathbf{x}^* y a un entorno abierto a su alrededor. Por otro lado, ninguna solución con condición inicial en U_1 puede salir de $B_\delta(\mathbf{x}^*)$ ya que V es no creciente a lo largo de las órbitas del sistema dinámico. Luego \mathbf{x}^* cumple la definición 2.3 y es estable.

Ahora, supongamos que vale (2.6). Tomemos una solución $\mathbf{x}(t)$ con condición inicial en U_1 . Vamos a probar que debe ser $\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}^*$ para $t_n \rightarrow \infty$. En efecto, supongamos que $\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$. Por un lado,

$$V(\mathbf{x}(t)) > V(\mathbf{y}^*) \quad \forall t > 0 \quad (2.7)$$

debido a que V es estrictamente decreciente a lo largo de las órbitas en U . Ahora sea $\mathbf{y}(t)$ la órbita que resulta de tomar como condición inicial el punto $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$. Entonces $V(\mathbf{y}(\tau)) < V(\mathbf{y}^*)$ para $\tau > 0$. Pero $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}(t_n + \tau)$ con lo que debe ser

$$V(\mathbf{x}(t_n + \tau)) < V(\mathbf{y}^*) \quad (2.8)$$

Las expresiones (2.7) y (2.8) forman un absurdo que proviene de suponer que $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{y}^*$. Luego $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ para $t \rightarrow \infty$, el punto fijo es asintóticamente estable y queda demostrado el teorema. ■

2.2.1. Estabilidad lineal

El teorema de Lyapunov da una condición estricta para la estabilidad de un punto fijo, en el sentido de la definición 2.3. Sin embargo, su aplicación directa no resulta sencilla pues no existe una forma sistemática de encontrar funciones de Lyapunov para un sistema dinámico genérico. Además, que uno no sea capaz encontrar una función de Lyapunov no asegura la inestabilidad. Es por eso que existe un segundo criterio de fácil aplicación, pero cuyos resultados valen sólo en un pequeño entorno del punto fijo analizado.

Definición 2.5 Dado un sistema dinámico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

y un punto fijo \mathbf{x}^* , el *jacobiano* del sistema es la matriz cuadrada de $n \times n$ de coeficientes reales constantes

$$J(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

Definimos el vector $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ y el *sistema dinámico lineal asociado* como

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = J(\mathbf{x}^*) \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$

Dado que existen muchas herramientas de análisis de sistemas lineales, es muy común utilizar este procedimiento de linealización basado en aproximar las derivadas temporales del sistema con desarrollos de Taylor a primer orden para atacar problemas. De hecho es posible demostrar que, bajo ciertas condiciones, el sistema lineal asociado mantiene la física del problema original en un pequeño entorno del punto fijo.

Teorema 2.2 (Hartman-Grobman) *Sea \mathbf{x}^* un punto fijo de un sistema dinámico no lineal tal que el jacobiano $J(\mathbf{x}^*)$ no tenga ningún autovalor con parte real nula. Entonces existe un homeomorfismo H definido en un entorno abierto E alrededor de \mathbf{x}^* que mapea continuamente puntos de la solución no lineal $\mathbf{x}(t)$ a la solución $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_0 \exp(J \cdot t)$ del sistema dinámico lineal asociado, manteniendo el sentido del flujo en el espacio de las fases.* ■

Sin embargo, el teorema de Hartman-Grobman no dice qué tan grande es el entorno en el cual se puede realizar la relación uno a uno entre la solución aproximada y la solución real. La validez de la aproximación depende esencialmente del problema en cuestión, y el entorno E puede llegar a ser arbitrariamente pequeño.

Teorema 2.3 (de la estabilidad lineal) *Un punto fijo \mathbf{x}^* es asintóticamente estable si todos los autovalores del jacobiano evaluado en dicho punto tienen parte real estrictamente negativa.* ■

La demostración del teorema 2.3 se reduce a mostrar que si se cumplen las condiciones, entonces la función

$$V = -\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x}$$

es una función de Lyapunov. De todas formas, podemos ver intuitivamente que el resultado es verdadero con el siguiente razonamiento. Si la matriz jacobiana \mathbf{J} es diagonalizable, entonces es posible encontrar una base de autovectores tal que la dependencia temporal de cada una de las componentes es exponencial con un tiempo característico igual a la inversa del autovalor correspondiente. Luego si todos los autovalores son negativos, la solución del sistema lineal asociado tiende a cero para tiempos grandes y el punto fijo es estable. Si \mathbf{J} no es diagonalizable, se puede hacer un razonamiento análogo utilizando la forma normal de Jordan de la matriz y llegar al mismo resultado.

Sin embargo, hay dos detalles a tener en cuenta. Por un lado, si algún autovalor tiene parte real igual a cero entonces nada se puede afirmar sobre la estabilidad del punto fijo. Por otro lado, el teorema de estabilidad lineal se refiere sólo a lo que sucede en un pequeño entorno del punto fijo, no casualmente el mismo entorno E que aparece en el teorema 2.2 de Hartman-Grobman. De esta manera, el sistema vuelve a un punto fijo linealmente estable sólo si las perturbaciones introducidas son menores que el radio del entorno E que, nuevamente, puede ser arbitrariamente pequeño y —peor aún— no se puede explicitar, que es lo que sucede en el caso de una bifurcación de Hopf subcrítica (sección 2.3.3).

2.2.2. Estabilidad estructural

Existe también otro concepto de estabilidad, el cual no tiene que ver con la respuesta de un sistema dinámico frente a perturbaciones en el espacio de las fases en particular, sino que de alguna manera mide la tolerancia de una familia de sistemas frente a perturbaciones estructurales. Una clase de sistemas dinámicos es *estructuralmente estable* si pequeñas perturbaciones en los correspondientes campos vectoriales $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ arrojan como resultado órbitas topológicamente equivalentes a las obtenidas en los sistemas sin perturbar (Drazin, 1992).

Por ejemplo, los puntos de equilibrio hiperbólicos —estables en ciertas direcciones del espacio de las fases e inestables en otras— son estructuralmente estables, pues si bien perturbaciones la función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ modifican las direcciones de estabilidad, no cambian el carácter hiperbólico del punto fijo y por ende la topología de las órbitas correspondientes. Por otro lado, la propiedad de linealidad de los sistemas como el definido por la ecuación (2.3) es estructuralmente inestable, ya que una pequeña perturbación tal como sumar un pequeño número ε a cualquier componente de la función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ hace que la solución deje

de tener la forma exponencial (2.4). Otro tipo de problemas estructuralmente inestables son aquellos que tienen alguna cantidad conservada tal como la energía, pues al agregar un mínimo mecanismo de disipación la topología del espacio de fases resultante suele ser completamente diferente de la del problema conservativo.

2.3. Dinámica

En la mayoría de los sistemas físicos de interés existen mecanismos de fricción que se oponen al movimiento y dependen en forma creciente de la misma variable sobre la que actúan. Por ejemplo, la fuerza de drag que sufre un cuerpo al moverse en un fluido actúa sobre la velocidad del mismo y a la vez aumenta con alguna potencia de ésta. En estos casos, las órbitas en el espacio de las fases suelen estar acotadas ya que los mecanismos de disipación evitan el aumento excesivo de cualquiera de las variables.

En los sistemas que admiten soluciones puramente exponenciales o que en principio no están acotadas, suele suceder que el modelo aplicado deja de tener validez y, con ello, la solución exponencial no acotada. Por ejemplo, por más que un sencillo modelo térmico de parámetros concentrados de un sistema termodinámico aislado con una fuente de calor constante predice que la temperatura debería aumentar monótonamente con el tiempo, los materiales del sistema físico real eventualmente cambiarán de estado, el sistema perderá la geometría original y el modelo dejará de tener validez. Sin embargo, todavía es posible encontrar un modelo más complejo —necesariamente no lineal— que tenga en cuenta todos los efectos en un rango de temperaturas más grande y en el cual las soluciones en el espacio de las fases estén acotadas.

Un caso interesante resultan aquellos sistemas dinámicos conocidos como *caóticos*, los cuales llamaron la atención de la comunidad científica por primera vez a principios de los sesenta, a partir de los experimentos numéricos de Edward Lorenz sobre modelos climáticos. La característica más notable de este tipo de sistemas es la sensibilidad a condiciones iniciales, descubierta casi por azar en aquel famoso episodio en el que Lorenz quiso repetir resultados previos e introdujo manualmente las condiciones iniciales con una precisión menor que la utilizada por el programa en la primitiva computadora Royal McBee para realizar las operaciones —binarias— de punto fijo. (Gleick, 1987). A partir de la publicación de Lorenz (1963) se desarrolló una nueva rama de la física dedicada especialmente al análisis de sistemas caóticos (Bai-lin, 1984).

Consideremos un hipercubo de volumen (en general medida de Lebesgue, sección 2.3.4) v_0 en el espacio de las fases de un sistema de orden n . Dado que la solución $x(t, x_0)$ depende continuamente de la condición inicial x_0 , entonces todos los puntos contenidos en el volumen v_0 —pensados como un conjunto

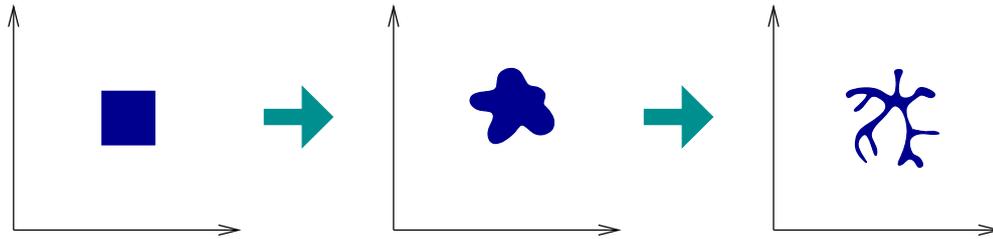


Figura 2.2: Sensibilidad a las condiciones iniciales. Un conjunto de condiciones iniciales forman sucesivos hipersólidos conexos. Sin embargo, dos puntos arbitrariamente cercanos no necesariamente deben mantener la cercanía a través de la evolución temporal de un sistema dinámico.

continuo de condiciones iniciales— formarán sucesivos hipersólidos conexos cuyo volumen evolucionará en el tiempo. Sin embargo, esto no implica necesariamente que puntos arbitrariamente cercanos al tiempo $t = 0$ se mantengan cercanos para cualquier tiempo. Por más que el hipersólido deba ser conexo debido a la continuidad de $x(t, x_0)$ con respecto a x_0 , podría suceder la situación ilustrada en la figura 2.2, en la cual el volumen se deforma de manera tal de mantenerse conexo para todo tiempo pero no asegurando que puntos cercanos al inicio se mantengan cercanos para tiempos grandes. Llamamos a este efecto, *sensibilidad a las condiciones iniciales*.

La otra característica distintiva de los sistemas dinámicos caóticos es la no periodicidad del flujo en el espacio de las fases. De hecho, el título del paper seminal de Lorenz (1963) es “Flujo determinístico no periódico”, haciendo énfasis en el resultado de no periodicidad antes que en el de sensibilidad a condiciones iniciales. Hay que notar que esta falta de periodicidad no tiene el mismo origen que la cuasi-periodicidad de los sistemas integrables de frecuencias inconmensurables —resultado ya conocido por Poincaré en el siglo XIX— sino que proviene de una propiedad fundamental del sistema dinámico.

Según definimos más abajo, los sistemas dinámicos pueden clasificarse en conservativos y disipativos. En forma estricta, esta clasificación se realiza de acuerdo a cómo evolucionan volúmenes de condiciones iniciales en el espacio de las fases, pero en forma más relajada podemos decir que los sistemas conservativos son aquellos que tienen alguna cantidad conservada —típicamente la energía— mientras que los disipativos presentan, justamente, mecanismos de disipación. Como este trabajo tiene como objetivo estudiar sistemas termodinámicos que son esencialmente disipativos, prestamos especial atención al comportamiento de este tipo de sistemas dinámicos. Los sistemas disipativos son estructuralmente *estables* y presentan algunas características y comportamientos radicalmente diferentes con respecto a los sistemas conservativos.

2.3.1. Conjuntos límite omega

Definición 2.6 Un punto $w \in \mathbb{R}^n$ está en el conjunto límite omega $\omega(x_0)$ de la solución $x(t)$ correspondiente a la condición inicial x_0 si existe una sucesión no acotada de tiempos $\{t_n\}$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = w$$

Esto es, si uno espera un tiempo suficientemente largo, la solución del sistema dinámico $x(t, x_0)$ consistirá en puntos que pertenecen al conjunto $\omega(x_0)$. Ciertamente este conjunto puede constar de puntos en el infinito, tal como sucede con los sistemas lineales (2.3) cuya matriz A tenga al menos un autovalor con parte real positiva. Sin embargo, como ya hemos discutido, estamos interesados en sistemas cuyas órbitas están acotadas.

Teorema 2.4 Las soluciones $x(t, x_0)$ de un sistema dinámico de orden $n = 1$

$$\dot{x} = F(x)$$

son o bien monótonamente crecientes o bien monótonamente decrecientes del tiempo. Si la solución está acotada, entonces el único límite omega $\omega(x_0)$ posible es un punto fijo. ■

Los sistemas de orden uno no presentan mayor interés, ya que si un sistema físico es lo suficientemente simple como para poder ser escrito como un sistema dinámico de primer orden, entonces su análisis no requeriría una tesis de maestría completa.

Definición 2.7 Dada una órbita $x(t, x_0)$, si x_0 no es un punto fijo y existe un tiempo $T > 0$ tal que

$$x(t + T, x_0) = x(t, x_0)$$

entonces $x(t, x_0)$ es una órbita periódica o ciclo límite. El menor tiempo T que cumple esta condición es el período del ciclo.

! Debido al corolario 2.1, los ciclos límites forman curvas cerradas simples en el espacio de las fases.

Teorema 2.5 (Poincaré-Bendixon) Sea $\omega(x_0)$ un conjunto omega compacto y no nulo de un sistema dinámico definido en algún dominio abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces, o bien $\omega(x_0)$ es un punto fijo o es un ciclo límite. ■

Corolario 2.2 Para que un sistema presente una dinámica caótica, son condiciones necesarias:

- i. que el sistema no sea lineal
- ii. que el orden sea $n \geq 3$. ■

2.3.2. Atractores

Un atractor es una variedad¹ del espacio de las fases que atrae órbitas cercanas. En particular, los límites omega son atractores.

Definición 2.8 El conjunto de todos los puntos $w \in \mathbb{R}^n$ que pertenecen a un conjunto límite omega $\omega(x_0)$ de la condición inicial x_0 es un *conjunto atractor*, y el conjunto de condiciones iniciales x_0 que son atraídas por el límite omega se llama *cuenca de atracción*.

2.3.3. Bifurcaciones

Cuando al variar externamente un parámetro de un sistema dinámico se crea un punto fijo o un ciclo límite que antes no existía, o bien un punto fijo o un atractor cambia el carácter de su estabilidad, decimos que ocurrió una *bifurcación*. Solemos esquematizar las bifurcaciones de un sistema dinámico utilizando un diagrama de bifurcaciones en el que representamos la posición de un punto fijo x^* en función de algún parámetro externo a . En la figura 2.3 ilustramos ejemplos de algunos diagramas para ciertas clases de bifurcaciones comúnmente encontradas en sistemas de interés.

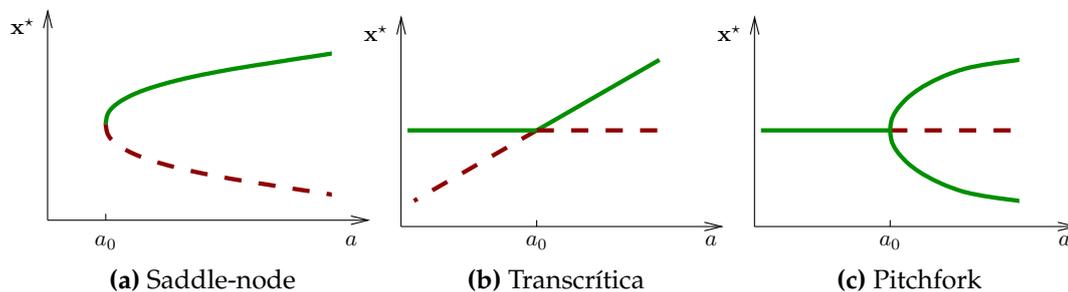


Figura 2.3: Bifurcaciones más comunes en sistemas dinámicos. Cuando el parámetro $a = a_0$ se produce una bifurcación y cambian las propiedades de estabilidad de algún punto fijo x^* . Las líneas llenas corresponden a puntos estables y las líneas de trazos a puntos inestables.

De particular interés resulta la situación en la cual se crea un ciclo límite. Esta bifurcación recibe el nombre de *bifurcación de Hopf*. Existen dos clases de bifurcaciones de Hopf radicalmente diferentes. En el caso supercrítico, para $a = a_0$ un punto fijo estable pierde su estabilidad y se crea un ciclo límite estable de amplitud infinitesimal que aumenta a medida que aumenta el parámetro a (figura 2.4a). Por otro lado, en una bifurcación de Hopf subcrítica un ciclo límite inestable colapsa sobre un punto fijo estable que pierde su estabilidad (figura 2.4b). En este caso, si un sistema trabaja con un parámetro

¹Traducción literal del inglés *manifold*.

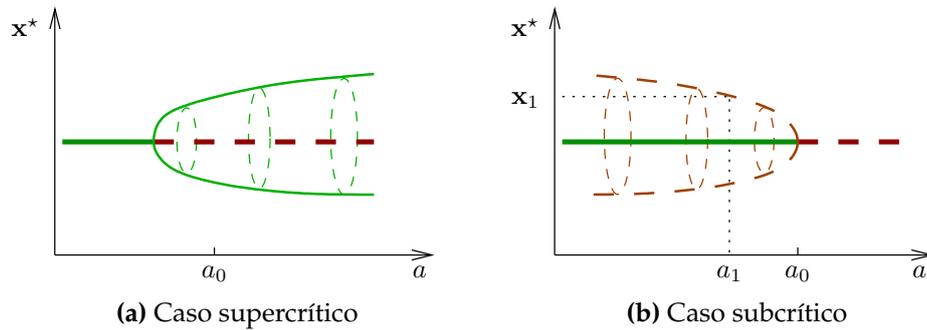


Figura 2.4: Bifurcaciones de Hopf. En el caso supercrítico el punto fijo atrae todas las órbitas para $a < a_0$ y las repele para $a > a_0$. En la bifurcación subcrítica, la cuenca de atracción del punto fijo está limitada por el ciclo límite inestable. Perturbaciones más grandes que x_1 (con $a = a_1$) se alejan del punto fijo.

externo $a = a_1$ y el vector de estado es perturbado alrededor del punto fijo con una pequeña amplitud, el sistema vuelve al punto fijo estable. Sin embargo, si la perturbación excede el punto x_1 que está sobre el ciclo límite inestable, el vector de estado se aleja del punto de estabilidad. El hecho de que la cuenca de atracción esté limitada de esta manera hace que las bifurcaciones subcríticas de Hopf sean de particular importancia en el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos.

Teorema 2.6 (Sattinger-Hopf) Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, a)$$

un sistema dinámico que depende de un parámetro externo real a , y \mathbf{x}^* un punto fijo que depende de a

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(a)$$

Sea $J(\mathbf{x}^*, a)$ la matriz jacobiana del sistema dinámico evaluada en el punto fijo. Entonces si

- i. existe un valor a_c tal que $J(\mathbf{x}^*, a_c)$ tiene al menos un autovalor λ_c real nulo
- ii. $\mathbf{x}^*(a)$ es un punto fijo en un entorno abierto de a_c
- iii. el orden de repetición del autovalor λ_c es impar
- iv. existe otro punto fijo $\mathbf{x}^*(a_c)$ tal que $\mathbf{x}^*(a_c) = \mathbf{x}^*$

ó bien

- i. existe un valor a_c tal que $J(\mathbf{x}^*, a)$ tiene dos autovalores λ_c y λ_c^\dagger complejos conjugados con parte real nula

- ii. $\mathbf{x}^*(a)$ es un punto fijo en un entorno abierto de a_c
- iii. el orden de repetición de los autovalores λ_c y λ_c^\dagger es impar
- iv. para $a = a_c$ la parte imaginaria de los autovalores λ_c y λ_c^\dagger es diferente de cero
- v. la derivada de la parte real de los autovalores con respecto a a es no nula
- vi. $\mathbf{x}^*(a_c)$ es asintóticamente estable

entonces ocurre una bifurcación de Hopf para $a = a_c$. ■

2.3.4. Medidas

Dado un conjunto S en \mathbb{R}^n , asignamos un número real

$$\mu(S) = \int_S \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

llamado *medida* del conjunto S para alguna distribución $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$ tal que la medida de la unión de numerables (finitos o infinitos) conjuntos disjuntos sea la suma de las medidas individuales de cada conjunto. En particular, si $\rho(\mathbf{x})$ es idénticamente igual a la unidad obtenemos las medidas de Lebesgue, que resultan la longitud, el área y el volumen del conjunto S para $n = 1, 2$ y 3 respectivamente. Si la densidad $\rho(\mathbf{x})$ se elige de tal manera que el mínimo subespacio vectorial donde S está definido tenga medida uno, decimos que la medida es probabilística.

Sea $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ una solución de un sistema dinámico atraída por un límite omega ω , y S un subconjunto de ω . Si $\rho(\mathbf{x})$ es tal que

$$\mu(S) = \int_S \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t/\mathbf{x}(t) \in S} d\tau}{t} \quad (2.9)$$

es la fracción del tiempo que la órbita pasa en el conjunto S y este resultado es independiente de la condición inicial \mathbf{x}_0 que se tome sobre la cuenca de atracción de ω (excepto tal vez en un conjunto de medida de Lebesgue cero), la medida generada es la *medida natural* generada por el sistema dinámico.

! Notar que la medida natural del límite omega ω completo es igual a uno, por lo que se trata de una medida probabilística.

! La ecuación (2.9) tiene sentido en sistemas ergódicos (Eckmann y Ruelle, 1985) en los cuales los promedios temporales son iguales a los promedios de los ensambles, que justamente es el caso de la mayoría de los sistemas dinámicos de interés.

2.3.5. Sistemas disipativos

Consideremos nuevamente el hipercubo de volumen (medida de Lebesgue) v_0 en el espacio de las fases de un sistema de orden n , cuya evolución según un sistema dinámico está ilustrado en la figura 2.2. Es posible demostrar que la derivada temporal de dicho volumen es

$$\frac{dv}{dt} = \text{traza} [J(\mathbf{x}(t))] \quad (2.10)$$

Decimos que un sistema dinámico es *conservativo* si el volumen inicial se mantiene constante y es *disipativo* si el volumen inicial se contrae en el tiempo.

2.4. Dimensión fractal

Consideremos un sistema dinámico disipativo de orden $n = 3$ con órbitas acotadas en el espacio de las fases y que no tenga puntos fijos ni ciclos límites estables. Para tiempos largos, es de esperar que una órbita cualquiera esté arbitrariamente cerca de un conjunto ω . Por un lado, el sistema contrae elementos de volumen en el espacio de las fases, por lo que el volumen del conjunto límite debe ser cero. Pero por otro lado, el teorema 2.5 de Poincaré y Bendixon dice que los únicos límites omega posibles en \mathbb{R}^2 son puntos fijos o ciclos límite que, por suposición, el sistema dinámico considerado no posee. Luego, si existe un sistema con órbitas acotadas sin puntos fijos ni ciclos límites estables, entonces su límite omega es un conjunto de volumen cero pero de dimensión mayor que dos.

Efectivamente este tipo de sistemas existen, y de hecho son muy comunes. Los límites omega asociados resultan ser una clase de conjuntos con propiedades particulares denominados genéricamente *fractales* (Mandelbrot, 1977) o *atractores extraños* según Ruelle y Takens (1971). Una de las tantas particularidades de los fractales es el hecho de que se los asocia con una dimensión no entera.

2.4.1. Dimensión de Hausdorff

Definición 2.9 Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n . Un grupo² de conjuntos $\{s_i\}$ es un cubrimiento- ϵ ³ de S si $S = \bigcup s_i$ y el diámetro (la máxima distancia entre dos puntos) de cada uno de los conjuntos s_i es menor que ϵ . La *medida d -dimensional de Hausdorff* de S es

²Fea Traducción del inglés *collection*

³Horrible traducción del inglés *ϵ -cover*

$$\mu_d(S) = \sup_{\epsilon > 0} \inf \left(\sum \text{diám}(s_i)^d / (s_i) \text{ es un cubrimiento-}\epsilon \text{ de } S \right)$$

Definimos la *dimensión de Hausdorff* del conjunto S como

$$\begin{aligned} \dim(S) &= \inf [d / \mu_d(S) = 0] \\ &= \sup [d / \mu_d(S) = \infty] \end{aligned}$$

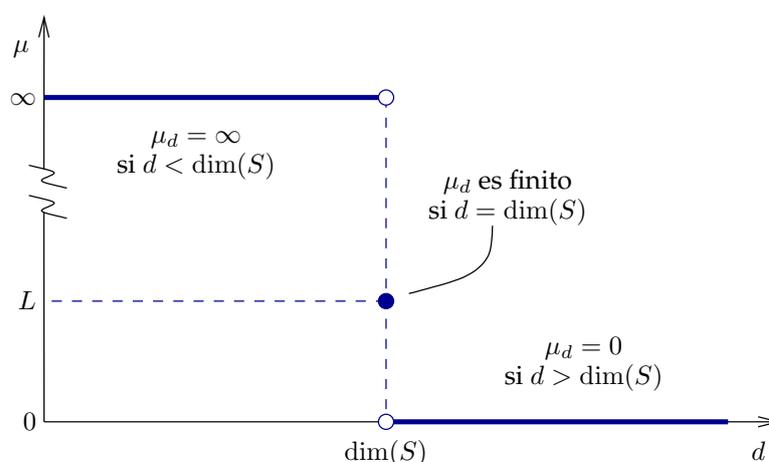


Figura 2.5: Interpretación gráfica de la definición 2.9 de la dimensión de Hausdorff. La medida de orden uno (longitud) de una superficie es infinito, mientras que la medida de orden tres (volumen) es cero. La medida de orden dos (superficie) es un valor finito.

En la figura 2.5 vemos la interpretación gráfica de la definición 2.9. La medida μ_d de un conjunto es infinito para índices d menores que la dimensión de Hausdorff y cero para índices mayores. Existe un único valor de d para el cual la medida μ_d toma un valor finito, que es justamente la dimensión de Hausdorff. Por ejemplo, una figura plana —pongamos por caso un círculo— tiene volumen (medida μ_d con $d = 3$) igual a cero y longitud ($d = 1$) infinito. El área, que es la medida μ_d para $d = 2$ es un número real definido, por lo que al círculo le corresponde una dimensión de Hausdorff igual a dos.

Una simplificación introducida por Mandelbrot en 1977 consiste en notar que para cubrir completamente un conjunto S de dimensión d , la mínima cantidad $N(\epsilon)$ de subconjuntos s_i de diámetro ϵ necesarios para realizar un cubrimiento- ϵ para valores de ϵ suficientemente pequeños cumple

$$N(\epsilon) \sim \kappa \epsilon^{-d} \tag{2.11}$$

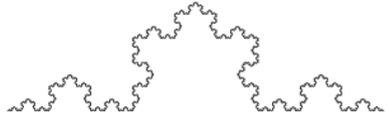
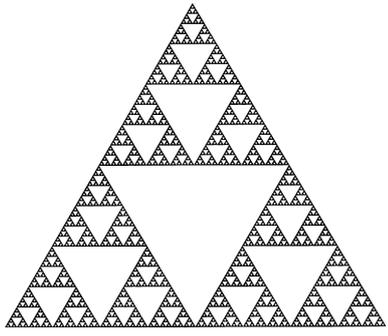
Conjunto	Dimensión	
Conjunto de Cantor	$\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,603929 \dots$	
Curva de Koch	$\frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26185 \dots$	
Tamiz de Sierpinski	$\frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58496 \dots$	

Tabla 2.1: Dimensiones de Hausdorff calculadas analíticamente para conjuntos fractales conocidos.

para alguna constante κ . La geometría de los subconjuntos s_i más utilizada en la literatura corresponde a hipercubos de lado ϵ , lo que motivó la siguiente definición.

Definición 2.10 Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene una *dimensión de capacidad* o *dimensión de cajas* d_{caj} definida como

$$d_{\text{caj}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

donde $N(\epsilon)$ es la mínima cantidad de subconjuntos s_i de diámetro ϵ necesarios para realizar un cubrimiento- ϵ de S .

Proposición 2.3 Si el límite de la definición 2.10 existe, entonces es independiente de la secuencia particular $\{\epsilon_n\}$ de los sucesivos cubrimientos- ϵ .

! Excepto en casos patológicos, la dimensión de Hausdorff coincide con la dimensión de cajas para todos los conjuntos de interés. En la tabla 2.1 mostramos dimensiones de Hausdorff calculadas analíticamente para tres conjuntos fractales conocidos.

2.4.2. Dimensión generalizada

Buscando mejorar algoritmos numéricos para calcular dimensiones, Grassberger y Procaccia (1983) introdujeron una definición de dimensión más apropiada para el análisis y la caracterización de límites omegas.

Definición 2.11 Dada una solución $\mathbf{x}(t)$ y M puntos

$$\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^M = \{\mathbf{x}(ih)\}_{i=1}^M$$

donde h es un tiempo arbitrario pero fijo, la *integral de correlación* de la solución $\mathbf{x}(t)$ es

$$C(\epsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \mathcal{H}(\epsilon - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (2.12)$$

con $\mathcal{H}(x)$ la función escalón de Heaviside⁴. La *dimensión de correlación* d_{cor} del conjunto S asociado a la serie temporal $\mathbf{x}(t)$ es

$$d_{\text{cor}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (2.13)$$

La definición 2.11 es la propuesta originalmente por Grassberger y Procaccia (1983) en el marco de la búsqueda de algoritmos para facilitar la determinación numérica de la dimensión de atractores extraños, tema que discutimos en el capítulo 3. De todas maneras, es posible mostrar analíticamente que esta definición es un caso particular de la dimensión generalizada, introducida cronológicamente después del trabajo de Grassberger y Procaccia y discutida en detalle por Arbarbanel (1993).

Definición 2.12 Sea ω un atractor y $\{\omega_i\}_{i=1}^{N(\epsilon)}$ un cubrimiento- ϵ de ω . La *dimensión generalizada* de índice q del conjunto ω es

$$d_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu(s_i)^q}{\ln \epsilon}$$

donde $\mu(s)$ es la medida natural del sistema dinámico. Para $q = 1$, tomamos $d_1 = \lim_{q \rightarrow 1} d_q$.

En particular, si $q = 0$ obtenemos la dimensión de cajas

⁴ $\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$d_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} 1}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} = d_{\text{caj}}$$

Por otro lado, si todos los subconjuntos s_i tienen igual medida, también recuperamos la dimensión de cajas para cualquier índice q . En efecto, dado que el conjunto ω tiene medida uno, cada subconjunto tiene medida

$$\mu(s_i) = \frac{1}{N(\epsilon)}$$

por lo que

$$d_q \Big|_{\mu(s_i)=1/N} = \frac{1}{1-q} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln (N(\epsilon)^{(1-q)})}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} = d_{\text{caj}}$$

Esto es, la dimensión de las cajas —o más generalmente la dimensión de Hausdorff— da información sólo sobre la topología de un conjunto, mientras que la dimensión generalizada además provee información sobre la dinámica de un atractor ya que involucra la medida natural de un sistema dinámico. En general, no todos los puntos del espacio de las fases son igualmente importantes para un atractor, y es justamente sobre esa importancia relativa de lo que trata la medida natural.

En la sección 3.3 demostramos que la dimensión de correlación de la definición 2.11 aparece cuando $q = 2$

$$d_2 = d_{\text{cor}} \tag{2.14}$$

La última definición de dimensión de un atractor que interesa es cuando el índice q es la unidad. En este caso, tomando límite para $q \rightarrow 1$ en la definición (2.12) y resolviendo la indeterminación por regla de L'Hospital, obtenemos la *dimensión de información*

$$d_1 = \lim_{q \rightarrow 1} d_q = d_{\text{inf}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu(s_i) \ln (\mu(s_i))}{\ln \epsilon}$$

cuyo nombre se debe a la forma del numerador, que de alguna forma mide la entropía del sistema en el sentido de la teoría de la información (Ott, 2002).

Es posible demostrar que a medida que aumenta el índice q , las correspondientes dimensiones generalizadas son cada vez menores. Esto es,

$$d_{q_1} \leq d_{q_2} \quad \text{si} \quad q_1 > q_2$$

La igualdad vale —como ya hemos mencionado— cuando la medida $\mu(s_i)$ es la misma para todos los subconjuntos de la cobertura- ϵ . En particular, para las dimensiones discutidas, resulta

$$d_{\text{cor}} \leq d_{\text{inf}} \leq d_{\text{caj}} \quad (2.15)$$

2.5. Análisis de series temporales

Algunos sistemas dinámicos que analizamos en el resto del trabajo no tienen la forma ordinaria (2.1) sino que provienen de ecuaciones en derivadas parciales. Este tipo de sistemas tienen infinitos grados de libertad, por lo que el espacio de las fases asociado tiene también infinitas dimensiones. De todas maneras, suele suceder que debido al carácter disipativo, en algunos sistemas sucede que el flujo se mantiene o bien dentro de un subespacio de dimensión finita o bien en un subespacio de dimensión infinita pero mucho menor que el espacio original de las fases donde podemos aplicar las ideas desarrolladas hasta el momento.

Consideremos el problema de analizar una serie temporal $x(t)$ de un observable que podría representar la evolución temporal de alguna combinación de las componentes del vector de estado de un sistema dinámico no lineal de dimensión no necesariamente finita. Esta serie temporal podría provenir de la medición de alguna variable en un experimento o del valor que toma alguna variable en un punto dado del espacio integrada numéricamente en el tiempo. Existen algunas técnicas para extraer información de la señal escalar y analizar el sistema dinámico asociado, aunque la calidad de los resultados obtenidos tienen más que ver con el conocimiento que tenga el analista y el fine-tuning que pueda hacer de ciertos parámetros más que con la precisión o complejidad de las herramientas de análisis no-lineal. En particular, el análisis que queremos realizar se reduce a obtener a partir de una sola variable escalar $x(t)$, un flujo en un espacio de fases multidimensional $y(t) \in \mathbb{R}^d$ que sea topológicamente equivalente al original para poder calcular alguna dimensión generalizada.

En general, el análisis de series temporales experimentales suele ser precedido por una etapa de separación de la señal útil del ruido inherente a la forma de adquirir los datos. Como en este trabajo queremos reconstruir espacios de fases que provienen de la integración numérica de ecuaciones en derivadas parciales suponemos que la señal $x(t)$ no contiene ninguna clase de ruido experimental y contiene sólo información sobre el sistema dinámico que representa. Si bien todavía puede existir la posibilidad de que los métodos aproximados de integración numérica distorsionen la información, suponemos que esta distorsión puede ser bien caracterizada e incluso reducida. Por otro lado, el objetivo

general de los análisis de estabilidad que proponemos en este trabajo es estudiar la topología general del problema y no el comportamiento particular de cada sistema individual. En este sentido, prestamos especial atención a los esquemas numéricos utilizados y en todos los casos nos aseguramos de que la integración numérica guarde cierta relación general con el comportamiento esperado del sistema para el rango de parámetros estudiados.

2.5.1. Embedding

La idea básica detrás de la reconstrucción del flujo en el espacio de las fases a partir de una serie temporal se basa en el hecho de que la variable observada $x(t + \Delta t)$ es alguna combinación —no lineal— de las componentes del vector $\mathbf{x}(t)$ y de su campo de derivadas. Packard et al. (1980) proponen construir un vector de dimensión d a partir de la serie temporal $x(t)$

$$\mathbf{y}(t) = [x(t) \quad x(t - \Delta t) \quad x(t - 2\Delta t) \quad \dots \quad x(t - [d - 1]\Delta t)]^T \quad (2.16)$$

En forma equivalente, si disponemos sólo de M puntos discretos tomados en sucesivos instantes de muestreo $t = ih$ tales que

$$x_i = x(ih)$$

entonces el vector reconstruido es

$$\mathbf{y}(t) = [x_i \quad x_{i-T} \quad x_{i-2T} \quad \dots \quad x_{i-[d-1]T}]^\dagger \quad (2.17)$$

Este proceso de reconstrucción se denomina *embedding*. Si la dimensión d es lo suficientemente grande, entonces existirá una correspondencia biunívoca entre el vector original $\mathbf{x}(t)$ y el vector reconstruido $\mathbf{y}(t)$. En general no sabemos que relación explícita existe entre \mathbf{x} e \mathbf{y} , pero sí sabemos que debe ser un cambio de variables continuo. Este tipo de mapeos preservan las propiedades topológicas del flujo original, en particular las dimensiones generalizadas (Arbanel, 1993).

Al mirar la forma de los vectores reconstruidos (2.16) y (2.17) surgen claramente dos preguntas. ¿Cómo elegir tanto el delay Δt como la dimensión d ? Existen argumentos que sugieren que en realidad el flujo obtenido es topológicamente equivalente al original independientemente del delay Δt utilizado en la reconstrucción, siempre que la dimensión d sea al menos el doble de la dimensión d_A del atractor original, que puede ser no entera.

La idea del embedding es, por un lado, lograr una correspondencia biunívoca entre puntos del espacio de las fases original y el reconstruido. Pero por otro lado, queremos obtener un nuevo sistema cuyas propiedades dinámicas

se parezcan tanto como se pueda al sistema original. Si la dimensión de embedding d es muy pequeña, entonces habrá ambigüedades en la reconstrucción del flujo y un mismo punto del espacio reconstruido será imagen de más de un punto del espacio original, haciendo que el flujo reconstruido se corte a sí mismo. Estrictamente, es posible lograr un desdoblamiento sin ambigüedades al utilizar una dimensión de embedding $d > 2d_A$. Sin embargo, hay situaciones en las que no es necesario duplicar la dimensión del atractor para eliminar las ambigüedades. Existen técnicas para decidir cuál es la menor dimensión d necesaria para lograr una reconstrucción satisfactoria (Arbarbanel, 1993), pero en este trabajo o bien elegimos la dimensión de embedding mediante algún razonamiento físico o bien utilizaremos algún procedimiento artesanal e iterativo hasta que logremos eliminar todas las ambigüedades, que se traducen en flujos reconstruidos que se intersecan a sí mismos.

Con respecto a la elección del delay Δt , si bien por un lado algunos autores aseguran que cualquier valor es aceptable, los resultados con respecto a la segunda de las ideas del embedding discutida en el párrafo anterior dependen sensiblemente de delay utilizado, aunque no está muy claro en qué forma. El razonamiento es el siguiente. Si el delay es muy pequeño, entonces las coordenadas del vector reconstruido y serán muy parecidas y la reconstrucción no aportará mucha información. Por otro lado, si el delay es muy grande las coordenadas estarán totalmente descorrelacionadas —debido a la separación exponencial de condiciones iniciales cercanas— y el flujo se parecerá más a un random walk que a la órbita de un sistema dinámico determinístico.

Un criterio basado en resultados de la teoría de la información propone utilizar el delay Δt que haga que la función de información mutua promedio entre las observaciones x_i y x_{i+T}

$$I(T) = \sum_{i=1}^M P(x_i, x_{i+T}) \log_2 \left[\frac{P(x_i, x_{i+T})}{P(x_i) \cdot P(x_{i+T})} \right] \quad (2.18)$$

tenga un mínimo local, donde $P(a)$ es la probabilidad de obtener a en una medición del conjunto A , y $P(A, B)$ es la probabilidad condicional de obtener A dado que se obtuvo B .

Otro criterio busca elegir el delay Δt de forma tal que, en promedio, las coordenadas del vector y sean linealmente independientes. De esta manera nos aseguramos —al menos en forma lineal— que el delay no sea tan pequeño como para que las coordenadas estén totalmente correlacionadas ni tan grande como para que no guarden relación alguna entre ellas. La función de autocorrelación lineal como función del delay T

$$C(T) = \frac{\sum_{i=1}^M (x_{i+T} - \bar{x})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.19)$$

da una idea sobre qué tan correlacionadas resultan —sólo en promedio y linealmente— las coordenadas elegidas. Una buena elección para T es el menor valor que hace que o bien $C(T)$ se anule o bien $C(T) = \alpha$, para alguna elección de α razonable. El cálculo de la función (2.19) es bastante directo y la búsqueda de su primer cero arroja resultados similares a la minimización de la información mutua (2.18), por lo que utilizamos la función de autocorrelación lineal $C(T)$ como primera aproximación a la elección del delay Δt .

2.6. Control de sistemas dinámicos

Muchos sistemas —especialmente aquellos de interés para la ingeniería— tienen parámetros que son susceptibles de ser modificados externamente con el objetivo de lograr que dicho sistema se comporte de una determinada manera. En general buscamos estabilizar un punto fijo que es inestable sin lazo de control. Para simplificar la notación, supongamos que el origen de coordenadas del vector de estado \mathbf{x} es un punto fijo inestable que queremos estabilizar. Si no fuese el origen el punto fijo de interés, siempre podemos encontrar un cambio de variables adecuado que anule el punto fijo a estabilizar.

Consideremos un sistema dinámico cuyo campo de derivadas dependa tanto del vector de estado \mathbf{x} como de un vector de control \mathbf{u}

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.20)$$

En general, la acción de control \mathbf{u} es alguna función $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ del vector de estado, por lo que la dinámica del sistema controlado queda determinada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$$

En particular, si el sistema es lineal entonces la función $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ de la ecuación (2.20) es el producto de una matriz \mathbf{C} por el vector $[\mathbf{x} \ \mathbf{u}]^T$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

Particionando la matriz \mathbf{C} en submatrices de tamaño apropiado, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}\mathbf{x} + C_{12}\mathbf{u} \\ C_{21}\mathbf{x} + C_{22}\mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

con lo que llegamos a la forma canónica de los sistemas dinámicos lineales con acción de control externa

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.21)$$

Proponiendo también una señal de control lineal

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$$

obtenemos el sistema dinámico a lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{x}$$

donde el objetivo del control lineal es diseñar la matriz de ganancias \mathbf{K} de forma tal de hacer que los autovalores de la matriz de lazo cerrado $[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}]$ sean los correctos para lograr estabilidad lineal discutida en el teorema 2.3

2.6.1. Teoría clásica de control lineal

Dado el esquema de bloques mostrado en la figura 2.6, si la planta es lineal e invariante en el tiempo, entonces se puede demostrar (Dorf, 2001) que para una excitación $u(t)$ aplicada a partir de $t = 0$, la salida $y(t)$ de la planta es el producto de convolución

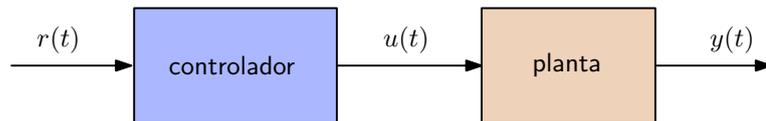


Figura 2.6: Esquema de control clásico a lazo abierto

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(t) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (2.22)$$

donde $g(t)$ es una función lineal llamada respuesta impulsiva, que se calcula a partir de las ecuaciones diferenciales con las que se modela la planta. La propiedad de la transformada de Laplace de convertir productos de convolución en productos usuales induce a transformar ambos miembros de la ecuación (2.22) para obtener

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

Llamamos a la función compleja $G(s) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ definida como el cociente entre las transformadas de Laplace de la salida y de la entrada para condiciones iniciales nulas, *función de transferencia* de la planta. De la misma manera, la función de transferencia asociada al controlador es $K(s)$, y el cociente entre la salida $Y(s)$ y la referencia $R(s)$ es el producto $K(s) \cdot G(s)$. En el esquema a lazo cerrado de la figura 2.7, la función de transferencia del loop completo es

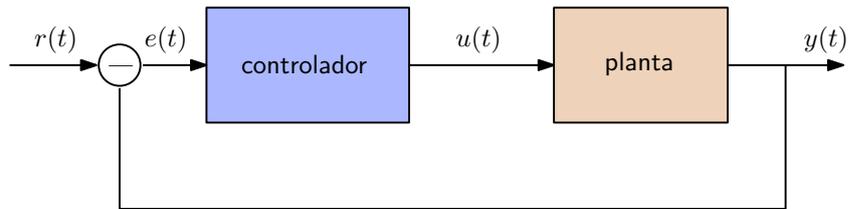


Figura 2.7: Esquema de control clásico a lazo cerrado

$$G_d(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Se puede demostrar (Dorf, 2001) que si una planta de función de transferencia $G(s)$ es excitada con una señal $r(t)$ senoidal de amplitud unitaria y frecuencia ω , la salida de la planta $y(t)$ a lazo abierto es también una oscilación senoidal de amplitud igual a $|G(i\omega)|$ desplazada temporalmente en una fase igual al argumento de $G(i\omega)$ con respecto a la excitación original.

Si las ecuaciones diferenciales que modelan la planta —o el controlador— son lineales de coeficientes constantes, entonces la función de transferencia resultante es un cociente de polinomios complejos. La estabilidad de la planta se asegura cuando todos los polos —equivalentemente los ceros del denominador— de la función de transferencia están estrictamente en el semiplano izquierdo del plano complejo en el espacio de Laplace, que corresponde a una dependencia temporal del error $e(t)$ que converge exponencialmente a cero.

! Este concepto de estabilidad es diferente a la idea de estabilidad en el sentido de Lyapunov de la definición 2.3, ya que se trata de estudiar el comportamiento de la planta frente a perturbaciones en los parámetros de control y no en el vector de estado. En este sentido, hablamos de estabilidad Bounded Input-Bounded Output.

Definición 2.13 (Estabilidad BIBO) Un sistema es BIBO-estable si para toda excitación finita, el vector de estado se mantiene acotado para todo tiempo.

La determinación de estabilidad BIBO en sistemas lineales de coeficientes constantes se reduce a estudiar la ubicación de los ceros de un polinomio en el

plano complejo. En particular, para el sistema de la figura 2.7 queremos estudiar la ubicación de los ceros del denominador de la función de transferencia a lazo cerrado

$$D(s) = 1 + K(s)G(s)$$

Utilizando teoría de análisis complejo es posible mostrar que dada una curva cerrada $\Gamma(s)$ en el plano complejo, la curva que resulta de la transformación

$$\gamma(s) = F(\Gamma(s))$$

encierra al origen en sentido antihorario una cantidad de veces que es igual a la diferencia entre la cantidad de ceros y de polos —con su multiplicidad— que tiene la función $F(s)$ en el interior de $\Gamma(s)$, resultado que se conoce como principio del argumento (Franklin et al., 1994). Nyquist propuso entonces una forma de calcular la estabilidad de un sistema a lazo cerrado, tomando como función de prueba $F(s) = 1 + K(s)G(s)$ y como contorno $\Gamma(s)$ un semicírculo de radio $R \rightarrow \infty$ que encierre al semiplano derecho del plano complejo, tomando como diámetro principal el eje imaginario (figura 2.8). Luego el lazo de control es estable si el mapeo obtenido encierra al origen una cantidad de veces igual al número de polos de $1 + K(s)G(s)$ en el semiplano derecho. En forma equivalente, podemos tomar como función de prueba $K(s)G(s)$ y estudiar lo que sucede alrededor del punto -1 .

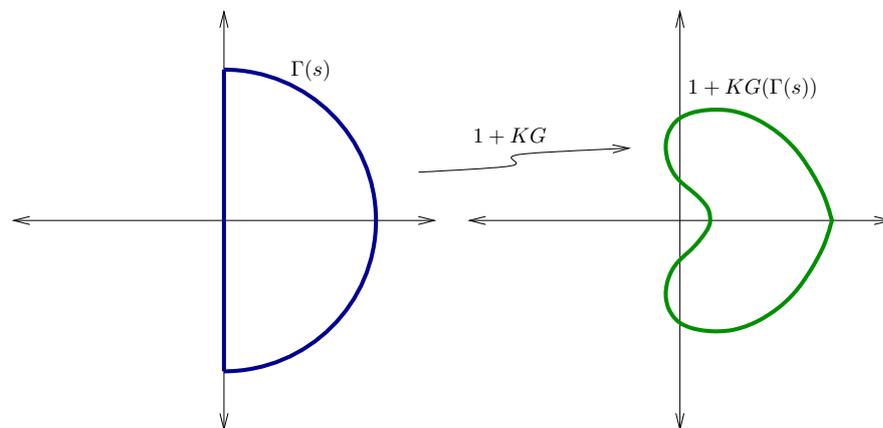


Figura 2.8: Construcción de Nyquist para determinar la estabilidad del lazo de control. Si $1 + KG$ no tiene polos en el semiplano derecho, entonces el sistema ilustrado es estable.

! El principio del argumento funciona sólo si la función $F(s)$ no tiene polos o ceros exactamente sobre la curva $\Gamma(s)$. Es por eso que si $1 + K(s)G(s)$ tiene alguna singularidad en el eje imaginario, el camino de Nyquist debe modificarse tomando semicircunferencias de radio $r \rightarrow 0$ que pasen alrededor del punto singular.

2.6.2. Sistemas difusos de Takagi-Sugeno

Los sistemas que consideramos a continuación fueron introducidos por Takagi y Sugeno (1985) como una herramienta para diseñar sistemas de control no lineales. En particular, son especialmente útiles para atacar el problema del control de sistemas caóticos (Tanaka y Wang, 2001; Tanaka et al., 1998). Una discusión más extensa y aplicaciones directas pueden encontrarse en el Proyecto Integrador que precede a esta tesis (Theler, 2007, capítulos 6 y 7). En el apéndice B describimos el software MELON que es una implementación computacional de un controlador basado en lógica difusa.

Un sistema de Takagi-Sugeno provee una función $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ que resulta ser la inferencia difusa de las r reglas

$$\text{IF } \tilde{x}_1 \text{ IS } M_{i_1} \text{ AND } \cdots \text{ AND } \tilde{x}_n \text{ IS } M_{i_n} \text{ THEN } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}$$

donde \mathbf{A}_i es una matriz de $n \times m$ operando sobre \mathbf{x} , \tilde{x}_j son variables lingüísticas asignadas a las componentes del vector \mathbf{x} y M_{ij} son conjuntos difusos. La inferencia difusa se puede calcular (Theler, 2007) como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x})} \quad (2.23)$$

donde $w_i(\mathbf{x})$ son las intensidades de disparo calculadas como el producto de las funciones de membresía $\mu_{i_j}(x_j)$ de los conjuntos difusos asociados

$$w_i(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \mu_{i_j}(x_j)$$

Teorema 2.7 *Dada una función homogénea $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ con derivadas segundas continuas y acotadas definida en un subespacio $U \subset \mathbb{R}^n$, existe al menos un sistema difuso de Takagi-Sugeno que provee una función $\mathbf{F}_{TS}(\mathbf{x})$ tal que*

$$\max \left| \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_{TS}(\mathbf{x}) \right| < \epsilon \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

para un $\epsilon > 0$ arbitrario.

! El teorema 2.7 —bautizado como el teorema de la aproximación universal (Ying, 1998)— nada dice sobre la cantidad de reglas y matrices necesarias para lograr la precisión ϵ deseada, cantidad que puede llegar a ser arbitrariamente grande.

Definición 2.14 Llamamos sistema dinámico de Takagi-Sugeno a aquel cuya derivada temporal puede escribirse como un sistema difuso funcional de la forma

$$\text{IF } \tilde{x}_1 \text{ IS } M_{i_1} \text{ AND } \dots \text{ AND } \tilde{x}_n \text{ IS } M_{i_n} \text{ THEN } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}$$

a veces llamado también modelo difuso de Takagi-Sugeno. Cada uno de los sistemas $\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}$ se llama subsistema.

La estrategia de control de un sistema dinámico arbitrario de la forma (2.20)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

es encontrar un modelo difuso de Takagi-Sugeno para la función $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y diseñar matrices de ganancia \mathbf{K}_i tales que cada una de ellas estabilice cada uno de los subsistemas del modelo difuso de Takagi-Sugeno. Esto es, dado el modelo difuso T-S de una planta continua

$$\text{IF } \tilde{x}_1 \text{ IS } M_{i_1} \text{ AND } \dots \text{ AND } \tilde{x}_n \text{ IS } M_{i_n} \text{ THEN } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}$$

la acción de control global $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ es la inferencia del sistema difuso de T-S

$$\text{IF } \tilde{x}_1 \text{ IS } M_{i_1} \text{ AND } \dots \text{ AND } \tilde{x}_n \text{ IS } M_{i_n} \text{ THEN } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_i \mathbf{x}$$

donde las matrices \mathbf{K}_i son tales que estabilizan el i -ésimo subsistema. Este tipo de control se denomina compensación distribuida en paralelo (Wang et al., 1995).

! El hecho de que las matrices a lazo cerrado estabilicen cada uno de los subsistemas es condición necesaria pero no suficiente para la estabilidad global del punto fijo estabilizado. Existen casos patológicos que presentan este comportamiento. De todas maneras es posible dar una condición suficiente para la estabilidad global utilizando desigualdades de matrices (Tanaka y Wang, 2001) que se reducen a demostrar la existencia de una función de Lyapunov cuadrática en las componentes de \mathbf{x} . Este acercamiento al problema excede en mucho los alcances de este trabajo, en el que nos centramos en el análisis no lineal de inestabilidades y sólo utilizamos parcialmente los resultados del control no lineal en ciertos sistemas. En las aplicaciones no demostramos rigurosamente estabilidad global sino que mostramos resultados estables que, sin control, serían inestables.

Análisis no lineal de inestabilidades

Round up the usual suspects.
Cap. Louis Renault, Casablanca, 1942

El tema central de este trabajo es el análisis *no lineal* de inestabilidades, haciendo especial énfasis en el hecho de que no linealizamos los sistemas dinámicos complejos que queremos analizar. Como estos sistemas son altamente no lineales, no es posible aplicar herramientas lineales de análisis de estabilidad tales como el criterio de estabilidad de Nyquist u otras técnicas de análisis en frecuencia. Es por eso que debemos desarrollar herramientas no lineales de análisis que se adapten a los problemas particulares de interés para este trabajo.

La estabilidad que nos interesa estudiar es aquella relacionada con el comportamiento asintótico del sistema y su respuesta a perturbaciones no necesariamente pequeñas. Esto es, queremos construir mapas de estabilidad en el espacio de los parámetros de un problema para decidir si un punto de diseño es estable o no —sea en el sentido de Lyapunov o en el sentido de estabilidad BIBO— con el objetivo de disponer de información a partir de la cual diseñar la ingeniería conceptual de un reactor nuclear inherentemente seguro.

Al no realizar ninguna linealización, debemos realizar el análisis completamente en forma numérica. Para ello, integramos numéricamente las ecuaciones no lineales de un sistema para una combinación de parámetros dada y obtenemos entonces alguna evolución en función del tiempo, que puede ser una aproximación asintótica al punto de diseño —punto fijo estable—, una oscilación periódica —ciclo límite estable— o una evolución caótica. Como discutimos en la introducción, un observador humano podría entonces, mirando la serie temporal resultante, distinguir fácilmente si la combinación de parámetros es estable o no. Sin embargo, queremos construir mapas de estabilidad de forma sistemática y automática, por lo que debemos desarrollar técnicas

de análisis que puedan ser implementadas computacionalmente sin depender explícitamente de un experto humano.

En este capítulo utilizamos las herramientas de análisis de dimensión de conjuntos límite omega introducidas en el capítulo 2 y desarrollamos técnicas numéricas de análisis de estabilidad. Para estudiar cómo dependen los resultados de los diferentes parámetros numéricos —tales como método y paso de integración, cantidad de puntos, etc.— aplicamos estas herramientas al conocido sistema de Lorenz y construimos un mapa de estabilidad de este sistema sencillo para ilustrar los objetivos del análisis de sistemas más complejos, que forman la base de este trabajo.

3.1. El sistema de Lorenz

Edward Lorenz escribió en 1963 uno de los trabajos más citados en la literatura científica sobre dinámica no lineal, donde introdujo —y analizó— su famoso sistema dinámico adimensional

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ -y - xz + rx \\ xy - bz \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

con el cual ilustramos el procedimiento de análisis no lineal de inestabilidades que proponemos en este trabajo. Este sistema apareció originalmente como una simplificación del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias provenientes del análisis armónico de Fourier de un problema de convección natural en escalas atmosféricas. En este marco, el parámetro σ corresponde a propiedades termofísicas del fluido en estudio, el parámetro b depende de la escala geométrica del problema y el número r es proporcional al número de Rayleigh¹. Es por esto que tradicionalmente se fijan los parámetros σ y b y se toma a r como parámetro de control, ya que es el único parámetro susceptible de ser variado en condiciones experimentales.

La traza del jacobiano del sistema (3.1) es idénticamente

$$\text{traza}(J) = -\sigma - b - 1 < 0$$

para parámetros positivos, por lo que el sistema de Lorenz es un sistema disipativo. Además, todas las órbitas son acotadas —en el sentido de que siempre es posible encontrar un volumen finito que contenga a todos los puntos de la órbita— para cualquier condición inicial y familia de parámetros. Luego, si para alguna combinación de parámetros no existen puntos fijos ni ciclos límites

¹En el capítulo 4 deducimos el sistema de Lorenz a partir del análisis de Fourier de un problema de convección natural particular.

estables, el sistema debe poseer al menos un límite omega de dimensión fractal mayor que dos y menor que tres.

El análisis detallado de la existencia y estabilidad de variedades invariantes puede encontrarse extensamente en la literatura sobre sistemas dinámicos (Mikhailov y Loskutov, 1996; Alligood et al., 1997; Ott, 2002). En forma sintética (figura 3.1), para $r < 1$ el sistema tiene como único punto fijo el origen que resulta ser global y asintóticamente estable. En $r = 1$ existe una bifurcación tipo *pitchfork* en la cual el origen pierde su estabilidad y se crean dos puntos fijos estables, $x_{1,2}^* = [\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1]$. En el punto

$$r = r^\dagger = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (3.2)$$

se produce una bifurcación de Hopf subcrítica donde los puntos $x_{1,2}^*$ pierden su estabilidad, se transforman en puntos fijos inestables y se crean además dos ciclos límites inestables que colisionan para un valor menor de $r = r_{\text{hom}}$. En este punto se crea una órbita homoclínica cuyo estudio todavía continúa abierto (Mikhailov y Loskutov, 1996).

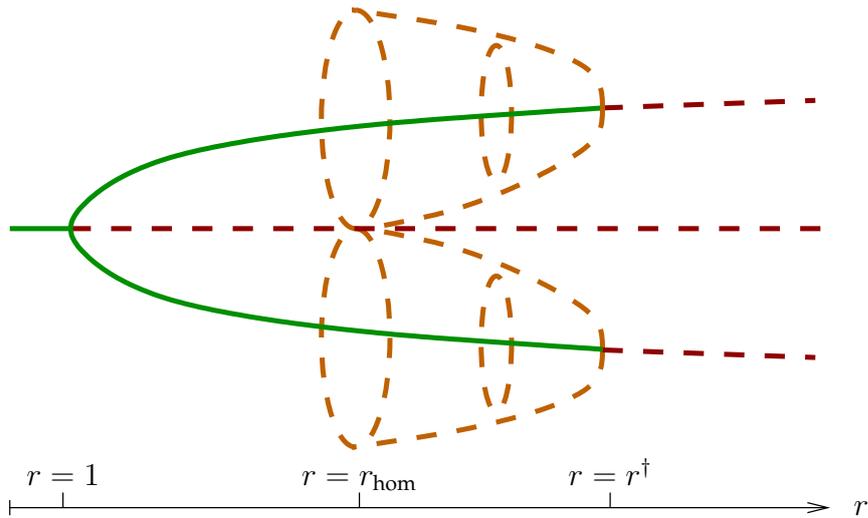


Figura 3.1: Diagrama de bifurcaciones del sistema de Lorenz en función del parámetro de control r

En virtud de la discusión sobre sistemas disipativos y la no existencia de ciclos límites estables en un entorno del punto r^\dagger , es de esperar que exista un límite omega fractal de dimensión no entera para $r > r^\dagger$. En efecto, para los parámetros propuestos originalmente por Lorenz en 1963

$$\begin{aligned} \sigma &= 10 \\ b &= 8/3 \\ r &= 28 \end{aligned}$$

que se han transformado en los nominales del sistema², obtenemos numéricamente, a partir de una condición inicial arbitraria y descartando un transitorio inicial, el conjunto límite ω mostrado en la figura 3.2.

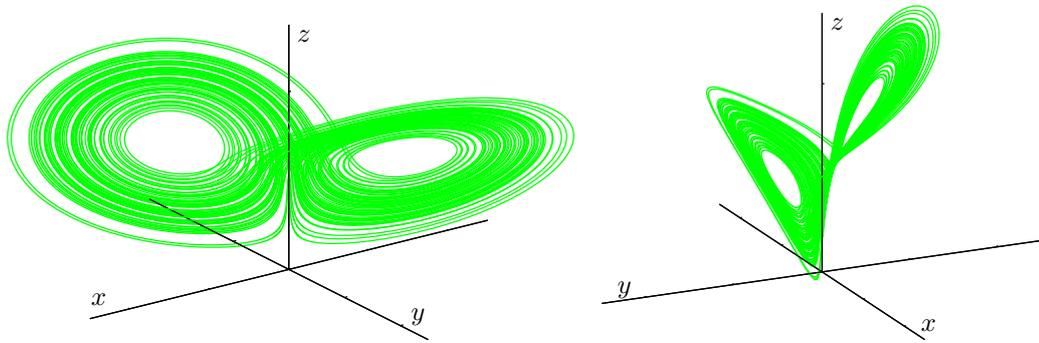


Figura 3.2: Conjunto límite ω del atractor de Lorenz para los parámetros nominales

Es conocido —pero menos claro, ya que no se pueden usar herramientas de análisis lineal de estabilidad— el resultado de que para valores mayores de r aparece un ciclo límite estable. Aumentando aún más r , el ciclo límite pierde su estabilidad y vuelve a aparecer un atractor extraño, y así se suceden intervalos de r para los cuales el límite omega del sistema es un atractor extraño e intervalos en los que existen ciclos límites estables (Shimada y Nagashima, 1979). Si resolviéramos numéricamente todos los casos y graficáramos las órbitas en el espacio de las fases, podríamos determinar fácilmente para cada valor de r si se trata de un ciclo límite o de un comportamiento caótico (figura 3.3). Sin embargo, sería muy engorroso analizar visualmente cada combinación de parámetros para caracterizar el espacio de los parámetros de modo tal de clasificarlo en punto fijo, ciclo límite o atractor extraño.

Dado que estos tres tipos de atractores tienen dimensiones de Hausdorff esencialmente diferentes —los puntos fijos tiene dimensión cero, los ciclos límite dimensión uno y los atractores extraños dimensión mayor que dos— es posible clasificar el comportamiento del sistema para una combinación de parámetros analizando su dimensión fractal. A continuación desarrollamos un algoritmo para estimar eficientemente la dimensión de un conjunto límite omega proveniente de la integración numérica del sistema de Lorenz.

3.2. Dimensión de caja

Como ya hemos discutido, dado un sistema dinámico de orden n

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

²Para estos parámetros, resulta $r^\dagger = 470/19 \approx 24,736 \dots$

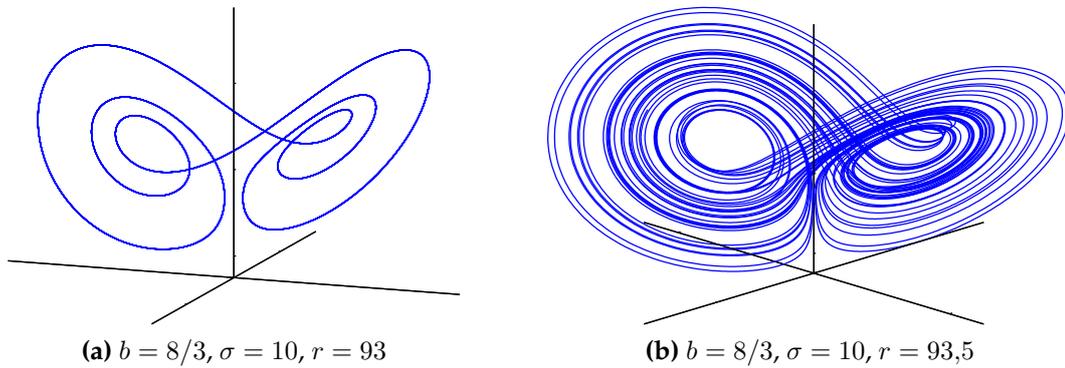


Figura 3.3: Cambio de la característica del límite omega del sistema de Lorenz con el parámetro r . Para $r = 93$ existe un ciclo límite estable mientras que para $r = 93,5$ hay un atractor extraño.

en general no es posible encontrar explícitamente la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ como alguna combinación de funciones analíticas. Sin embargo, siempre es posible integrar numéricamente las funciones $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ y encontrar sucesivos puntos \mathbf{x}_i tales que la diferencia entre la solución real y los puntos de la sucesión sea arbitrariamente pequeña, dependiendo de los métodos numéricos y la precisión de la implementación computacional utilizada. De hecho es ésta la idea básica de la demostración de la unicidad de las soluciones para $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in C^2$.

En particular, si el sistema dinámico (3.3) tiene un límite omega $\omega(\mathbf{x}_0)$ para la condición inicial \mathbf{x}_0 utilizada para la integración numérica, podemos suponer también que los elementos de la sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ están arbitrariamente cerca de ω para k mayores que algún entero L suficientemente grande. Consideremos que el conjunto de puntos

$$\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^M = \mathbf{x}(Lh + ih)$$

proveniente de la resolución numérica de un sistema dinámico con paso de integración constante $\Delta t = h$ pertenece al conjunto $\omega(\mathbf{x}_0)$.

Según la definición 2.10, para calcular la dimensión de cajas de un conjunto deberíamos encontrar un cubrimiento- ϵ y tomar el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (3.4)$$

La pregunta que surge es cómo resolver este límite numéricamente. Prestemos atención a la relación (2.11) propuesta por Mandelbrot a partir de la dimensión de Hausdorff y supongamos que elegimos cubos³ de lado ϵ para realizar la cobertura. Si vale

³¡cajas!

$$N(\epsilon) = \kappa \epsilon^{-d}$$

entonces debe haber una relación lineal entre el logaritmo de la mínima cantidad de cajas necesarias para cubrir completamente el atractor y ϵ

$$\ln N(\epsilon) = -d \ln \epsilon + \ln \kappa \quad (3.5)$$

! En realidad la variable ϵ que aparece en la definición 2.10 es el diámetro de los subconjuntos s_i usados para cubrir el conjunto S , que en el caso de cubos de lado $\hat{\epsilon}$ es $\epsilon = \text{diám}(s_i) = \sqrt{3}\hat{\epsilon}$ y en general $\epsilon = \sqrt{n}\hat{\epsilon}$. Sin embargo, mientras haya una relación lineal entre la distancia característica y el diámetro de los subconjuntos s_i , vale la relación (3.5) redefiniendo convenientemente la constante κ .

Vamos a mostrar que la pendiente d de la relación (3.5) es efectivamente la dimensión de las cajas. Sea la variable $\xi = \ln \epsilon$. Entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \epsilon = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \xi$$

y según la definición 2.10, la dimensión de cajas d_{caj} es

$$d_{\text{caj}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

Reemplazando la ecuación (3.5) e introduciendo la variable ξ

$$d_{\text{caj}} = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{d \cdot \xi - \ln \kappa}{\xi} = d$$

Luego, la dimensión de cajas es en efecto el valor absoluto de la pendiente de la relación (3.5).

El cálculo de la dimensión de cajas de un conjunto finito de M puntos discretos \mathbf{x}_i provenientes de la integración numérica de una órbita de un atractor tiene al menos tres inconvenientes fundamentales:

- i. al tener puntos discretos en lugar de un conjunto continuo, si el tamaño de las cajas es suficientemente pequeño —en particular podemos hacer que $\epsilon < \min(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ — cada caja cubrirá sólo a un punto (figura 3.4). El límite (3.4) predice que la dimensión del conjunto es cero, lo que efectivamente es cierto ya que corresponde a un conjunto de puntos aislados. Pero además, la relación (3.5) deja de ser lineal por lo que la determinación de la pendiente de $\ln N$ vs $\ln \epsilon$ no puede ser realizada en un rango de ϵ pequeños, donde sabemos que vale la ley de escaleo potencial (2.11) propuesta por Mandelbrot (figura 3.5).

- ii. Al disponer sólo de un conjunto finito de datos en lugar de un conjunto límite ω , el conjunto resultante es —a lo más— una curva simple. Es decir, si de alguna manera hemos solucionado el problema de que la definición de dimensión de caja no resulte igual a la dimensión de un punto, todavía tenemos que engañar a la definición 2.10 para que no devuelva la dimensión de una línea.
- iii. Para un atractor en un espacio de las fases n dimensional, la cantidad de cajas de las que hay que disponer aumenta como $(1/\epsilon)^n$. Esto significa finalmente que la cantidad de memoria necesaria para calcular $N(\epsilon)$ puede llegar a ser prohibitivamente grande para ϵ pequeños, especialmente para $n \geq 2$.

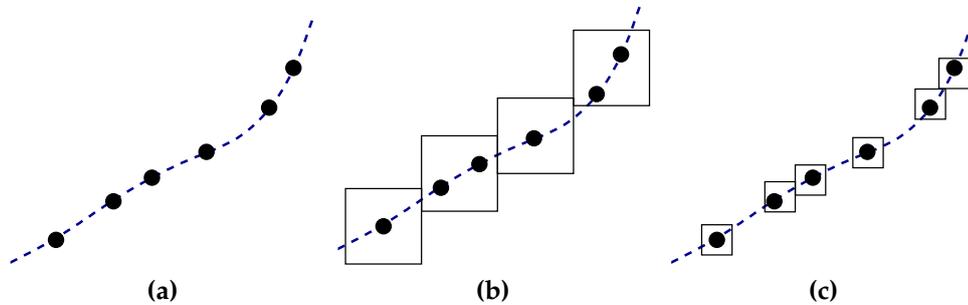


Figura 3.4: (a) Una órbita continua muestreada a intervalos regulares da un conjunto discreto de puntos. (b) Cubrimiento- ϵ con un tamaño de caja donde se satisface la relación lineal (3.5) (c) Si ϵ es lo suficientemente pequeño, no se satisface la relación (3.5).

3.3. Dimensión de correlación

Para calcular cualquier dimensión generalizada necesitamos conocer la medida natural $\mu(S)$ del sistema dinámico cuyo atractor estamos estudiando. Teniendo en cuenta que conocemos $\mathbf{x}(t)$ sólo en instantes discretos de tiempo y que sólo tenemos una cantidad finita M de puntos, la mejor aproximación de $\mu(S)$ definida en la ecuación (2.9) que podemos hacer es reemplazar $d\tau \approx h$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} t \approx M \cdot h$, obteniendo

$$\mu(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t/\mathbf{x}(t) \in S} d\tau}{t} \approx \frac{K(S)}{M} \quad (3.6)$$

donde $K(S)$ es la cantidad de puntos de la serie que pertenecen conjunto S .

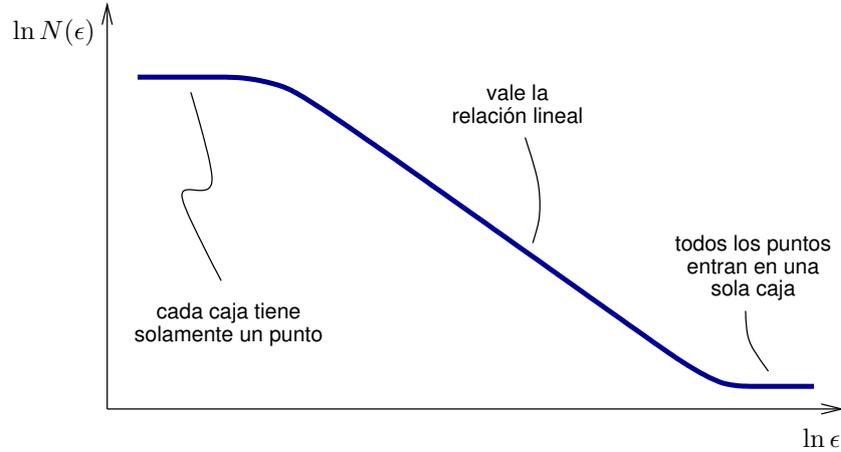


Figura 3.5: Dependencia de $\ln N(\epsilon)$ con $\ln \epsilon$ para un conjunto discreto de puntos. La relación lineal (3.5) vale sólo para un rango determinado de tamaños de cajas.

! Notar que para que esta aproximación sea válida, los puntos deben ser muestreados con un período constante. Esto es, el análisis de dimensión que proponemos no sirve el sistema dinámico es integrado con métodos numéricos de paso adaptivo.

Utilizando la ecuación (3.6) en la definición 2.12 y tomando $q = 2$ obtenemos la dimensión de correlación como

$$d_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \left[\frac{K(s_i)}{M} \right]^2 \right)}{\ln \epsilon} \quad (3.7)$$

Vamos a mostrar que esta dimensión coincide con la definición 2.11 original propuesta por Grassberger y Procaccia (1983) cuando $M \rightarrow \infty$. En efecto, como el subconjunto s_i tiene un diámetro igual a $\sqrt{n}\epsilon$, entonces los $K(s_i)$ puntos están a una distancia menor que $\sqrt{n}\epsilon$ entre sí, y forman $[K(s_i)]^2$ pares de puntos⁴. La suma que aparece en la integral de correlación de Grassberger y Procaccia (2.12) es justamente el número de pares de puntos que $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\}$ tales que $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < \epsilon$. Entonces

$$C(\sqrt{n}\epsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} [K(s_i)]^2$$

⁴El resultado no cambia si el par $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\}$ se considera o no. Más aún, el resultado es el mismo si se considera que $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\}$ y $\{\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i\}$ son el mismo par.

$$= \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{K(s_i)}{M} \right]^2 \quad (3.8)$$

En realidad $[K(s_i)]^2$ es la cantidad de pares de puntos que están en un mismo subconjunto s_i . Por un lado puede haber puntos que disten menos de $\sqrt{n\epsilon}$ y que se encuentren en subconjuntos diferentes, y por otro estamos interesados en calcular $C(\epsilon)$ y no $C(\sqrt{n\epsilon})$. Supongamos entonces que podemos escribir $C(\epsilon) = \eta(\epsilon)C(\sqrt{n\epsilon})$ para algún factor de corrección acotado $\eta(\epsilon)$ que tenga en cuenta estos dos efectos. Entonces, en la ecuación (2.13)

$$\begin{aligned} d_{\text{cor}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\eta(\epsilon)C(\sqrt{n\epsilon}))}{\ln \epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \eta(\epsilon)}{\ln \epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\sqrt{n\epsilon})}{\ln \epsilon} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como $\eta(\epsilon)$ está acotado, el primer límite tiende a cero. Reemplazando (3.8) en (3.9), se sigue que $d_2 = d_{\text{cor}}$, que es la ecuación (2.14).

3.3.1. Contando cajas

A principio de la década de mil novecientos ochenta los recursos computacionales disponibles permitieron el cálculo de la dimensión de límites omega de sistemas dinámicos y de mapeos⁵ de órdenes mayores que uno. Sin embargo, ningún trabajo muestra resultados obtenidos con el algoritmo del conteo de las cajas, sino que utilizan otras definiciones de dimensión fractal para estimar la dimensión de Hausdorff (Mori, 1980; Russell et al., 1980). En la figura 3.6 mostramos una curva de $\ln N(\epsilon)$ vs $\ln \epsilon$ para el sistema de Lorenz. El cálculo de estos puntos tomó unos diez minutos en un sistema moderno⁶ con cuatro procesadores y 8 Gb de memoria, y el resultado es que la dimensión de cajas del conjunto es $d_{\text{caj}} = 1,88$. Del teorema de Poincaré-Bendixon sabemos que debe ser $d_{\text{caj}} > 2$, por lo que incluso con una potencia computacional mucho⁷ mayor que la utilizada hace veinticinco años por Greenside et al. (1982), llegamos a la misma conclusión: el algoritmo de conteo de cajas es inviable para determinar la dimensión de atractores caóticos con $n \geq 2$.

⁵Si bien para que exista caos en sistemas dinámicos debemos tener $n \geq 3$, es posible encontrar caos en mapeos unidimensionales no invertibles tales como el célebre mapeo logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

⁶Si la ley de Moore continúa valiendo y —mejor aún— esta tesis sobrevive al paso de los años, esta nota al pie deberá aclarar que el adjetivo *moderno* debe tomarse en el sentido del año 2008.

⁷Realmente mucho.

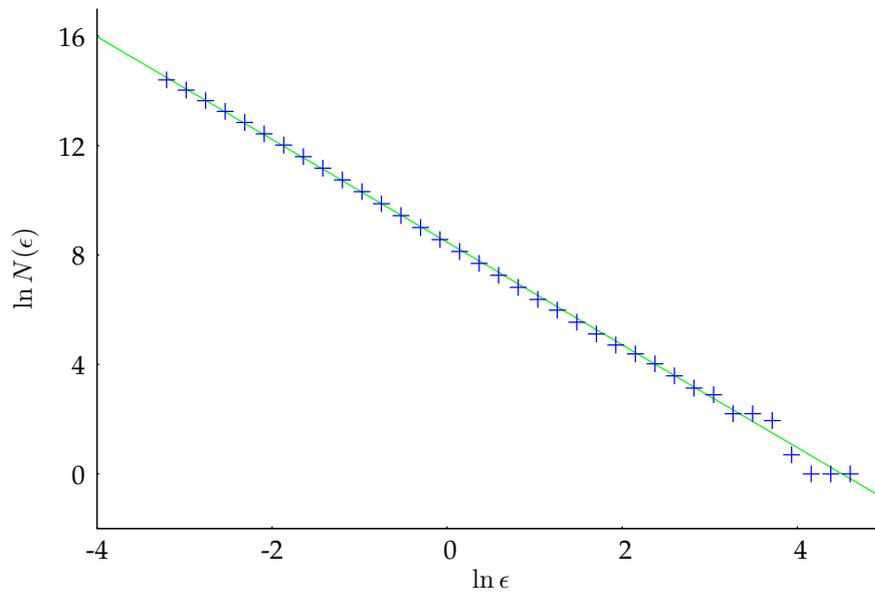


Figura 3.6: Dependencia de $\ln N(\epsilon)$ en función de $\ln \epsilon$ para el sistema de Lorenz con los parámetros nominales. La pendiente resulta $d = 1,88$.

Sin embargo, el algoritmo de contar cajas nos sirve para responder cualitativamente cómo varían los resultados —una dimensión menor que la real dimensión d de Hausdorff— con algunos parámetros numéricos.

Método de integración numérica. Si bien la cantidad de cajas $N(\epsilon)$ necesarias para cubrir el conjunto discreto de puntos no es exactamente la misma para los diferentes métodos numéricos, en general la dependencia de N con ϵ es la misma a todos los fines prácticos. En la figura 3.7 mostramos la relación $\ln N(\epsilon)$ vs $\ln \epsilon$ para el método de Runge-Kutta de cuarto orden⁸ y para el método de Gear implícito de segundo orden.

Paso de integración. Para h pequeños, dos puntos \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_{i+1} sucesivos van a estar muy cercanos, por lo que el límite de saturación de la figura 3.5 se corre a ϵ menores y aumenta la cantidad de puntos disponibles para realizar el ajuste lineal. Por otro lado, son necesarios más pasos de integración para obtener una representación del atractor que no tenga la topología de una curva simple. Sin embargo, los puntos sucesivos de una órbita no son los que dan información sobre la dimensión de un conjunto atractor sino que son los puntos que están cercanos en el espacio pero no en el tiempo (Arbarbanel, 1993). Es decir, lo que interesa es contar cuantas veces es

⁸En realidad utilizamos el método de Runge-Kutta-Fehlberg de orden 4-5 con paso fijo, implementado por el solver `gsl_odeiv_step_rkf45` de la biblioteca numérica GNU Scientific Library.

visitado recurrentemente un dado lugar en el espacio de las fases, por lo que el paso de integración no influye significativamente en el cálculo de la dimensión.

Cantidad de puntos. Mientras más puntos M contenga el conjunto, menos se parecerá el conjunto a una curva simple —que tiene dimensión uno— y más se parecerá a un atractor extraño. Es de esperar entonces que la dimensión de cajas numérica aumente con M hasta llegar asintóticamente a un valor límite. Efectivamente, en la figura 3.8 mostramos la dimensión de cajas calculada para diferentes valores de M , donde vemos que el incremento relativo de d_{caj} con M es cada vez menor. En todos los casos, el algoritmo arroja una dimensión menor que dos.

3.3.2. Midiendo distancias

Grassberger y Procaccia introdujeron en 1983 la idea de la dimensión de correlación en un escueto trabajo —las cuatro páginas que debe tener un letter al Physical Review— donde propusieron la dimensión de información, demostraron la desigualdad (2.15)

$$d_{\text{cor}} \leq d_{\text{inf}} \leq d_{\text{caj}}$$

y calcularon numéricamente la dimensión de correlación de varios atractores extraños —incluido el sistema de Lorenz— como la pendiente del logaritmo de la integral de correlación en función del logaritmo de ϵ en el rango donde ellos consideraron se cumplía una relación lineal análoga a la ecuación (3.5), obteniendo $d_{\text{cor}} = 2,05 \pm 0,01$ para los parámetros $\sigma = 16$, $b = 4$ y $r = 40$ propuestos por Shimada y Nagashima (1979). La dimensión de Hausdorff calculada por Mori (1980) utilizando exponentes de Lyapunov calculados en este último trabajo es $d = 2,06$. Estas dimensiones coinciden dentro de la incerteza reportada, que corresponde a una “estimación educada” según palabras textuales de Grassberger y Procaccia.

Definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\epsilon) &= \ln N(\epsilon) \\ \tilde{H}(\epsilon) &= \ln \left(\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu(s_i) \ln(\mu(s_i)) \right) \\ \tilde{C}(\epsilon) &= \ln \left(\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} [\mu(s_i)]^2 \right) \end{aligned}$$

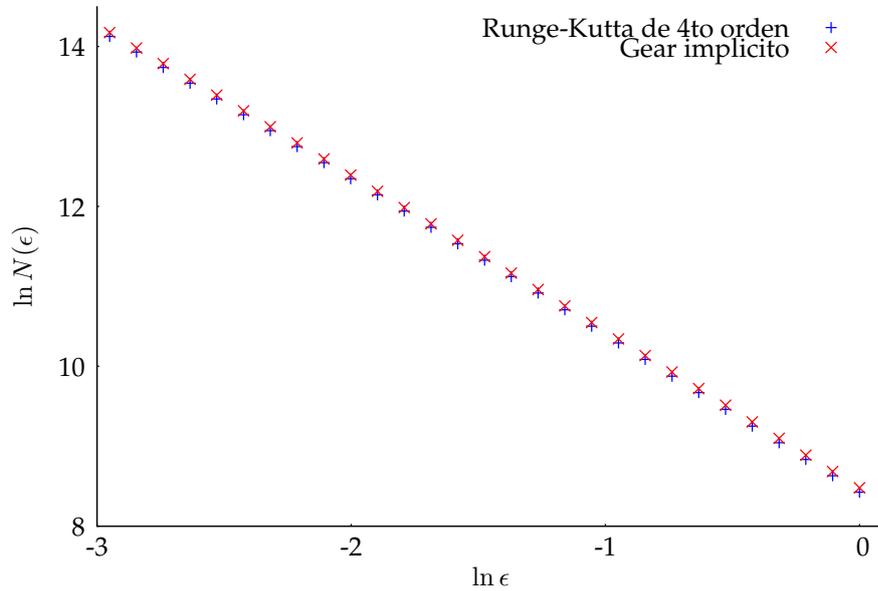


Figura 3.7: Aunque la cantidad de cajas necesarias para realizar el cubrimiento- ϵ del atractor depende del método de integración utilizado, su dependencia con $N(\epsilon)$ es la misma a todos los fines prácticos.

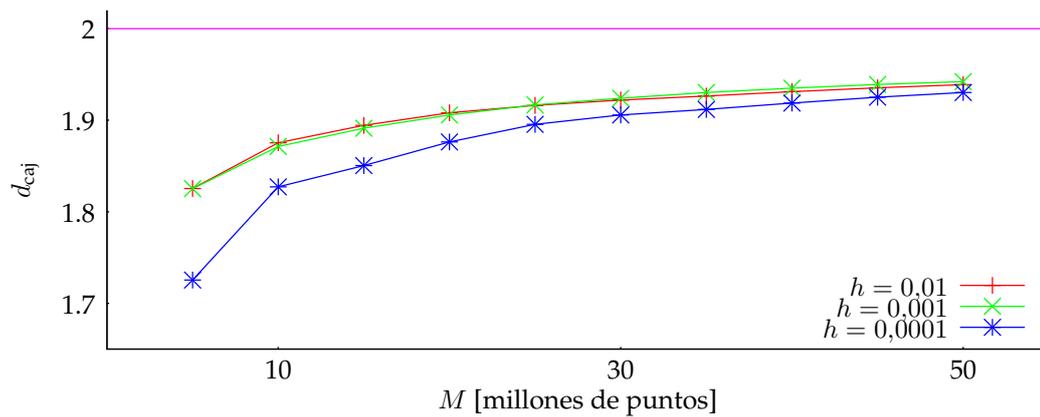


Figura 3.8: Dimensión de cajas en función de la cantidad de puntos M y para tres pasos de integración diferentes. En todos los casos $d < 2$.

resulta que las dimensiones de cajas, de información y de correlación son los valores absolutos de las pendientes de cada una de estas funciones con respecto a $\ln \epsilon$. En la figura 3.9 mostramos las tres funciones, donde podemos ver que efectivamente existe una relación lineal entre los numeradores y los denominadores de las definiciones de las tres dimensiones generalizadas.

En la figura 3.10 mostramos cómo dependen las dimensiones generalizadas calculadas con el algoritmo de contar cajas para el sistema de Lorenz con los parámetros nominales. Allí podemos observar que a pesar de que matemáticamente debe ser $d_{\text{cor}} \leq d_{\text{inf}} \leq d_{\text{caj}}$, numéricamente encontramos que la dimensión de correlación es el parámetro que mejor estima la dimensión de Hausdorff de un atractor caótico.

La ventaja de la dimensión de correlación radica en que es posible calcularla a partir de la integral de correlación, que a su vez se calcula evaluando distancias entre puntos, por lo que no es necesario dividir el espacio de fases n -dimensional en pequeñas cajas. Esto se traduce en cambiar un problema que escala requerimientos de memoria potencialmente con n por un problema que requiere esfuerzos computacionales de orden M^2 . Si bien este cambio es deseable en el sentido de que transforma un problema irresoluble debido a los enormes requerimientos de memoria —especialmente 25 años atrás— en un problema que podía ser resuelto eventualmente, el hecho de que la resolución tome un tiempo de procesamiento que escala como $O(M^2)$ no es muy satisfactorio. De todas formas, fue debido al descubrimiento de Grassberger y Procaccia que fue posible calcular dimensiones de conjuntos arbitrarios para n mayores que uno.

Theiler (1987) notó que no es necesario evaluar las M^2 distancias entre todos los posibles pares de puntos de un conjunto para calcular la integral de correlación (2.12), ya que los pares que cuentan son los que están a menos de una distancia ϵ . Propuso entonces un algoritmo de cálculo de correlación asistido por cajas, el cual divide nuevamente al espacio de fases en cajas lado $\epsilon_0 > \epsilon$ y evalúa sólo las distancias entre pares de puntos que están en la misma caja o en cajas vecinas (figura 3.11), reduciendo sensiblemente el tiempo de cálculo de la integral de correlación definida en la ecuación (2.12).

Sin embargo, debido a las limitaciones de memoria de los recursos computacionales del momento, las estructuras administrativas sobre la distribución en cajas de cada uno de los puntos x_i de la serie temporal están implementadas en un arreglo lineal en el cual se van agregando (*allocando*) nuevas cajas a medida que se necesitan. De esta forma —según admite el autor— la mayor parte del tiempo el algoritmo se encuentra buscando cajas vecinas en un espacio tridimensional dentro de un arreglo lineal, y no evaluando distancias que es lo que importa finalmente. Recientemente se ha propuesto utilizar listas ligadas (Füchslin et al., 2001) y métodos adaptivos (Corana, 2000) para acelerar la búsqueda de cajas vecinas en listas lineales y mejorar así el desempeño

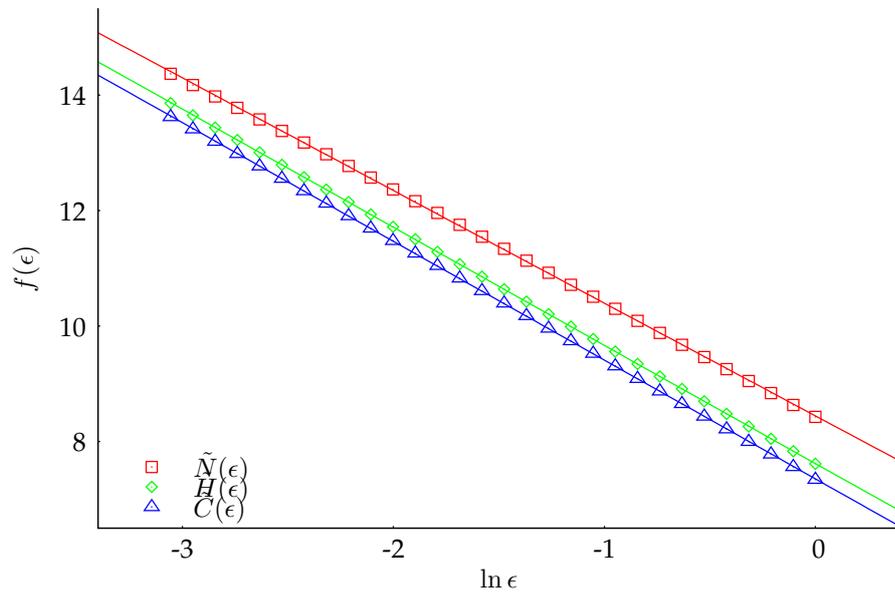


Figura 3.9: Dependencia de los numeradores de las definiciones de dimensión de cajas, de información y de correlación con el logaritmo del lado de las cajas utilizadas para realizar el cubrimiento- ϵ del atractor de Lorenz.

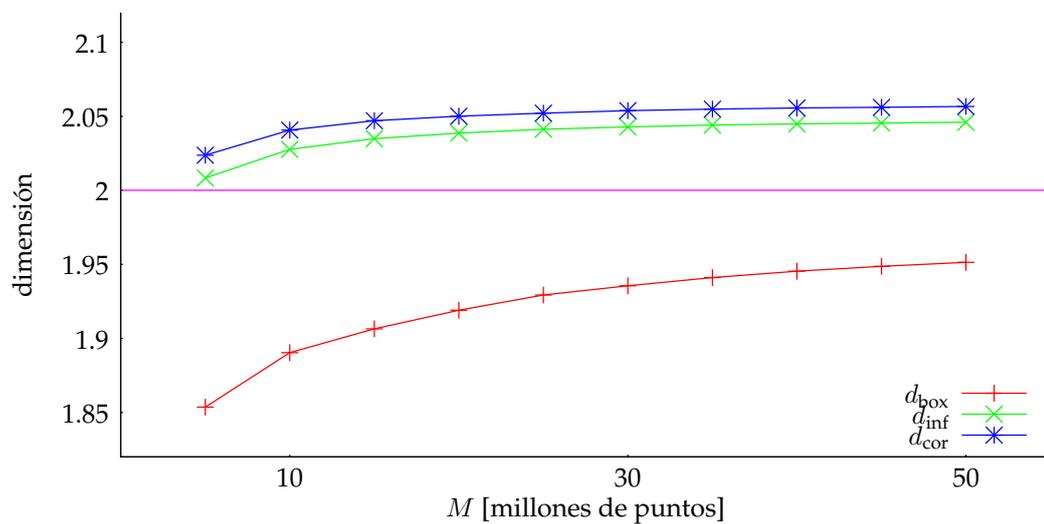


Figura 3.10: Las dimensiones generalizadas que dependen explícitamente de la medida natural de un sistema dinámico convergen hacia su valor asintótico más rápido cuando son calculadas numéricamente.

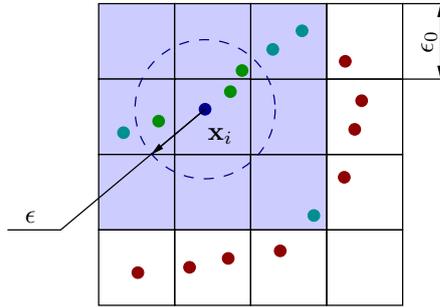


Figura 3.11: El algoritmo de correlación asistido por cajas propone dividir el espacio de fases en cajas de lado ϵ_0 y evaluar sólo aquellas distancias entre puntos que se encuentren en cajas vecinas. En la figura, se evalúan las distancias entre el punto x_i y los puntos que aparecen en las cajas sombreadas. Sólo contribuyen a la integral de correlación $C(\epsilon)$ los que están a una distancia menor que $\epsilon < \epsilon_0$. La mayoría de los puntos están en otras cajas, y el algoritmo no pierde tiempo en calcular estas distancias.

del algoritmo en dimensiones superiores. Sin embargo, en este trabajo aprovechamos la disponibilidad de 8 Gb de memoria y organizamos las cajas en un arreglo tridimensional fijo, asignado tres índices enteros (i_x, i_y, i_z) a cada caja. Luego, las cajas vecinas de la caja i son simplemente las veintisiete (incluida la i) cajas j cuyos índices (j_x, j_y, j_z) difieren a lo más en una unidad de los índices de la caja i , disminuyendo aún más el tiempo computacional de cálculo de dimensión.

3.4. Caracterización del espacio de parámetros

Nuestro algoritmo sigue siendo $O(M^2)$ pero sólo calculamos una pequeña fracción de todas las posibles distancias entre puntos, y al tener estructurada la contabilidad del contenido de las cajas en un arreglo tridimensional, la búsqueda de cajas vecinas es trivial. Esto posibilita entonces estimar muy rápidamente la dimensión de correlación de un conjunto de datos x_i provenientes de la integración numérica de un sistema dinámico y es posible realizar una caracterización del espacio de parámetros, en el sentido de encontrar si el sistema es atraído hacia un punto fijo, hacia un ciclo límite o hacia un atractor extraño en función de la dimensión de correlación del límite omega estudiado.

En la figura 3.12 mostramos un mapa de estabilidad construido analizando la dimensión del flujo en el espacio de las fases —descartando un transitorio inicial— para combinaciones de parámetros r y σ en los rangos $r = [0,5 : 150]$ y $\sigma = [0,5 : 20]$, con intervalos $\Delta r = 0,5$ y $\Delta \sigma = 0,25$ respectivamente. El parámetro b fue mantenido constantemente igual al valor nominal $8/3$. Cada punto del mapa es el resultado de integrar las ecuaciones de Lorenz con el método de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden con un paso temporal fijo $h = 10^{-3}$, descartar un transitorio inicial de tiempo adimensional $t = 50$ y

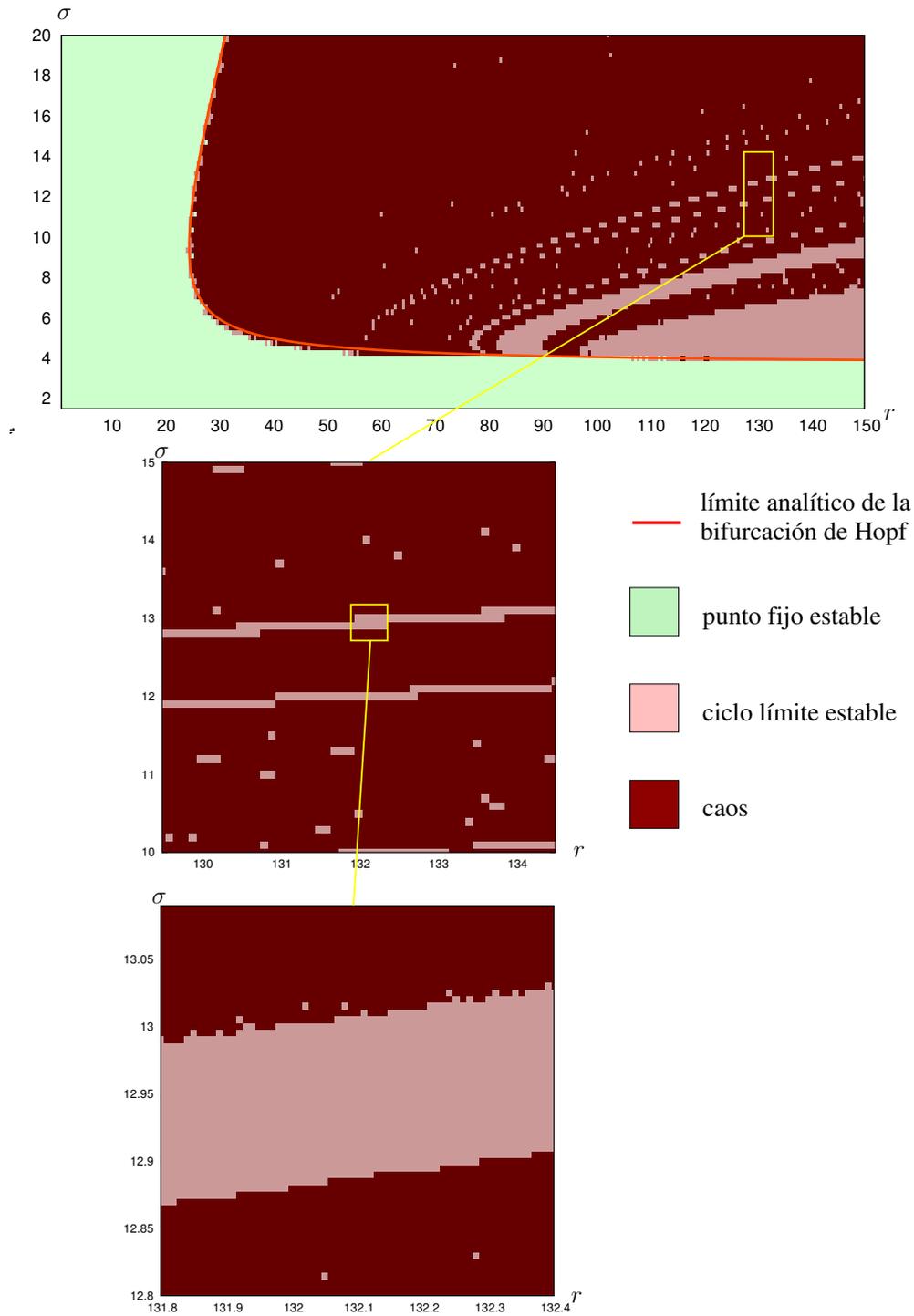


Figura 3.12: Mapa de estabilidad del sistema de Lorenz para el parámetro fijo $b = 8/3$. En la figura superior se muestra el límite de estabilidad analítico (3.2) donde se produce la bifurcación de Hopf que inestabiliza el punto fijo. El parámetro r fue variado adiabáticamente de menor a mayor, por lo que en este gráfico no se observa la histéresis producida por la bifurcación subcrítica de Hopf.

analizar la dimensión de 20000 puntos con nuestro algoritmo de correlación asistida por cajas de lado 2.5 unidades. La construcción del mapa completo (48000 combinaciones de parámetros) tomó alrededor de ocho horas.

Los parámetros fueron variados adiabáticamente en forma creciente, primero barriendo el rango de r y luego incrementando σ , tomando como condición inicial para cada integración el estado final del paso anterior. En figura 3.12 también mostramos el límite analítico de la estabilidad predicho por la ecuación (3.2) donde se produce la bifurcación de Hopf subcrítica. Vemos que este límite analítico coincide dentro de la resolución de la partición elegida del espacio de parámetros. Debido a la limitación de la partición finita del espacio de parámetros, existen zonas de ciclos límites estables que no se pueden resolver con la resolución elegida. Por ello mostramos dos acercamientos sucesivos de un área arbitraria del espacio de parámetros.

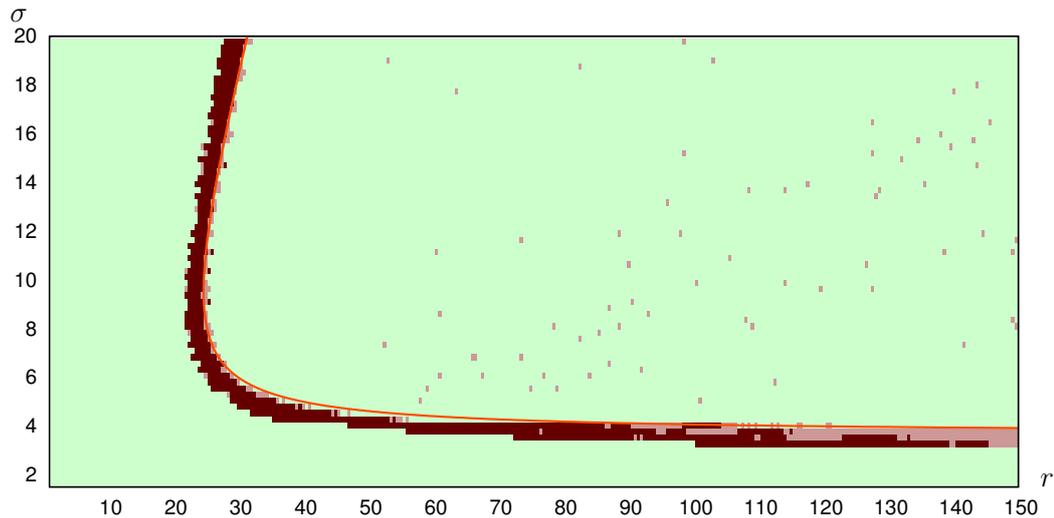


Figura 3.13: Diferencia entre los mapas de estabilidad construidos al variar adiabáticamente el parámetro r en forma creciente y decreciente respectivamente. Se observa la zona de histéresis debido a la bifurcación de Hopf subcrítica.

Debido al incremento positivo del parámetro r , no observamos la histéresis característica de una bifurcación de Hopf subcrítica en la figura 3.12. Es por eso que repetimos el cálculo del mapa de estabilidad, variando esta vez adiabáticamente el parámetro r en forma decreciente, tomando como condición inicial para cada integración la condición final de la anterior. En la figura 3.13 mostramos el valor absoluto de la diferencia entre las dimensiones de los atractores resultantes. Además de pequeñas diferencias entre las zonas de caos y de periodicidad, en la figura observamos el efecto de histéresis introducido por la naturaleza subcrítica de la bifurcación de Hopf en el punto $r = r^*$. El resultado

de variar en forma descendente el parámetro r es que el sistema se comporta en forma caótica aún por debajo del límite de la bifurcación de Hopf subcrítica debido a que la cuenca de atracción del punto fijo estable es pequeña y no llega a atraer a los puntos que están sobre el atractor extraño.

El análisis de inestabilidad basado en el análisis de la dimensión fractal permite distinguir no sólo entre puntos fijos estables e inestables sino también diferenciar ciclos límites de un comportamiento aperiódico. Esta característica hace que este método sea particularmente útil para estudiar sistemas dinámicos no lineales y conduce a resultados que no sería posible obtener empleando técnicas tradicionales de análisis lineal. Por otro lado, estos resultados dependen en gran medida de los métodos numéricos empleados y los parámetros utilizados en el cálculo de la dimensión fractal tales como el paso de integración y tamaño de la muestra. Esto implica que el analista deberá discernir qué resultados corresponden genuinamente a las características de estabilidad del sistema estudiado y cuáles son debidos sólo a efectos numéricos a la hora de realizar el análisis, lo cual no siempre resulta una tarea fácil de realizar. Finalmente, debemos notar que la posibilidad de construir mapas de estabilidad barriendo sistemáticamente el espacio de parámetros de un sistema en un tiempo razonable sólo es posible debido a la disponibilidad actual de recursos computacionales —tanto de memoria como de potencia de cálculo— que no era posible emplear algunos años atrás.

Inestabilidades en flujo de una fase

The theorist invents his companions, as a
naïve Romeo imagined his ideal Juliet.
The experimenter's lovers sweat,
complain, and fart.
James Gleick, Chaos, 1987

El estudio de inestabilidades en sistemas termofluidodinámicos de simple fase son un tema de interés que ha sido tratadas extensamente en la literatura sobre diseño de sistemas nucleares (Ferreri y Ambrosini, 1998, 2000; Ambrosini et al., 2003), e incluso es todavía un tema abierto de investigación (Pilkhwai, Ambrosini, Forgione, Vijayan, Saha, y Ferreri, 2007). De todas maneras, aunque para un estudio completo de la dinámica acoplada neutrónica termohidráulica suele ser necesario considerar flujo de dos fases, como paso previo y para ir optimizando las herramientas de análisis no lineal, en este capítulo estudiamos inestabilidades en un sistema de convección natural de simple fase y geometría sencilla.

Los loops de convección natural (Welander, 1967; Bau y Torrance, 1981; Ehrhard y Müller, 1990) proveen un entorno en el cual estudiar la física básica de la fenomenología de las inestabilidades en sistemas termohidráulicos. Una discusión y estudio de loops de convección natural de simple fase puede encontrarse en el Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear (Theler, 2007), o en forma resumida en las publicaciones asociadas al mismo (Theler et al., 2007b,a).

4.1. El loop toroidal anular

Consideremos el sistema que mostramos en la figura 4.1 que consiste en un loop cerrado de sección transversal anular y con geometría de toroide, por el

que circula un fluido de una sola fase. En general, el fluido intercambia energía con una fuente o sumidero de calor distribuido a lo largo de la coordenada axial del loop, intercambios que se suelen escribir como condición de contorno en algunas formulaciones de las ecuaciones del problema. Si bien en este trabajo desarrollamos las ecuaciones de forma tal que los intercambios no aparecen como condiciones de contorno sino como inhomogeneidades, mantenemos la nomenclatura. En particular, el loop de la figura 4.1 provee una fuente de calor constante en la semicircunferencia inferior y un sumidero de temperatura constante en la parte superior. En la literatura estas condiciones de contorno se conocen como QT por ser de flujo de calor controlado en la parte inferior y temperatura controlada en la parte superior.

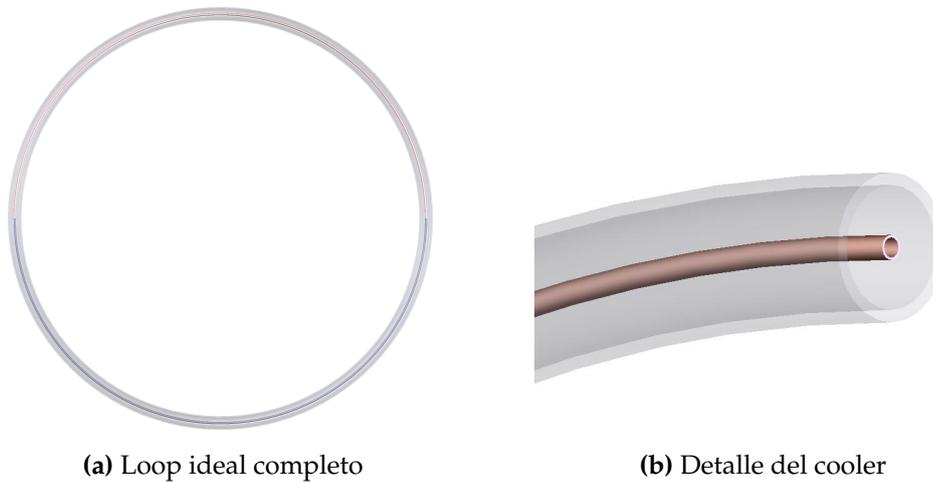


Figura 4.1: Loop toroidal transparente de sección transversal anular. En la semicircunferencia inferior, un calefactor eléctrico disipa energía en el fluido mientras que en la semicircunferencia superior el calor es extraído por un tubo de cobre por el que circula agua fría.

4.1.1. Ecuaciones de conservación

Una deducción detallada y una breve discusión sobre las ecuaciones generales de los loops de convección natural puede encontrarse en el capítulo 5 del Proyecto Integrador que precede a este trabajo (Theler, 2007). En el capítulo 7 se analiza un loop toroidal de sección transversal circular, por lo que el desarrollo que sigue es una generalización de ese problema.

Suponiendo flujo unidimensional y utilizando las variables descriptas en la tabla 4.1 en el sistema de coordenadas definido en la figura 4.2, el flujo de momento de un elemento de volumen es

$$\rho AR \frac{du}{dt} d\theta = \frac{\partial p}{\partial(R\theta)} A d\theta - \rho g A \cos \theta R d\theta - \tau_w P_{\text{moj}} R d\theta \quad (4.1)$$

ρ	densidad
A	área transversal
R	radio del toro
u	velocidad media
p	presión
θ	coordenada angular
g	aceleración de la gravedad
τ_w	esfuerzo de corte en la pared
P_{moj}	perímetro transversal mojado
β	coeficiente isobárico de expansión
T	temperatura de mezcla
T_0	temperatura de referencia
T_{src}	temperatura de la fuente externa
P_{int}	perímetro de intercambio de energía
f	factor de Fanning
h	coeficiente de transferencia térmica por convección
ν	viscosidad cinemática
D_h	diámetro hidráulico
c	calor específico a presión constante
q''	flujo de calor por unidad de área
t	tiempo
α	difusividad térmica
k	conductividad térmica

Tabla 4.1: Descripción de variables en la formulación del problema del loop toroidal

! Si suponemos flujo incompresible —excepto en el término de fuerzas de volumen en la ecuación de momento de Navier-Stokes— entonces la velocidad media no puede depender de la coordenada θ a lo largo del loop para poder satisfacer la ecuación de continuidad $\nabla \mathbf{v} = 0$. Luego es lícito escribir la tasa de cambio de momento lineal en el miembro izquierdo de la ecuación (4.1) en función de la derivada total de la velocidad v en función del tiempo.

Usando la aproximación de Boussinesq y tomando la densidad ρ a la temperatura de referencia T_0

$$\rho A \frac{du}{dt} 2\pi = \rho g A \beta \int_0^{2\pi} [T(\theta, t) - T_0] \cos \theta d\theta - \tau_w P_{\text{moj}} 2\pi \quad (4.2)$$

Es conveniente escribir el esfuerzo de corte en la pared en función del factor de Fanning

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2}$$

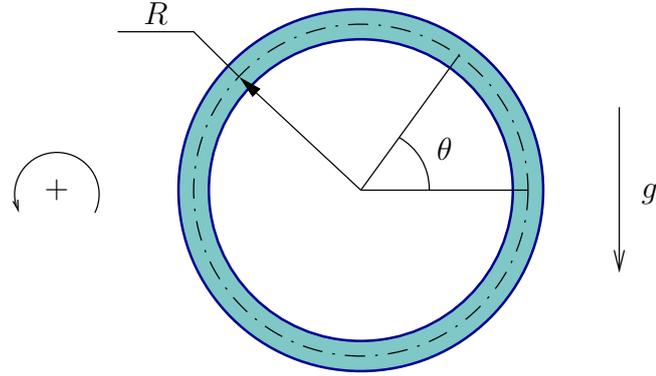


Figura 4.2: Sistema de coordenadas del problema del loop toroidal. El sentido positivo de circulación es anti-horario.

que para el flujo laminar en un ánulo se puede escribir en función del número de Reynolds basado en el diámetro hidráulico $D_h = 4A/P_{\text{moj}}$ como

$$f = \frac{\mathcal{F}}{\text{Re}_{D_h}} \quad (4.3)$$

con \mathcal{F} un número real que depende del cociente entre el radio externo e interno del ánulo (Rohsenow y Hartnett, 1973). El esfuerzo de corte resulta entonces

$$\tau_w = \mathcal{F} \cdot \frac{\nu P_{\text{moj}}}{4Au} \cdot \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (4.4)$$

Reemplazando (4.4) en la ecuación (4.2), dividiendo ambos miembros por $2\pi\rho A$ e integrando en toda la longitud del loop cerrado, para una sección transversal homogénea resulta

$$\frac{du}{dt} = \frac{g\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} [T(\theta, t) - T_0] \cos \theta d\theta - \frac{\mathcal{F}\nu P_{\text{moj}}^2}{8A^2} \cdot u(t) \quad (4.5)$$

En particular, si el flujo no es en un anillo sino en una sección transversal circular de radio r resulta $A = \pi r^2$, $P_{\text{moj}} = 2\pi r$ y $\mathcal{F} = 16$ (White, 1999). Luego la ecuación de momento queda

$$\frac{du}{dt} = \frac{g\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} [T(\theta, t) - T_0] \cos \theta d\theta - \frac{8\nu}{r^2} \cdot u(t)$$

que es justamente la ecuación (7.4) del trabajo anterior (Theler, 2007).

Por otro lado, la conservación de energía en un elemento diferencial de volumen despreciando conductividad axial da como resultado

$$\rho c AR d\theta \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u(t) \frac{\partial T}{\partial (R\theta)} \right] = \text{intercambio de energía con el entorno} \quad (4.6)$$

El intercambio con el entorno puede ser debido a una temperatura externa controlada o debido a un flujo de calor controlado. En el primer caso, la cantidad de calor intercambiada es

$$d(\text{intercambio por } T) = h(\theta)[T_{\text{src}}(\theta, t) - T(\theta, t)] P_{\text{int}} R d\theta \quad (4.7)$$

mientras que en el segundo, es directamente

$$d(\text{intercambio por } q) = q''(\theta, t) P_{\text{int}} R d\theta \quad (4.8)$$

Sumando (4.7) y (4.8), reemplazando en la ecuación (4.6) y dividiendo por $\rho c A R d\theta$ obtenemos la ecuación de energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u(t)}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{P_{\text{int}}}{\rho c A} \left[q''(\theta, t) - h(\theta) [T(\theta, t) - T_{\text{src}}(\theta, t)] \right] \quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.5) y (4.9) forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que describen completamente el problema, para condiciones de intercambio de energía que pueden ser una combinación arbitraria de fuentes y sumideros de temperatura y/o calor controlado, fijos en el espacio. La ecuación en derivadas parciales de energía (4.9) tiene sólo la condición de contorno circular $T(0) = T(2\pi)$, y ambas ecuaciones necesitan una condición inicial $u(0) = u_0$ y $T(\theta, 0) = T_0(\theta)$.

! El desarrollo precedente supone flujo laminar unidimensional, la validez de la aproximación de Boussinesq y propiedades termofísicas del fluido independientes de la temperatura. Estas simplificaciones tienen por objeto lograr un modelo susceptible de ser analizado matemáticamente y no una descripción completa y detallada del loop toroidal. Esperamos entonces que las ecuaciones (4.5) y (4.9) describan el comportamiento del loop real en forma cualitativa y aproximada. Incluso existen fenómenos difíciles de modelar, como el efecto de la excentricidad —o incluso otras imperfecciones de un loop experimental con respecto al loop ideal de la figura 4.1— del tubo interior del ánulo con respecto al toro exterior en el numerador \mathcal{F} del factor de Fanning (4.3), que influyen más en los resultados que —por ejemplo— la dependencia de la viscosidad con la temperatura.

4.1.2. Adimensionalización

Vamos a adimensionalizar el sistema de ecuaciones del problema introduciendo las siguientes variables

Símbolo	Nombre	Definición
Re_{D_h}	número de Reynolds	$uD_h \cdot \nu^{-1}$
Nu	número de Nusselt	$hD_h \cdot k^{-1}$
Pr	número de Prandtl	$\nu \cdot \alpha^{-1}$
Ra	número de Rayleigh	$\frac{256}{\pi \mathcal{F} \text{Nu}} \frac{A^4}{P_{\text{moj}}^3 P_{\text{int}} R} \frac{g\beta\Delta T_{\text{ref}}}{\alpha\nu}$

Tabla 4.2: Descripción de los números adimensionales en el problema del loop toroidal adimensionalizado

$$\begin{aligned}
x &= \frac{u}{u_{\text{ref}}} \\
\tau &= \frac{t}{t_{\text{ref}}} \\
\phi &= \frac{T - T_0}{\Delta T_{\text{ref}}} \\
\tilde{q} &= \frac{q''}{q_0''} \\
\tilde{h} &= \frac{h}{h_{\text{ref}}}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde elegimos las magnitudes de referencia particulares

$$\begin{aligned}
u_{\text{ref}} &= \frac{P_{\text{int}} P_{\text{moj}} R}{8A^2} \text{Nu} \alpha \\
t_{\text{ref}} &= \frac{8A^2}{P_{\text{int}} P_{\text{moj}}} \frac{1}{\text{Nu} \alpha} \\
h_{\text{ref}} &= \frac{k P_{\text{moj}}}{4A} \text{Nu} \\
\Delta T_{\text{ref}} &= \frac{q_0''}{h_{\text{ref}}} = \frac{4A}{\pi R P_{\text{int}} \cdot P_{\text{moj}} \text{Nu} k} Q_0
\end{aligned}$$

con el número de Nusselt constante por tratarse de flujo laminar (Incropera y Dewitt, 2002; Rohsenow y Hartnett, 1973) y Q_0 una potencia total constante de referencia, en principio arbitraria.

Con estas definiciones, las ecuaciones de momento y de energía adimensionales quedan

$$\dot{x} = \gamma \int_0^{2\pi} \phi \cos \theta d\theta - \sigma x \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + x\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 2[\tilde{q} - \tilde{h}(\phi - \phi_{\text{src}})] \quad (4.12)$$

Los parámetros adimensionales que definen el problema —junto con las condiciones iniciales— son

$$\gamma = \frac{128A^5g\beta Q_0}{\pi^2\text{Nu}^3\alpha^2kP_{\text{int}}^3P_{\text{moj}}^3R^2} \quad (4.13)$$

$$\sigma = \mathcal{F}\frac{\text{Pr}P_{\text{moj}}}{\text{Nu}P_{\text{int}}} \quad (4.14)$$

El parámetro γ , al ser proporcional a la potencia total Q_0 de referencia y al coeficiente de expansión isobárico β , representa la influencia de las fuerzas boyantes que contribuyen a aumentar el valor absoluto de la velocidad del fluido. El parámetro σ depende de las pérdidas por disipación viscosa y representa los efectos que se oponen al movimiento. La dependencia de estas fuerzas disipativas es proporcional a la velocidad ya que hemos supuesto flujo laminar.

4.2. Caso particular: condiciones de contorno QT

La idealización mostrada en la figura 4.1 tiene en la parte inferior del loop un heater eléctrico que disipa una potencia total constante Q_0 y un sumidero de calor de temperatura constante en la parte superior, consistente en un tubo de baja conductividad y capacidad térmica por el cual circula un gran caudal de agua fría a temperatura T_0 . La ecuación de energía (4.12) con estas condiciones de contorno QT queda

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + x\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \begin{cases} -2\phi & \text{para } 0 \leq \theta < \pi \\ +2 & \text{para } \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (4.15)$$

4.2.1. Reducción al sistema de Lorenz

Al ser la distribución de temperaturas 2π -periódica, es posible descomponer la dependencia angular en una serie de Fourier

$$\phi(\theta, \tau) = a_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tau) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\tau) \sin(n\theta) \quad (4.16)$$

En la figura 4.3 mostramos dos órbitas en el espacio de fases generado por las variables x y los modos fundamentales pares e impares a_1 y b_1 respectivamente. Estos flujos provienen de resolver numéricamente las ecuaciones dimensionales (4.5) y (4.9), adimensionalizar los resultados según el cambio de

variables (4.10) y calcular los coeficientes a_1 y b_1 del desarrollo de Fourier (4.16) para cada instante de tiempo. Esta forma de calcular numéricamente una órbita en el espacio de las fases ciertamente no se parece en nada a simplemente integrar con el método de Runge-Kutta un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, los retratos de la figura 4.3 no sólo se parecen al atractor de Lorenz sino que también presentan atractores extraños o ciclos límites dependiendo de un parámetro de control, en este caso la potencia Q_0 disipada por el heater.

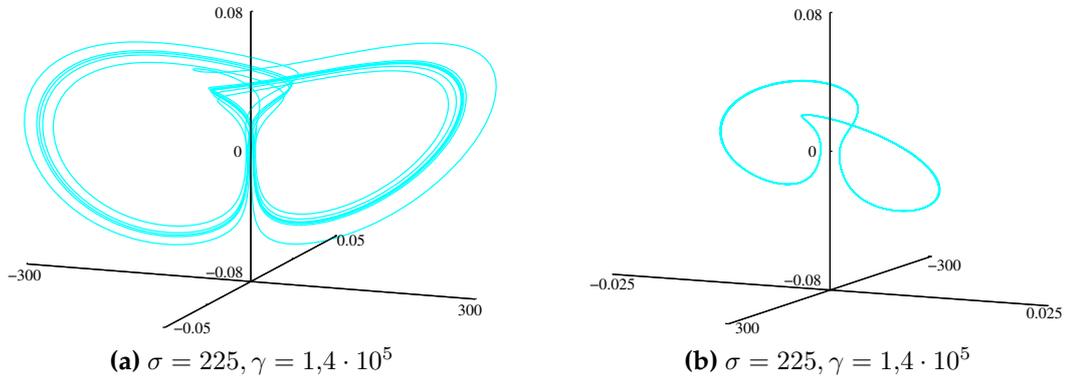


Figura 4.3: Flujo en el espacio de las fases generado por la velocidad adimensionalizada y los modos fundamentales par e impar de la temperatura adimensionalizada.

Derivamos a continuación una equivalencia entre las ecuaciones (4.11) y (4.15) y el sistema de Lorenz. Un análisis más detallado puede encontrarse en el capítulo 6 del Proyecto Integrador, donde analizando los estados estacionarios correspondientes se llega al resultado de que la equivalencia aproximada es más válida mientras mayor sea el número de Rayleigh del problema.

Si el sistema alcanza algún estado asintótico, entonces en promedio debe disipar en la fuente fría exactamente la potencia Q_0 que le entrega el heater. Entonces la temperatura media \bar{T} del fluido debe ser tal que

$$\begin{aligned}
 h_{\text{ref}} \cdot \pi R P_{\text{int}} \cdot (\bar{T} - T_0) &= Q_0 \\
 \bar{T} - T_0 &= \frac{Q_0}{h_{\text{ref}} \cdot \pi R P_{\text{int}}} = \Delta T_{\text{ref}} \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

con lo que el valor medio asintótico de la temperatura adimensional es $\langle \phi \rangle = 1$. Supongamos que podemos tomar $a_0 = 1$ y que las amplitudes de los modos superiores son despreciables frente a los modos fundamentales a_1 y b_1 (de ahora en más escribimos a y b para simplificar la notación). Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
\phi(\theta, \tau) &\approx 1 + a(\tau) \cos(\theta) + b(\tau) \sin(\theta) & (4.18) \\
\frac{\partial \phi}{\partial \tau} &\approx \dot{a} \cos \theta + \dot{b} \sin \theta \\
\frac{\partial \phi}{\partial \theta} &\approx -a \sin \theta + b \cos \theta
\end{aligned}$$

Reemplazando la aproximación (4.18) en la ecuación de momento (4.11)

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \gamma \int_0^{2\pi} (1 + a \cos \theta + b \sin \theta) \cos \theta \, d\theta - \sigma x \\
\dot{x} &= \gamma a \pi - \sigma x & (4.19)
\end{aligned}$$

y en la ecuación de energía para las condiciones de contorno QT (4.15)

$$\dot{a} \cos \theta + \dot{b} \sin \theta + x[-a \sin \theta + b \cos \theta] = \begin{cases} -2(1 + a \cos \theta + b \sin \theta) & 0 \leq \theta < \pi \\ +2 & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros por $\cos \theta$, integrando entre 0 y 2π y teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones trigonométricas, resulta

$$\begin{aligned}
\dot{a}\pi + xb\pi &= -\pi a \\
\dot{a} + xb &= -a \\
\dot{a} &= -a - xb & (4.20)
\end{aligned}$$

Análogamente multiplicando por $\sin \theta$

$$\begin{aligned}
\dot{b}\pi - xa\pi &= -2 \left(2 + \frac{\pi}{2} b \right) + 2(-2) \\
\dot{b}\pi - xa\pi &= -\pi b - 8 \\
\dot{b} &= ax - b - \frac{8}{\pi} & (4.21)
\end{aligned}$$

Introducimos ahora dos nuevas y previsibles variables

$$y = \frac{\pi r}{8} a \quad (4.22)$$

$$z = \frac{\pi r}{8} b + r \quad (4.23)$$

con el parámetro r igual a

$$r = \frac{8\gamma}{\sigma} = \frac{256}{\pi \mathcal{F} \text{Nu}} \frac{A^4}{P_{\text{moj}}^3 P_{\text{int}} R} \frac{g\beta\Delta T_{\text{ref}}}{\alpha\nu} \quad (4.24)$$

Reemplazando el cambio de variables (4.22) en la ecuación (4.19) y teniendo en cuenta la definición (4.24)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma \frac{8}{\pi r} y \pi - \sigma x \\ \dot{x} &= \sigma(y - x) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Escribiendo la ecuación (4.20) en función de las nuevas variables

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi r} \dot{y} &= -\frac{8}{\pi r} y - x \frac{8}{\pi r} (z - r) \\ \dot{y} &= -y - xz + rx \end{aligned} \quad (4.26)$$

Finalmente, podemos reescribir la ecuación (4.21) como

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi r} \dot{z} &= -\frac{8}{\pi r} yx - \frac{8}{\pi r} (z - r) - \frac{8}{\pi} \\ \frac{8}{\pi r} \dot{z} &= -\frac{8}{\pi r} yx - \frac{8}{\pi r} z + \frac{8}{\pi} - \frac{8}{\pi} \\ \dot{z} &= xy - z \end{aligned} \quad (4.27)$$

Luego, las ecuaciones (4.25), (4.26) y (4.27) conforman el sistema de Lorenz con el parámetro b igual a la unidad

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ -y - xz + rx \\ xy - z \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Notar que el parámetro r puede ser escrito como

$$r = \text{Ra} = \frac{256}{\pi \mathcal{F} \text{Nu}} \frac{A^4}{P_{\text{moj}}^3 P_{\text{int}} R} \frac{g\beta\Delta T_{\text{ref}}}{\alpha\nu}$$

que es el número de Rayleigh estándar (Incropera y Dewitt, 2002), con un factor geométrico de forma y una longitud característica del orden del radio interno del toro. Si la sección transversal es circular de radio interno r (abuso de notación), entonces el número de Rayleigh que resulta es

$$\text{Ra}_{\text{circ}} = \frac{r}{\pi R} \frac{g\beta\Delta T_{\text{ref}}}{\nu\alpha} \frac{r^3}{\text{Nu}}$$

que coincide —a menos de un factor dos debido a la diferente adimensionalización adoptada— con el número de Rayleigh del problema discutido en el capítulo 7 del Proyecto Integrador.

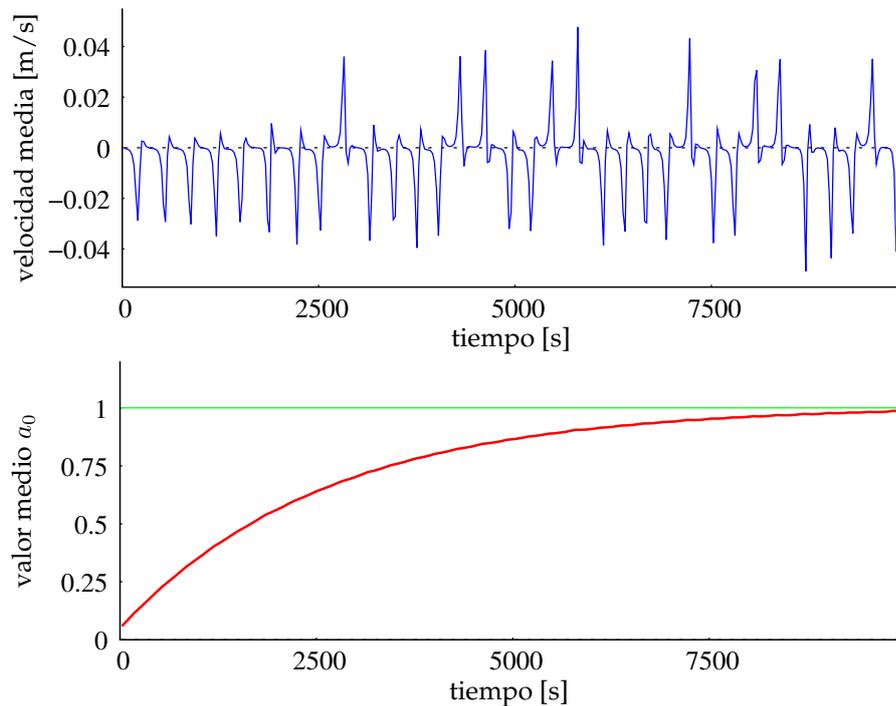


Figura 4.4: Evolución de la velocidad y de la temperatura media en función del tiempo, a partir de una distribución inicial de temperaturas levemente superior a la temperatura de la fuente fría. A pesar de que el caudal oscila caóticamente, el valor medio a_0 de la temperatura adimensional se aproxima asintóticamente a la unidad, hecho consistente con la ecuación (4.17)

! Al escribir la temperatura adimensional de la forma (4.18), supusimos que

- la temperatura adimensional media se mantiene constantemente igual a uno. En la figura 4.4 mostramos la evolución temporal del coeficiente a_0 , a partir de una condición inicial con el fluido en reposo y una distribución de temperatura uniforme e igual a la temperatura de la fuente fría. Vemos que a pesar de que el caudal oscila caóticamente, el valor medio a_0 de la distribución de temperaturas tiende asintóticamente a la unidad. Esto implica que si bien no existe un punto fijo estable que atraiga órbitas en el espacio de las fases, existe un estado asintótico estable en el cual, en promedio, el sistema disipa exactamente la misma cantidad de energía que recibe. Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, esto implica que existe un conjunto invariante frente a la dinámica del sistema —un ciclo límite o un atractor extraño— que posee la propiedad de conservar la energía en promedio.

4.3. Análisis no lineal de inestabilidades

De la equivalencia aproximada entre el loop toroidal con condiciones QT y el sistema de Lorenz podemos sacar algunas conclusiones. La primera es que a pesar de que las ecuaciones de conservación del problema

$$\dot{x} = \gamma \int_0^{2\pi} \phi \cos \theta d\theta - \sigma x \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + x \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{cases} -2\phi & \text{para } 0 \leq \theta < \pi \\ +2 & \text{para } \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (4.15)$$

definen un sistema dinámico de orden infinito, el sistema se comporta esencialmente como un sistema dinámico de orden tres. Esto es, las órbitas en el espacio de las fases están confinadas en un pequeño subespacio de dimensión tres. Por otro lado, si bien obtenemos un sistema de Lorenz (4.28) equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ -y - xz + rx \\ xy - z \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

esta analogía es válida solo en forma aproximada dado que necesitamos que $a_0 \approx 1$, que los modos superiores del desarrollo de Fourier (4.16) sean despreciables frente a los fundamentales y que su dinámica esté completamente desacoplada del resto. Estas suposiciones resultan mejores mientras mayor sea el número de Rayleigh r del problema (Theler, 2007), y fallan para r pequeños. Luego, no es posible aplicar un mapa de estabilidad del sistema de Lorenz como el obtenido en la figura 3.12 directamente al problema del loop toroidal anular con condiciones QT.

De todas maneras, debido a la similitud entre el sistema de Lorenz y las ecuaciones (4.11) y (4.15), es posible aplicar las técnicas de embedding a la variable x del problema original y reconstruir órbitas en un espacio de fases tridimensional susceptibles de ser analizadas con las técnicas de cálculo de dimensión fractal desarrollados en el capítulo 3.

4.3.1. Solución numérica

La derivada de la variable x

$$\dot{x} = \gamma \int_0^{2\pi} \phi \cos \theta d\theta - \sigma x \quad (4.11)$$

involucra la integral de la distribución de temperaturas que proviene de resolver la ecuación de energía

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + x \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{cases} -2\phi & \text{para } 0 \leq \theta < \pi \\ +2 & \text{para } \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (4.15)$$

cuya solución a su vez depende de la velocidad x . Este sistema de ecuaciones no tiene solución analítica¹, por lo que es necesario resolverlo en forma numérica. Debido a que para construir un mapa de estabilidad debemos resolver el sistema barriendo sistemáticamente los parámetros adimensionales que lo caracterizan, el tiempo necesario para obtener una solución individual debe ser reducido. Por otro lado, los métodos numéricos de integración de ecuaciones en derivadas parciales suelen introducir por un lado difusividades numéricas espurias que tienden a dificultar la simulación de fenómenos de transporte y por otro oscilaciones espaciales no deseadas. En este sentido, hemos decidido resolver la ecuación en derivadas parciales con el esquema *Essentially Non-Oscillatory* (ENO) introduciendo la inhomogeneidad con el método de *dimension splitting* según ideas y código desarrollado por Ruspini (2007) en su Proyecto Integrador de Ingeniería Nuclear. En este método, en cada paso de tiempo resolvemos primero la ecuación homogénea para una variable muda $\phi^*(\theta, \tau)$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \tau} + x \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} = 0$$

con el método ENO estándar, y luego obtenemos la solución final resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \begin{cases} -2\phi & \text{para } 0 \leq \theta < \pi \\ +2 & \text{para } \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

en la variable τ con la condición inicial $\phi(\theta, 0) = \phi^*(\theta, \tau)$. Debido a la inhomogeneidad particular de este problema, podemos realizar este segundo paso analíticamente obteniendo

$$\phi(\theta, \tau) = \begin{cases} \phi^*(\theta, \tau) \cdot e^{-2\tau} & \text{para } 0 \leq \theta < \pi \\ \phi^*(\theta, \tau) + 2\tau & \text{para } \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

La integración en el tiempo de la ecuación de momento implica a su vez una integración en el espacio de la distribución de temperaturas. Debido a este acople con una ecuación en derivadas parciales, la implementación de un

¹Si la tuviese, entonces tanto la estabilidad como el comportamiento detallado del sistema podría ser estudiada directamente sobre la expresión matemática de la solución. Es la no integrabilidad de las ecuaciones la característica que implica la sensibilidad a condiciones iniciales (y la mayoría de las no periodicidades) de los sistemas caóticos.

esquema de segundo orden en el tiempo no es directa. Es por eso que elegimos resolver la ecuación ordinaria de momento con el esquema explícito de Euler, realizando la integración en el espacio de la distribución de temperaturas con el método de los trapecios. Los resultados que siguen fueron obtenidos dividiendo el intervalo $[0, 2\pi]$ en 300 nodos y tomando un intervalo de tiempo adimensional $\Delta\tau = 2 \cdot 10^{-5}$.

! El objetivo de este trabajo no es estudiar en forma pormenorizada el efecto de los diferentes esquemas numéricos en la predicción de la estabilidad particular de un problema sino obtener una visión global de la dependencia de la estabilidad con los parámetros adimensionales. De todas maneras, para completar correctamente los resultados obtenidos en este trabajo sería realmente necesario un análisis detallado de la influencia de los métodos de integración numéricos en las propiedades de estabilidad de los sistemas estudiados. Si bien existen algunos estudios realizados por Ferreri y Ambrosini (1998) —principalmente en el marco de validación de códigos de simulación de transitorios de APS nivel II— el efecto de predicciones de ciclos límites en condiciones donde debería observarse caos y viceversa no está totalmente identificado.

4.3.2. Embedding

Una vez que obtenemos la solución numérica de las ecuaciones del problema, debemos construir una órbita en un espacio de fases de dimensión finita, que pueda ser estudiado con las técnicas de análisis de dimensión desarrolladas en el capítulo 3. Para ello, construimos a partir de la evolución temporal $x(\tau)$ un vector de estado de dimensión $n = 3$

$$\mathbf{x}(\tau) = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ x(\tau + T) \\ x(\tau + 2T) \end{bmatrix}$$

donde el delay T es el menor tiempo que anula el coeficiente de autocorrelación lineal $C(T)$ definido en la ecuación (2.19). En la figura 4.5 mostramos dos series temporales asintóticas para dos valores diferentes del parámetro r que muestran un atractor extraño y un ciclo límite respectivamente. En la figura 4.6 mostramos los correspondientes espacios de las fases reconstruidos a partir de las series temporales.

4.3.3. Mapa de estabilidad

Particionamos el espacio de parámetros $(\sigma, r) = [2,5 : 200] \times [5 : 500]$ en intervalos $\Delta\sigma = 5$ y $\Delta r = 5$ y, para cada combinación de parámetros, integramos numéricamente las ecuaciones de conservación de la forma discutida en la sección 4.3.1, realizamos el embedding descrito en la sección 4.3.2 y calculamos

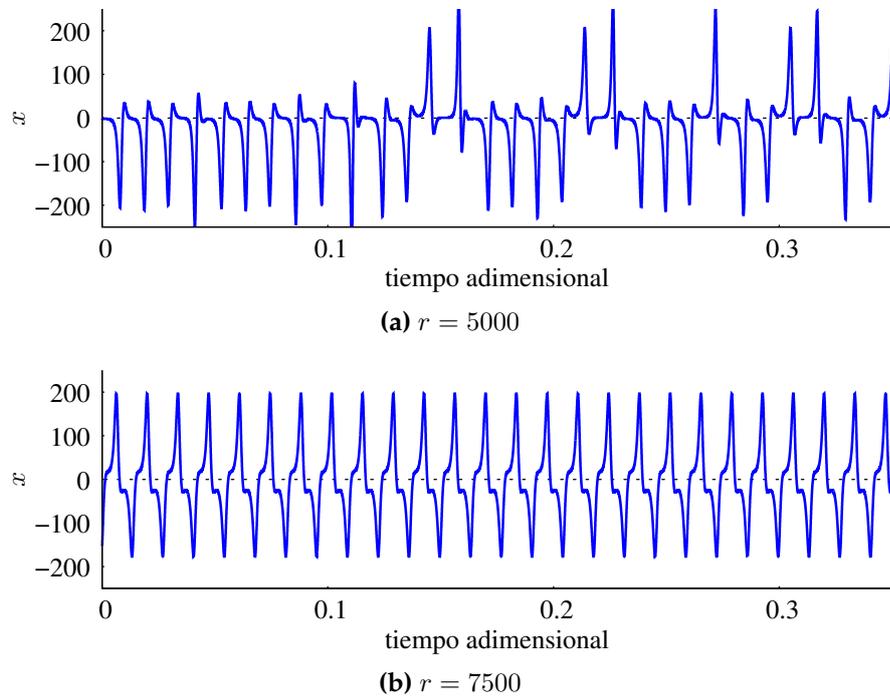


Figura 4.5: Evolución temporal de la variable x para $\sigma = 200$ y dos valores diferentes de r en el estado asintótico.

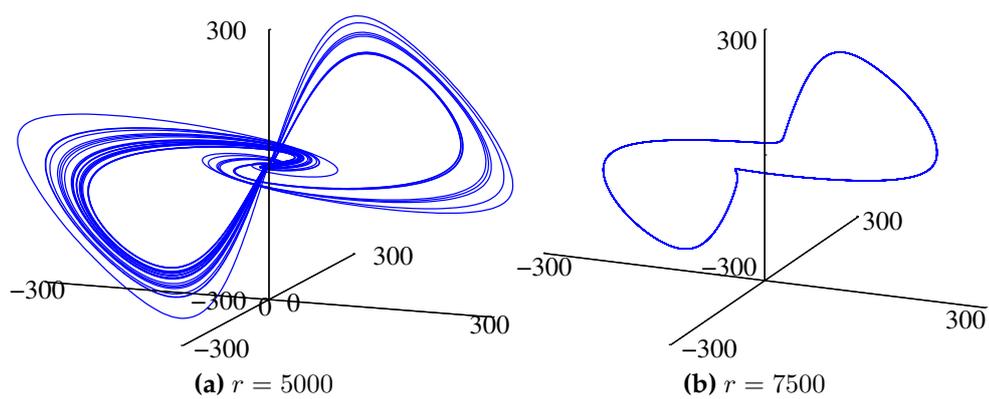


Figura 4.6: Espacio de las fases tridimensional reconstruido a partir de los time-series de la figura 4.5

la dimensión de la órbita asintótica resultante —descartando un transitorio inicial— con el algoritmo desarrollado en el capítulo 3. En este caso, tomamos como condición inicial para cada combinación de parámetros la velocidad y la distribución de estado estacionario que predice el modelo de Lorenz (4.28). El mapa de estabilidad obtenido es el que mostramos en la figura 4.7.

Es interesante notar que el límite de estabilidad predicho por el modelo de Lorenz coincide notablemente con una zona de caos de las ecuaciones de conservación en derivadas parciales. Sin embargo, el loop adquiere un comportamiento tipo ciclo límite a potencias menores, poniendo de manifiesto que existen mecanismos de inestabilidades que la aproximación que lleva al sistema de Lorenz no tiene en cuenta. Por otro lado, la distribución de caos y ciclos límites no es similar a la obtenida para el sistema de Lorenz original en la figura 3.12, y parece haber zonas bien diferenciadas donde se da uno u otro comportamiento. Más aún, al contrario de lo que sucede en la figura 3.12, las inestabilidades periódicas parecen dominar el espacio de parámetros, al menos en el intervalo estudiado.

4.3.4. Explicación física de la inestabilidad

Uno de los primeros trabajos sobre inestabilidades en loops de convección natural de simple fase fue realizado por Welander en 1967. Allí, el autor introdujo el loop que hoy se conoce como el problema de Welander que consiste en dos piernas verticales adiabáticas donde el fluido intercambia energía con una fuente caliente de temperatura constante en la parte inferior y un sumidero de temperatura constante en la parte superior (figura 4.8a). Este lazo fue estudiado en detalle tanto numérica como experimentalmente en el Proyecto Integrador (Theler, 2007).

Si bien la geometría de este problema difiere de la del loop bajo estudio, el origen de las inestabilidades y de la inversión del sentido del flujo es la misma. Welander propone la siguiente explicación para la inestabilidad. Un aumento del caudal causaría, en principio, un aumento de la fricción y, por lo tanto, una disminución de la fuerza boyante neta, ya que el calentamiento por unidad de longitud de fluido se vería disminuida. Intuitivamente, podríamos pensar que es posible alcanzar siempre un movimiento estacionario. Sin embargo, estos dos fenómenos pueden no estar en fase y existe la posibilidad de que comiencen a amplificarse sus efectos, produciendo oscilaciones de amplitud creciente.

En su trabajo, Welander introduce la idea de *warm pocket* con el que explica la inversión del flujo. El origen de este efecto es que la cantidad de energía intercambiada tanto en la fuente como en el sumidero de calor depende de la velocidad instantánea del fluido. En efecto, cuando el caudal es pequeño hay un volumen de fluido que pasa mucho tiempo cerca de la fuente caliente e incrementa localmente su temperatura. Cuando este volumen se dirige a una

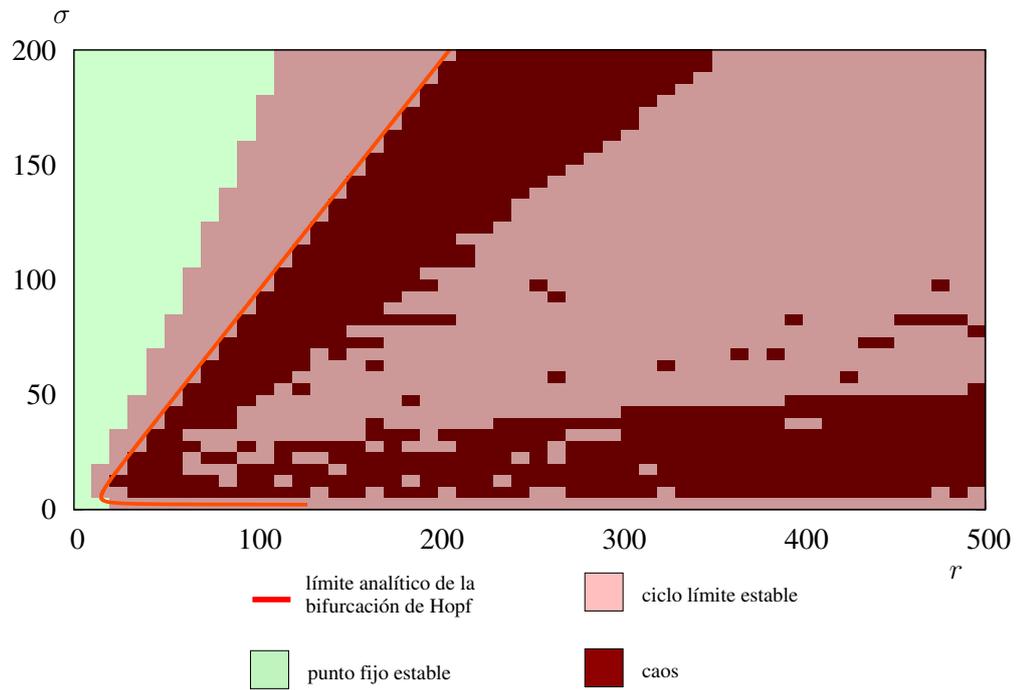


Figura 4.7: Mapa de estabilidad no lineal para el problema del loop toroidal adimensional

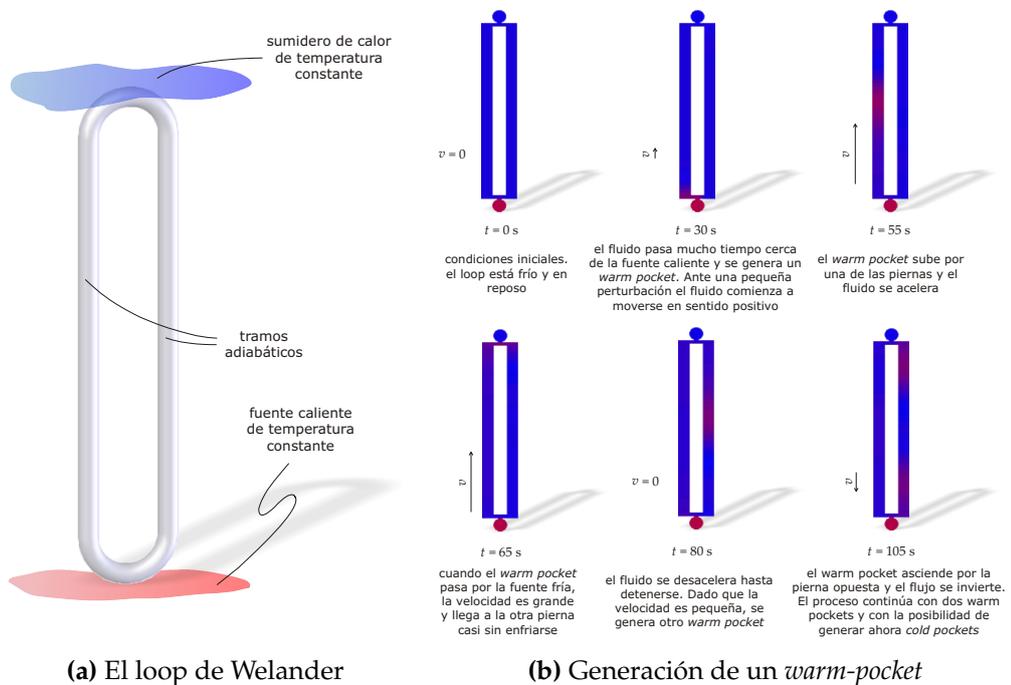


Figura 4.8: Explicación física del origen de la inestabilidad en loops de simple fase

de las piernas —que están mas frías que el warm pocket— el caudal aumenta sensiblemente debido a que este volumen tenderá a subir rápidamente. Al llegar a la parte superior, su velocidad será bastante grande y pasará rápidamente por la fuente fría, de manera que su temperatura será esencialmente la misma al ingresar a la pierna opuesta, con el efecto neto de una reducción en la fuerza boyante y la disminución de la velocidad del fluido. De esta manera, el warm pocket llegará hasta la parte inferior de loop con una velocidad pequeña y consecuentemente la anomalía volverá a producirse. Más aún, es posible que la desaceleración que produce el volumen caliente al ingresar en la pierna descendente sea tan grande que el fluido comience a moverse en dirección opuesta a la original, tal como ilustramos en la figura 4.8b.

4.4. Control basado en lógica difusa

Los controladores basados en lógica difusa proveen una herramienta extremadamente poderosa para atacar problemas no lineales de control, especialmente aquellos cuya dinámica es caótica (Theler, 2007; Tanaka et al., 1998). En particular, en esta sección desarrollamos un controlador difuso de Takagi-Sugeno (Takagi y Sugeno, 1985) basado en la aproximación de Lorenz, para estabilizar la solución estacionaria de caudal positivo (antihorario) en el loop toroidal de sección anular actuando sólo sobre la potencia instantánea entregada por el heater. Para ello, antes desarrollamos un controlador difuso para el sistema de Lorenz actuando sobre el parámetro r en función del vector de estado \mathbf{x} .

4.4.1. Control difuso del sistema de Lorenz

En la literatura (Tanaka y Wang, 2001; Lee et al., 2001) se suele presentar una versión extendida del sistema de Lorenz, aceptando una acción de control $\mathbf{u}(t)$ *ad-hoc* que aparece sumada explícitamente al miembro derecho del sistema de ecuaciones (3.1). Sin embargo, dado que el parámetro de control natural es r , conviene desarrollar un controlador que actúe sobre dicho parámetro para estabilizar uno de los puntos fijos inestables \mathbf{c} .

Supongamos que queremos estabilizar el punto fijo positivo

$$\mathbf{x}^* = [x^*, y^*, z^*]$$

que corresponde al valor nominal $r = r^*$ del parámetro de control r . Entonces

$$\begin{aligned} x^* &= +\sqrt{b(r^* - 1)} \\ y^* &= +\sqrt{b(r^* - 1)} \\ z^* &= r^* - 1 \end{aligned}$$

Vamos a reescribir el sistema de Lorenz poniendo el origen de coordenadas en el punto fijo a estabilizar x^* para poder encontrar un sistema difuso de Takagi-Sugeno lineal homogéneo y llevar el flujo controlado al nuevo origen. Definimos las nuevas variables como desplazamientos

$$\begin{aligned}\delta x &= x - x^* \\ \delta y &= y - y^* \\ \delta z &= z - z^*\end{aligned}$$

Ahora, el parámetro de control puede depender del tiempo alrededor de su valor nominal constante r^* de manera tal que

$$\delta r = r - r^*$$

Reemplazando en el sistema original (3.1) y teniendo en cuenta que x^* es un punto fijo para $r = r^*$, obtenemos

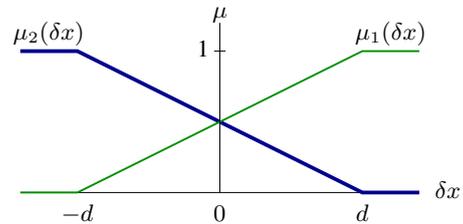
$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(\delta y - \delta x) \\ (r^* - z^*) \delta x - \delta y + (-x^* - \delta x) \delta z + (x^* + \delta x) \delta r \\ y^* \delta x + (x^* + \delta x) \delta y - b \delta z \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Este nuevo sistema dinámico no lineal (debido a los términos cruzados $\delta x \delta z$, $\delta x \delta y$ y $\delta x \delta r$) admite una representación exacta como modelo difuso de Takagi-Sugeno con sólo dos reglas difusas, mientras la variable δx se mantenga en un intervalo dado de la recta real. En efecto, el sistema difuso

$$\begin{aligned}\text{IF } \delta x \text{ IS } M_1 \text{ THEN } \delta \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -(x^* + d) \\ y^* & x^* + d & -b \end{bmatrix} \delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ x^* + d \\ 0 \end{bmatrix} \delta r \\ \text{IF } \delta x \text{ IS } M_2 \text{ THEN } \delta \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -(x^* - d) \\ y^* & x^* - d & -b \end{bmatrix} \delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ x^* - d \\ 0 \end{bmatrix} \delta r\end{aligned}$$

con las funciones de membresía

$$\begin{aligned}\mu_1(\delta x) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta x}{d} \right) \\ \mu_2(\delta x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta x}{d} \right)\end{aligned}$$



representa exactamente al sistema dinámico (4.29) para $\delta x \in [-d, d]$.

! No es necesario que los apartamientos $\delta \mathbf{x}$ sean pequeños —como estamos acostumbrados a pensar en el mundo lineal— para que el controlador de Takagi-Sugeno funcione. Si hubiésemos despreciado los términos cruzados de segundo orden en los desplazamientos, hubiésemos obtenido un sistema dinámico lineal susceptible de ser controlado por un controlador lineal estándar de variables de estado. Sin embargo, este controlador sólo asegura estabilidad lineal y lograría controlar el sistema no lineal original solamente cuando la órbita en el espacio de las fases pase por la cuenca de atracción del punto fijo del nuevo sistema dinámico controlado linealmente, que puede llegar a ser eventualmente muy pequeña. Por otro lado, es posible mostrar que la cuenca de atracción del punto fijo estabilizado con el controlador de Takagi-Sugeno es la región del espacio de las fases en la cual vale el sistema difuso (Tanaka y Wang, 2001), que puede llegar a ser arbitrariamente grande, mientras menor sea el error ϵ del modelo difuso del teorema 2.7. Es por eso que en este caso la notación δ implica sólo apartamiento en el sentido de diferencia y no de módulo pequeño.

El diseño del controlador consiste en encontrar las matrices de ganancia de variable de estado K_1 y K_2 de tamaño 1×3 tales que las acciones de control parciales

$$\delta r_i = K_i \delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

estabilicen el origen de cada uno de los dos subsistemas, según lo discutido en la sección 2.6.2. Para los parámetros nominales del sistema de Lorenz, el desplazamiento δx se mantiene en el intervalo $[-100 : 100]$ por lo que podemos tomar $d = 100$ para definir las funciones de membresía de los conjuntos difusos M_1 y M_2 . El controlador difuso de Takagi-Sugeno que proponemos es

$$\begin{aligned} \text{IF } \delta x \text{ IS } M_1 \text{ THEN } \delta r &= \begin{bmatrix} -0,032 & -0,27 & 0,98 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{x} \\ \text{IF } \delta x \text{ IS } M_2 \text{ THEN } \delta r &= \begin{bmatrix} -0,025 & -0,39 & 0,95 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{x} \end{aligned}$$

Un posible código fuzzy para implementar este controlador (ver el apéndice B sobre el software MELON) es el mostrado en el código 4.1. Este controlador provee una señal de control $r(t)$ que, aplicada al sistema original de ecuaciones (3.1), resulta en el comportamiento ilustrado en las figuras 4.9 y 4.10. Efectivamente vemos que el sistema alcanza el punto fijo \mathbf{x}^* que para r constante es caótico-inestable.

! Según discutimos en la sección 2.6.2, la estabilidad global debería demostrarse con un criterio más general que sólo el hecho de buscar que los subsistemas tengan matrices a lazo cerrado con autovalores con parte real estrictamente negativa. Sin embargo, un diseño artesanal y unas pruebas para

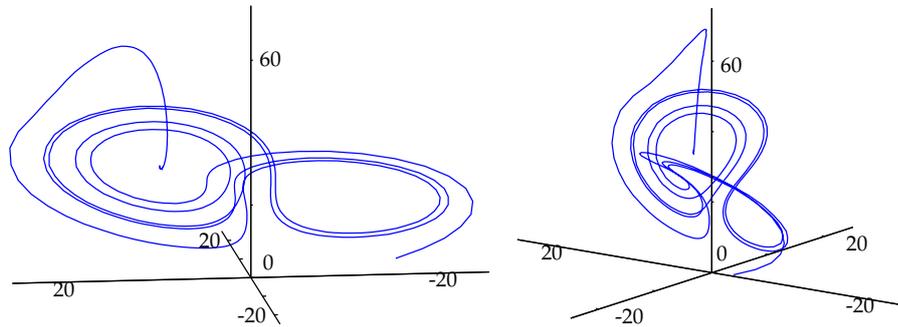


Figura 4.9: Control no lineal del sistema de Lorenz, actuando sobre el parámetro r . El control se inicia en un tiempo positivo, y logra estabilizar el punto fijo deseado.

```

# la simulacion tiene un tiempo adimensional, por lo que
# la frecuencia del controlador que sigue (en Hertz) es
# en principio arbitraria
SAMPLING FREQUENCY 500

# vector de estado y de control
VECTOR x 3 STATE
VECTOR delta_r 1 CONTROL

# extraemos la primer componente del vector x
# y definimos una variable independiente
VAR x1 VECTOR_ELEMENT x 1
VAR delta_r_var VECTOR_ELEMENT delta_r 1 GET_INIT

# instrucciones para comunicarse con la simulacion
READ x SHARED_MEM POSIX /lorenz-x
WRITE delta_r_var SHARED_MEM POSIX /lorenz-delta-r

# definicion de los conjutos difusos
FUZZY_SET m1 x1 LINEAR_SATURATED_RIGHT +100 200
FUZZY_SET m2 x1 LINEAR_SATURATED_LEFT -100 200

# las matrices de ganancia
MATRIX K1 1x3 -0.032 -0.27 0.98
MATRIX K2 1x3 -0.025 -0.39 0.95

# reglas difusas
IF x1 IS m1 THEN delta_r IS K1 x
IF x1 IS m2 THEN delta_r IS K2 x

```

Código 4.1: Código fuzzy para controlar el sistema de Lorenz

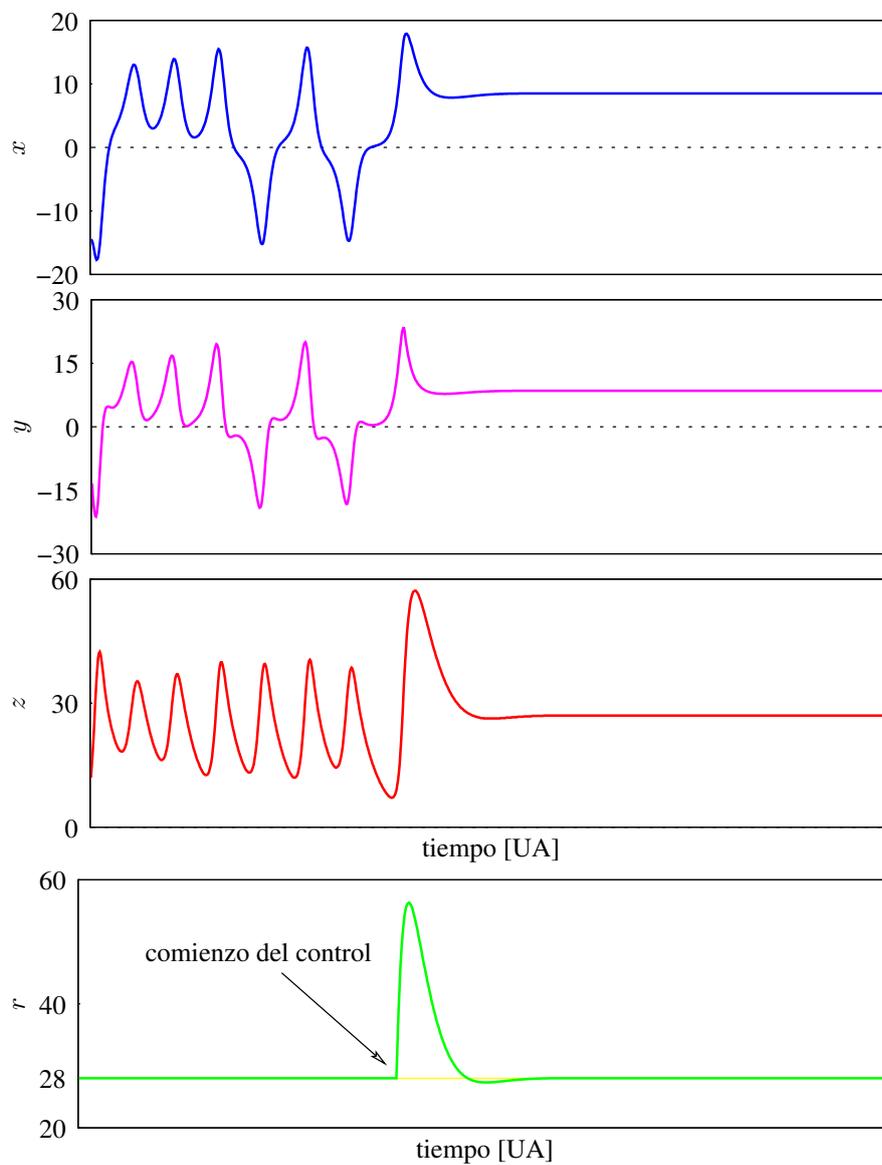


Figura 4.10: Control del sistema de Lorenz con los parámetros nominales, a través del parámetro de control r . El sistema se acerca asintóticamente al punto fijo x^* y al parámetro de control r^* .

diferentes condiciones iniciales —tiempos de inicio del control— son suficientes para mostrar que el controlador es capaz de estabilizar el punto fijo en todos los casos.

! En el código 4.1 definimos una frecuencia de muestreo finita ya que el software desarrollado para la aplicación del control contempla la posibilidad de dibujar en tiempo real el movimiento del vector de estado en el espacio de las fases (figura 4.11). El software de control también tiene un mecanismo de sincronización basado en semáforos que es apropiado para resolver simulaciones de control off-line que minimiza el tiempo de ejecución.

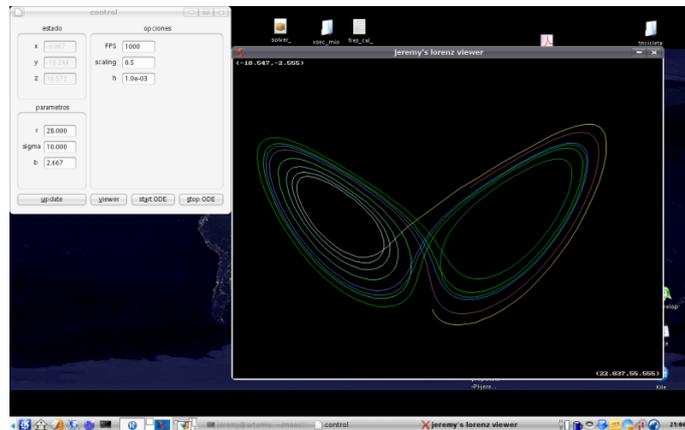


Figura 4.11: Screenshot del software de visualización en tiempo real del sistema de Lorenz

4.4.2. Control del loop toroidal

Teniendo en mente el controlador diseñado en la sección anterior, diseñamos ahora un controlador difuso para el loop toroidal actuando sobre la potencia eléctrica total disipada por el heater. Dado que el loop toroidal es aproximadamente equivalente al sistema de Lorenz, diseñamos las matrices de ganancia directamente fijando $b = 1$, $\sigma = 225$, $d = 300$ y $r^* = 9100$.

El controlador difuso propuesto en este caso es

$$\begin{aligned} \text{IF } \delta x \text{ IS } M_1 \text{ THEN } \delta r &= \begin{bmatrix} -15 & -15 & 100 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{x} \\ \text{IF } \delta x \text{ IS } M_2 \text{ THEN } \delta r &= \begin{bmatrix} -25 & 10 & 50 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{x} \end{aligned}$$

! Si bien diseñamos las matrices de ganancia a partir del modelo de Lorenz, aplicamos la acción de control a las ecuaciones originales en derivadas parciales. En los resultados que siguen no vuelve a aparecer el sistema de Lorenz.

```

# la frecuencia del controlador esta en hertz , pero la
# simulacion fue realizada escaleando el tiempo real
# 100 veces , por lo que la frecuencia efectiva es 5 Hz
SAMPLING FREQUENCY 500

VECTOR delta_x 3 STATE
VECTOR delta_r 1 CONTROL

VAR x1 VECTOR_ELEMENT delta_x 1
VAR delta_r_var VECTOR_ELEMENT delta_r 1

READ delta_x SHARED_MEM POSIX /toro-x
WRITE delta_r_var SHARED_MEM POSIX 1071 /toro-delta-r

LIMIT delta_r_var ABSOLUTE 8000

FUZZY_SET m1 x1 LINEAR_SATURATED_RIGHT +300 600
FUZZY_SET m2 x1 LINEAR_SATURATED_LEFT -300 600

MATRIX K1 1x3 -15 -15 100
MATRIX K2 1x3 -25 10 50

IF x1 IS m1 THEN delta_r IS K1 delta_x
IF x1 IS m2 THEN delta_r IS K2 delta_x

```

Código 4.2: Código fuzzy para controlar el loop toroidal

Resolvemos las ecuaciones de conservación dimensionales (4.5) y (4.9) acopladas, y en cada paso temporal utilizamos la potencia total instantánea Q calculada a partir de la acción de control δr como

$$Q = Q_0 \left(1 + \frac{\delta r}{r^*} \right)$$

El vector de estado δx que utiliza el controlador para calcular la acción de control δr tiene como primera componente la velocidad instantánea del fluido adimensionalizada con la ecuación (4.10) y como segunda y tercera componentes los coeficientes a_0 y b_0 del desarrollo de Fourier, calculados integrando el producto de la distribución instantánea de temperaturas adimensionalizada y $\cos \theta$ y $\sin \theta$ respectivamente.

En el listado 4.2 mostramos el código fuzzy para la implementación del controlador con el software MELON, y en la figura 4.12 el resultado del control difuso del loop toroidal. Allí comparamos el caso sin controlar —que resulta ser un ciclo límite— y tres casos controlados comenzando en diferentes instantes de tiempo.

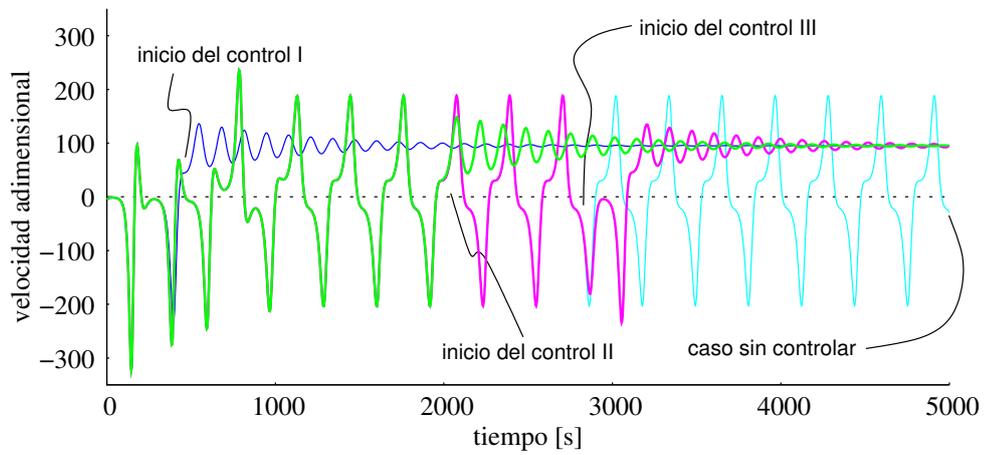


Figura 4.12: Control de un ciclo límite en el loop toroidal para una potencia nominal $Q_0 = 100$ W. Mostramos tres respuestas del sistema con diferentes instantes de inicio del control y la dinámica intrínseca del loop sin controlar para referencia.

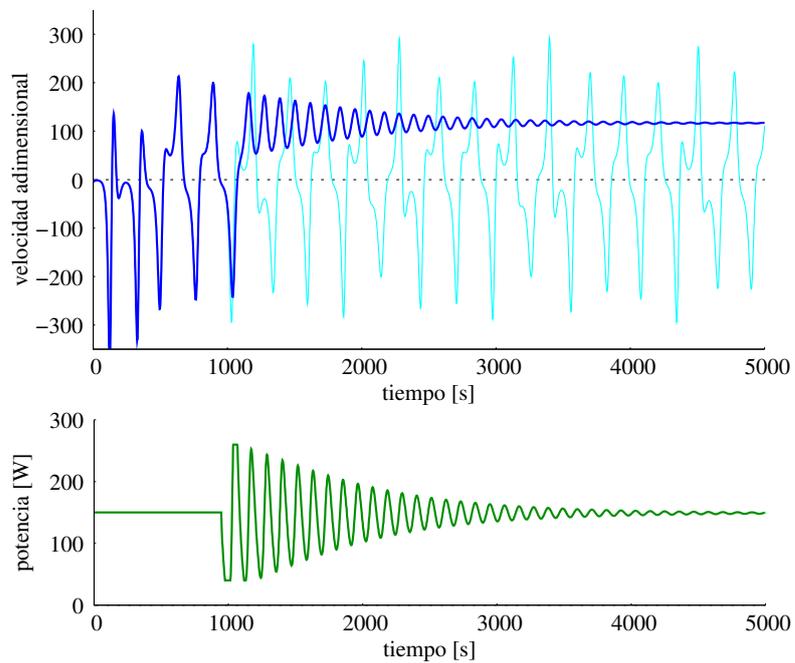


Figura 4.13: Control de un atractor caótico en el loop toroidal para una potencia nominal $Q_0 = 150$ W. En la acción de control se observa la aplicación de los límites sobre la potencia.

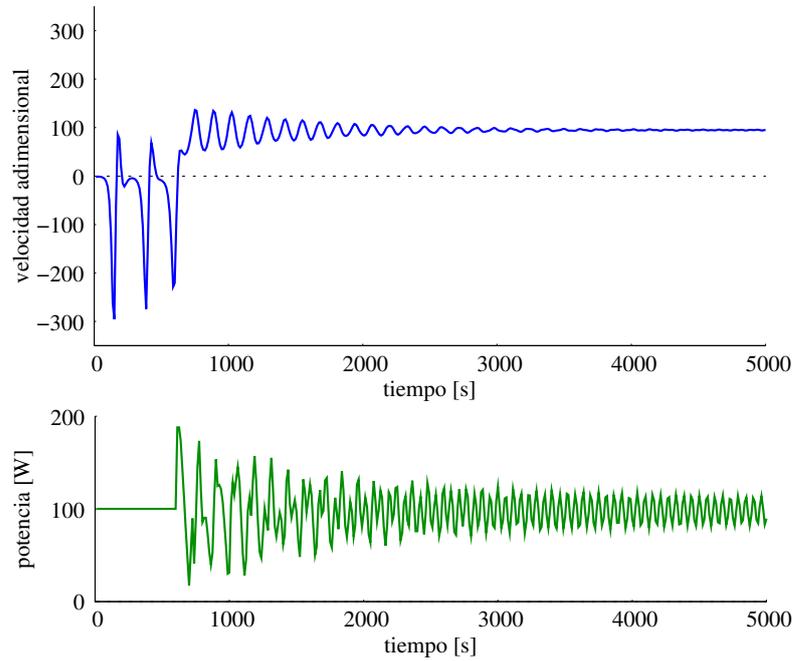


Figura 4.14: Control del loop toroidal aproximando los coeficientes de Fourier como diferencias de temperatura.

Si elevamos la potencia nominal a $Q_0 = 150 \text{ W}$ entonces el loop se comporta caóticamente. Mostramos en la figura 4.13 tanto la evolución temporal de la velocidad de circulación como de la acción de control para este caso, sin modificar las ganancias del controlador. El hecho de que el loop sea controlado satisfactoriamente muestra que el controlador implementado es robusto frente a cambios en los parámetros del sistema.

Finalmente, notamos que los coeficientes a_0 y b_0 que componen el vector de estado provienen de realizar una integración de la distribución de temperaturas en los 2π radianes. En una eventual implementación experimental, no es posible realizar esta integración por lo que si queremos utilizar las ideas de control desarrolladas en este capítulo debemos estimar la amplitud de estos coeficientes de Fourier. Suponiendo que disponemos de cuatro termocuplas equiespaciadas a partir de la posición $\theta = 0$ entonces podemos estimar

$$a_0 \approx \frac{1}{2} [\phi(0) - \phi(\pi)]$$

$$b_0 \approx \frac{1}{2} \left[\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \phi\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

Con este vector de estado, el resultado del control es el que mostramos en la

figura 4.14. Si bien el control está sujeto a un ruido que, en principio, parecería imposible de eliminar debido a la aproximación realizada, el controlador es capaz de estabilizar el caudal del loop, por lo que sería posible implementar experimentalmente el controlador difuso de la manera propuesta.

Inestabilidades neutrónicas

There is not the slightest indication that nuclear energy will ever be obtainable. It would mean that the atom would have to be shattered at will.

Albert Einstein, 1932

. . . any one who expects a source of power from the transformation of these atoms is talking moonshine. . .

Ernest Rutherford, 1933

There is little doubt that the most significant event affecting energy is the advent of nuclear power. . . a few decades hence, energy may be free—just like the unmetred air.

John von Neumann, 1955

Comenzamos en este punto el estudio de los fenómenos de inestabilidad que pueden llegar a darse en la dinámica de una población de neutrones en un medio multiplicativo, basando el enfoque principalmente en las ecuaciones de cinética puntual. Al igual que en el capítulo 4, estamos interesados en comprender la física básica del problema en vistas de un diseño conceptual inherentemente estable y no en los detalles finos de la cinética neutrónica espacial, herramienta más apropiada para una etapa de ingeniería básica o de detalle. En esta etapa estamos interesados en la evolución temporal de la potencia global como un todo sin prestar atención a efectos espaciales o perturbaciones localizadas. Estudiamos en este capítulo las ecuaciones de cinética puntual desde el punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos.

Si bien el concepto de inestabilidad de Lyapunov es una idea puramente matemática y el hecho de que un sistema no se mantenga dentro de un entorno dado para todo tiempo hace que el punto fijo sea clasificado como inestable, desde el punto de vista de la seguridad nuclear existe una gran asimetría entre aumentos y disminuciones de potencia. Es decir, si un reactor está trabajando en condiciones tales que una perturbación hace que éste se apague entonces

sería catalogado como estable por un ente regulador. En general entonces, un reactor nuclear es estable si se comporta de la forma en que fue diseñado, aún frente a perturbaciones en las condiciones de operación, concepto que no tiene por qué coincidir con el de Lyapunov.

5.1. Ecuaciones de cinética puntual

El análisis de las inestabilidades que proponemos en este capítulo se basa en las ecuaciones de cinética puntual, cuya deducción y análisis de soluciones particulares puede encontrarse en la literatura estándar sobre física de reactores. Henry (1975) deduce rigurosamente las ecuaciones que siguen a partir de la ecuación de difusión dependiente del tiempo, mientras que Duderstadt y Hamilton (1976) proveen un análisis más intuitivo. En cualquier caso, las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \sum_{i=1}^I \lambda_i c_i + q \\ \frac{dc_i}{dt} &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i\end{aligned}\tag{5.1}$$

Los símbolos que intervienen en la formulación del problema provienen de integrar en el espacio de las fases de las coordenadas espaciales, angulares y de energía las variables de la formulación original del problema en derivadas parciales con la ecuación de transporte y la aproximación de difusión, utilizando una función de peso en principio arbitraria pero que debe cumplir ciertas condiciones matemáticas (Henry, 1975). De todas maneras, para el análisis propuesto en este capítulo no es necesario tener en cuenta estos detalles y podemos tomar los parámetros del sistema (5.1) como datos conocidos *a priori*. La descripción cualitativa de las variables de las ecuaciones (5.1) es la que mostramos en la tabla 5.1.

En principio todas las variables pueden depender del tiempo. Sin embargo, para la mayoría de los transitorios y para una elección conveniente de la forma de llegar a las variables de la tabla 5.1 a partir del problema original, podemos suponer que la única variable que depende del tiempo —además de n y c_i — es la reactividad ρ . De hecho la utilidad de las ecuaciones de cinética puntual es que la única variable que fija la evolución temporal de la población neutrónica $n(t)$ es justamente la reactividad $\rho(t)$.

Para completar la formulación del problema, debemos especificar las condiciones iniciales $n(0)$ y $c_i(0)$ para las ecuaciones diferenciales (5.1). En particular, para el caso sin fuente con condición inicial en equilibrio, las concentraciones de precursores para una población estacionaria $n(0) = n^*$ resultan

n	número total de neutrones ^a
I	cantidad de grupos precursores de neutrones
c	concentración de precursores del i -ésimo grupo
ρ	reactividad total $((k_{\text{eff}} - 1) \cdot k_{\text{eff}}^{-1})$
β_i	fracción de precursores del i -ésimo grupo con respecto a la producción total de neutrones prompt más precursores
β	fracción total de neutrones retardados $(\sum \beta_i)$
λ_i	constante de decaimiento (<i>mean life</i>) de los precursores del i -ésimo grupo
Λ	tiempo medio entre nacimientos de neutrones de diferentes generaciones ^b
q	intensidad de una fuente de neutrones independiente

^aTodas las variables provienen de integrar espacialmente las variables correspondientes en la formulación de difusión multigrupo, utilizando una función de peso arbitraria. Sólo cuando esta función es idénticamente a la unidad, n coincide con el número total de neutrones.

^bSi el reactor está crítico, Λ es el tiempo de vida promedio de un neutrón.

Tabla 5.1: Descripción de las variables que intervienen en las ecuaciones de cinética puntual.

$$c_i(0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n^* \quad (5.2)$$

Finalmente, podemos notar que en ausencia de una fuente externa de neutrones el problema es homogéneo, por lo que es posible utilizar una escala arbitraria para las variables n y c_i . En particular, dado que la potencia térmica generada es proporcional a la población neutrónica, es válido —y a veces conveniente— escribir las ecuaciones de cinética puntual en función de la potencia térmica $P(t)$ en lugar de prestar atención a la variable $n(t)$.

5.2. Análisis de estabilidad lineal

Para continuar el estudio de inestabilidades en el problema acoplado termo-hidráulico-neutrónico, analizamos en este capítulo la estabilidad del sistema de ecuaciones de cinética puntual. Comenzamos utilizando herramientas de análisis lineal ya que es la forma tradicional de resolver el problema. De esta manera, no sólo realizamos una primera aproximación al análisis buscado sino también donde podemos aplicar las ideas desarrolladas hasta el momento podemos comparar los resultados arrojados por los diferentes métodos aplicados.

Nuevamente con el objetivo de realizar un análisis sobre la fenomenología del problema y no buscando una solución detallada, tomamos las ecuaciones de cinética puntual con sólo un grupo de precursores en lugar de los tradicionales $I = 6$, asignando como constante de decaimiento de los precursores el

promedio de las constantes de decaimiento de los seis grupos pesado con la fracciones de aparición retardada β_i correspondiente a cada grupo. Esta aproximación simplifica sensiblemente la matemática y al mismo tiempo mantiene la física original del sistema.

Consideremos las ecuaciones de cinética puntual en ausencia de una fuente externa de neutrones, tomando como vector de estado $\mathbf{x} = [n \ c]^T$ y vector de control $\mathbf{u} = [\rho]$. Entonces el problema queda expresado en la forma (2.20)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{n} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\rho - \beta)/\Lambda \cdot n + \lambda c \\ \beta/\Lambda \cdot n - \lambda c \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

El punto fijo $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ se alcanza cuando se anulan las derivadas

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\rho^* - \beta}{\Lambda} n^* + \lambda c^* \\ 0 &= \frac{\beta}{\Lambda} n^* - \lambda c^* \end{aligned}$$

con lo que, sumando miembro a miembro, obtenemos la condición necesaria para que el sistema esté en equilibrio

$$\rho^* \cdot \frac{n^*}{\Lambda} = 0 \quad (5.4)$$

Siendo esencialmente n^* y Λ positivos, para que exista un punto fijo debe ser necesariamente $\rho^* = 0$, que equivale al resultado conocido $k_{\text{eff}} = 1$. En este punto vale la pena aclarar que ρ es la reactividad neta, que depende de diversos factores tales como la reactividad en exceso del núcleo, la concentración venenos —tanto quemables originales, como presentes en el moderador, como productos de las fisiones—, la temperatura del combustible y del moderador, la posición de las barras de control y perturbaciones externas de reactividad tales como introducción de blancos para irradiación en el núcleo. Por lo tanto, la condición de $\rho^* = 0$ no es una condición tan simple como podría parecer a primera vista a partir de la expresión (5.4), sin realimentación. Por otro lado, esta condición justifica el resultado de la ecuación (5.2) en ausencia de una fuente externa.

Consideremos ahora una perturbación alrededor del punto fijo \mathbf{x}^* , reescribiendo el problema en función de las variables

$$\begin{aligned} \delta n &= n - n^* \\ \delta c &= c - c^* \\ \delta \rho &= \rho - \rho^* = \rho \end{aligned}$$

Reemplazando en el sistema (5.3) y teniendo en cuenta que x^* es un punto fijo, obtenemos

$$\begin{aligned}\delta\dot{n} &= \frac{n^*}{\Lambda}\delta\rho + \frac{\delta\rho\delta n}{\Lambda} - \frac{\beta}{\Lambda}\delta n + \lambda\delta c \\ \delta\dot{c} &= \frac{\beta}{\Lambda}\delta n - \lambda\delta c\end{aligned}\quad (5.5)$$

El sistema (5.5) es matemáticamente equivalente al sistema (5.3), y en él se puede apreciar explícitamente una no linealidad introducida por el término cruzado $(\delta\rho\delta n)/\Lambda$. En forma análoga, podemos ver que el sistema (5.3) es lineal sólo si ρ es constante, con lo que $\delta\rho = 0$. Por el momento y sólo con el objetivo de comparar resultados del análisis de estabilidad lineal y no lineal, supongamos que efectivamente ese término cruzado es pequeño comparado con los demás términos y prestemos atención al sistema lineal resultante. En la sección 5.3 retomamos el análisis del sistema no lineal (5.5) original.

En efecto, despreciando $\delta\rho\delta n$ frente a los demás términos y considerando al parámetro $\delta\rho(t)$ como una acción de control externa, obtenemos un sistema lineal de la forma (2.21)

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{n} \\ \delta\dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta/\Lambda & \lambda \\ \beta/\Lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta n \\ \delta c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n^*/\Lambda \\ 0 \end{bmatrix} \delta\rho \quad (5.6)$$

susceptible de ser analizado con las herramientas de la teoría de control lineal.

5.2.1. Estabilidad sin lazo de control

En este momento podríamos preguntarnos qué nos dice el teorema 2.3 de estabilidad lineal en el caso de que no tengamos en cuenta una acción de control de reactividad, es decir $\delta\rho = 0$. Los autovalores de la matriz del sistema (5.6) en este caso son

$$\begin{aligned}s_2 &= -\frac{\beta}{\Lambda} - \lambda \\ s_1 &= 0\end{aligned}$$

Dado que existe un autovalor con parte real nula, no vale el teorema 2.2 de Hartman-Grobman y nada se puede decir sobre la estabilidad lineal del sistema (5.6) sin lazo de control. De todas maneras continuemos el razonamiento utilizando las herramientas de la teoría de control clásico. Para calcular la función de transferencia de las ecuaciones de cinética puntual con respecto a la reactividad $\rho(t)$, transformamos Laplace la segunda ecuación de (5.6) y despejamos $\delta C(s)$

$$\delta C(s) = \frac{\beta}{\Lambda(s + \lambda)} \delta N(s)$$

Reemplazando en la transformada de Laplace de la primera ecuación del sistema (5.6) y resolviendo para $\delta N(s)$

$$\delta N(s) = \frac{n^*(s + \lambda)}{\Lambda s \left(s + \lambda + \frac{\beta}{\Lambda} \right)} \delta R(s)$$

donde $\delta R(s)$ es la transformada de Laplace de $\delta r(t)$. Luego la función de transferencia a lazo abierto $G(s) = \delta N(s)/\delta R(s)$ es

$$G(s) = \frac{n^*}{\Lambda} \cdot \frac{(s + \lambda)}{s \left(s + \lambda + \frac{\beta}{\Lambda} \right)} \quad (5.7)$$

cuyos polos coinciden justamente con los autovalores de la matriz característica del problema formulado en variables de estado (5.6). Desde este punto de vista entonces, podemos afirmar que la dinámica del sistema sin controlar es inestable frente a perturbaciones en la reactividad ya que el polo en el origen del plano de Laplace actúa como un integrador de la excitación $\rho(t)$, multiplicada por el factor n^*/Λ ¹. De esta manera, si la perturbación es positiva la población neutrónica aumentará monótonamente, y viceversa. Sin embargo, tal como hemos discutido en la sección 2.3, ninguna variable de estado puede aumentar indefinidamente. En efecto, para perturbaciones positivas la población neutrónica $n(t)$ eventualmente alcanzará un valor en el cual deje de valer el modelo (5.6) por un lado porque δn es demasiado grande y no vale la aproximación lineal y por otro porque un núcleo real en estas condiciones alcanzaría una condición de *core meltdown*, perdería su geometría original y sus materiales cambiarían sensiblemente sus propiedades nucleares, situación que mucho dista de las condiciones de aplicación de las ecuaciones de cinética puntual.

! El análisis lineal de estabilidad concluye que el punto fijo es no estable BIBO frente a perturbaciones en la acción de control $\delta\rho$, pero nada puede decir sobre su estabilidad en el sentido la definición 2.3 de Lyapunov que se refiere a perturbaciones en el espacio de las fases, debido a la existencia de un autovalor nulo. En la sección 5.3.1 analizamos numéricamente el sistema arribando finalmente a una conclusión sobre la estabilidad de Lyapunov del punto fijo $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

¹Podemos llegar a la misma conclusión notando que el término $(n^*\delta\rho)/\Lambda$ en la expresión de $\delta\dot{n}$ actúa como una fuente (o sumidero) externa de neutrones proporcional a la intensidad de la perturbación de reactividad $\delta\rho$.

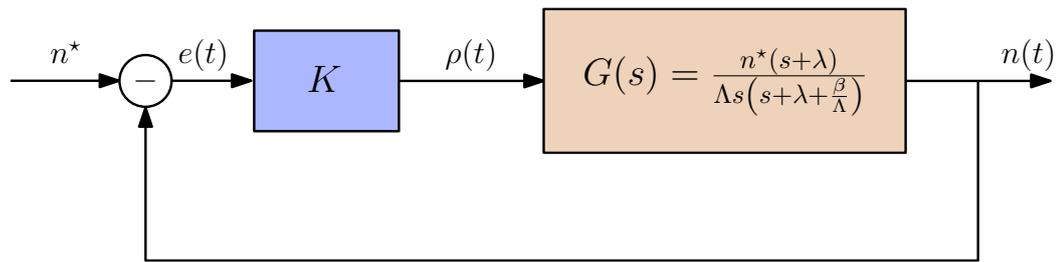


Figura 5.1: Esquema de control proporcional a lazo cerrado de las ecuaciones linealizadas de cinética puntual con un grupo de precursores.

! Las ecuaciones de cinética puntual no son estables BIBO ya que existe al menos una perturbación acotada (en particular $\delta\rho = \epsilon > 0$) que hace que el al menos una de las componentes del vector de estado aumente indefinidamente.

5.2.2. Estabilidad con lazo de control

No sólo es la reactividad ρ el único parámetro de control disponible con el cual modificar la potencia generada en el núcleo de un reactor nuclear y establecerla en un setpoint deseado, sino que la inestabilidad intrínseca analizada en la sección anterior hace que para lograr una cadena de fisión autosostenida y constante en el tiempo sea necesario implementar un lazo de control. De hecho, es posible mostrar que la condición de criticidad $k_{\text{eff}} = 1$ en la formulación de difusión multigrupo nunca se puede alcanzar estrictamente ya que el factor de multiplicación k_{eff} —y correspondientemente la reactividad ρ — es un autovalor de una matriz de coeficientes reales (Henry, 1975). Luego la probabilidad de que k_{eff} sea exactamente igual a uno es cero, por lo que en la práctica lo que se busca es implementar un sistema de control que haga que la reactividad se acerque asintóticamente a la condición de criticidad $\rho = 0$.

Supongamos que implementamos un compensador proporcional actuando sobre la reactividad $\rho(t)$ de tal manera que la función de transferencia a lazo abierto sea $KG(s)$ y a lazo cerrado realimentado negativamente (figura 5.1)

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

Queremos estudiar la estabilidad del sistema a lazo cerrado. En la figura 5.2 mostramos el diagrama de Nyquist —utilizando como función de prueba $KG(s)$ y observando lo que sucede alrededor del punto -1 — de la función de transferencia (5.7) normalizada

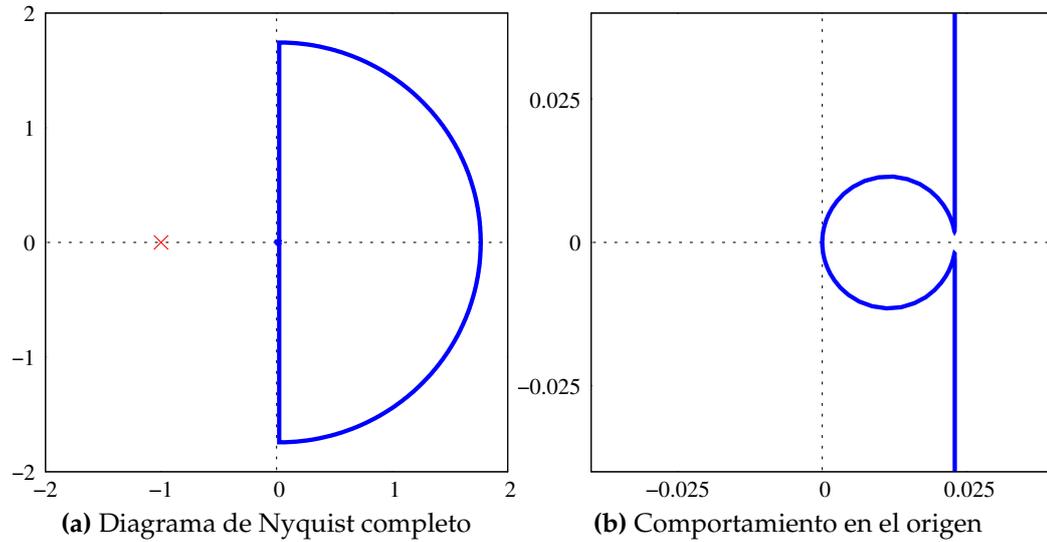


Figura 5.2: Diagrama de Nyquist de la función de transferencia (5.7) $G(i\omega)$ para las ecuaciones de cinética puntual a un grupo de precursores. El cierre por infinito fue realizado excluyendo el origen haciendo $s = re^{-i\theta}$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ con $r = 10^{-3}$.

$$G(s) = \frac{(s + \lambda)}{s \left(s + \lambda + \frac{\beta}{\Lambda} \right)}$$

para una ganancia unitaria $K = 1$ y con los parámetros

$$\begin{aligned} \beta &= 7,65 \times 10^{-3} \\ \lambda &= 7,59 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ \Lambda &= 1,76 \times 10^{-4} \text{ s} \end{aligned}$$

tomados del modelo de cinética puntual de un reactor de investigación (Etchepareborda, 2007). Vemos allí que el diagrama no encierra el punto $(-1,0)$, y como $G(s)$ no tiene ceros en el semiplano derecho, entonces la función de transferencia a lazo cerrado no tiene polos en el semiplano derecho del plano complejo. Luego el sistema es estable para la ganancia $K = 1$ propuesta. Más aún, el sistema es estable para cualquier K ya que el efecto la ganancia es escalar el diagrama sin modificar su forma, y en ningún caso éste encierra al punto $(-1,0)$.

A pesar de que el controlador propuesto es incondicionalmente estable según el criterio de Nyquist, tenemos que tener en cuenta que las ecuaciones a partir de las cuales deducimos la función de transferencia son una aproximación lineal de las ecuaciones generales de cinética puntual que, a su vez, no

tienen en cuenta efectos de realimentación por temperatura o por fracción de vacío ni perturbaciones de reactividad externas. Más aún, en general la acción de control no se realiza directamente sobre la reactividad ρ sino sobre servomecanismos o sistemas hidráulicos que son los que mueven finalmente las barras de control. Estos efectos introducen por un lado retardos de fase que contribuyen a inestabilizar el sistema y por otro no linealidades que invalidan el análisis lineal realizado. De todas maneras, el resultado de estabilidad mostrado por el diagrama de Nyquist de la figura 5.2 es un buen punto de partida para comenzar a agregar efectos complejos al sistema dinámico bajo análisis.

5.3. Efectos no lineales

El coeficiente k_{eff} —o en forma equivalente la reactividad ρ — es una propiedad del núcleo como un todo y depende de una gran cantidad de factores de diversa índole, tales como

- la reactividad en exceso inicial del núcleo fresco
- el quemado del combustible, venenos quemables e isótopos fértiles
- la distribución y evolución temporal de concentración de ^{135}Xe
- la distribución de temperaturas en los diferentes materiales que componen el núcleo
- la distribución de fracción de vacío del refrigerante
- la distribución de concentración de ^{10}Bo en el moderador
- la posición de las barras de control

Es claro que la reactividad neta depende entonces de muchas variables y, más aún, del detalles de su distribución espacial. En particular depende de la potencia P , lo que implica que $\rho = \rho(n)$ y las ecuaciones (5.1) son esencialmente no lineales debido al producto $n \cdot \rho(n)$. Es por eso que en lo que resta del capítulo trabajamos con el sistema no lineal original, estudiando casos que no son susceptibles de ser analizados —al menos directamente— con técnicas tradicionales.

5.3.1. Estabilidad de Lyapunov

En la sección 5.2.1 concluimos que no es posible asegurar nada sobre la estabilidad lineal en el sentido de Lyapunov del punto fijo $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ debido que la matriz del sistema tiene un autovalor nulo. En esta sección realizamos un

análisis detallado del problema de la estabilidad del punto fijo, primero resolviendo numéricamente las ecuaciones resultantes y luego interpretando los resultados desde el punto de vista de la física de reactores.

Para estudiar numéricamente si pequeñas perturbaciones en el espacio de las fases hacen que el sistema vuelva al equilibrio o se aleje del punto fijo, consideremos nuevamente el sistema dinámico (5.3) con $\rho = 0$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{n} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta/\Lambda \cdot n + \lambda c \\ \beta/\Lambda \cdot n - \lambda c \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

que es un sistema dinámico lineal con una matriz singular. Para un $n = n_0$ dado, la concentración de equilibrio es

$$c_0(n_0) = \frac{\beta}{\Lambda\lambda} n_0 \quad (5.9)$$

por lo que el vector

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} n_0 \\ \frac{\beta}{\Lambda\lambda} n_0 \end{bmatrix}$$

también es un punto fijo del sistema dinámico (5.8). En particular, llamamos $\mathbf{x}^* = [n^* c^*]^T$ al punto de diseño del sistema cuya estabilidad queremos investigar. En un espacio de las fases adimensional, definimos

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} n/n^* \\ c/c^* \end{bmatrix}$$

Luego, en virtud de la ecuación (5.9), cualquier punto que esté en la diagonal del primer cuadrante del espacio de las fases adimensional es un punto fijo del sistema, resultado consistente con el hecho de que el núcleo —en el sentido del álgebra lineal— de la matriz tiene dimensión uno. Para estudiar la estabilidad de Lyapunov del punto $\tilde{\mathbf{x}}^* = [1 \ 1]^T$, resolvemos el sistema dinámico 5.8 para diferentes condiciones iniciales ubicadas en una circunferencia de centro $\tilde{\mathbf{x}}^*$ y radio $r = 0,05$. Como vemos en la figura 5.3, en todos los casos, el sistema evoluciona hacia algún punto fijo ubicado en la recta $c/c^* = n/n^*$. Luego el punto $\mathbf{x} = [n^* c^*]^T$ es estable en el sentido de Lyapunov, ya que una perturbación en el espacio de las fases hace que el retrato resultante no abandone el entorno ϵ definido por el cuadrado circunscrito por la circunferencia que contiene las perturbaciones iniciales $\delta(\epsilon)$. Sin embargo, no es *asintóticamente* estable, ya que el sistema no retorna al punto fijo inicial sino que lo hace a algún otro de los infinitos puntos fijos posibles.

Podemos explicar este comportamiento siguiendo una discusión propuesta durante el curso de Física de Reactores de la Carrera de Ingeniería Nuclear del Instituto Balseiro (Gho, 2005). Se puede demostrar matemáticamente que

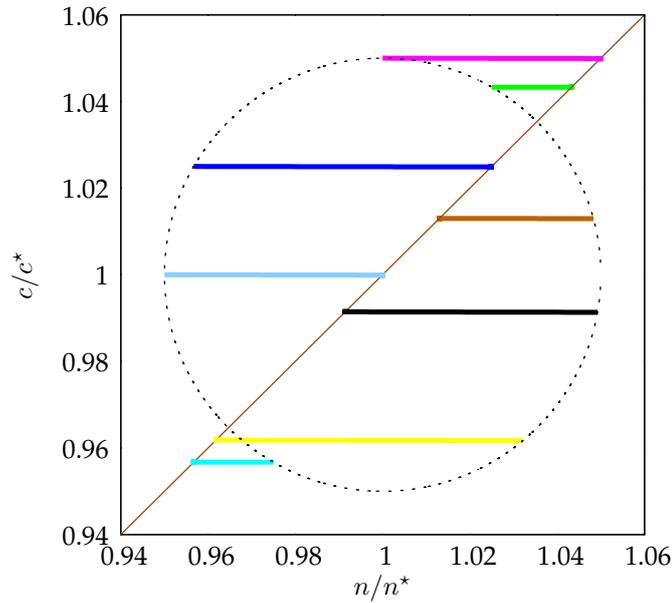


Figura 5.3: Estudio de la estabilidad de Lyapunov de las ecuaciones de cinética puntual (5.8). La recta $c/c^* = n/n^*$ es el núcleo de la matriz del sistema, por lo que cualquier punto que esté en ella es punto fijo del sistema. Las condiciones iniciales fueron tomadas variando sobre la circunferencia mostrada, que tiene un radio igual al 5% de las variables normalizadas. Todos los casos convergen asintóticamente a la recta $c/c^* = n/n^*$ y en particular, nunca abandonan el entorno ilustrado. Luego el punto fijo $(1, 1)$ es Lyapunov-estable.

al introducir instantáneamente Q_0 neutrones en un reactor crítico, a tiempos largos la población se incrementa no en ese valor sino en una fracción aproximada $\lambda\Lambda/\beta$ de Q_0 . El resto de los neutrones quedan “almacenados” en forma de precursores. Además, podemos ver que en un reactor crítico $\rho = 0$, por lo que

$$\dot{n} + \dot{c} = 0$$

y la suma $n+c$ es constante. Para ilustrar el carácter complementario de neutrones y precursores, supongamos que introducimos un neutrón determinístico extra en un núcleo crítico, que vive exactamente un tiempo Λ y se multiplica por un factor $(1 - \beta)$, y que los neutrones retardados aparecen exactamente un tiempo $1/\lambda$ después de la fisión. Para tiempos mucho menores que $1/\lambda$, el neutrón extra se habrá transformado sucesivamente en fracciones

$$\delta n(t + \Lambda) = (1 - \beta)\delta n(t)$$

Podemos estimar la derivada de δn como

$$\delta \dot{n}(t \ll 1/\lambda) \approx \frac{(1 - \beta)\delta n(t) - \delta n(t)}{\Lambda} = -\frac{\beta}{\Lambda}\delta n(t) \Rightarrow \delta n(t) = e^{-\frac{\beta}{\Lambda}t}$$

Como en ese lapso el precursor no decae y $\delta n + \delta c = 1$, entonces

$$\delta \dot{c}(t \ll 1/\lambda) \approx \frac{\beta}{\Lambda} \delta n(t) \Rightarrow \delta c(t) = 1 - e^{-\frac{\beta}{\Lambda} t}$$

Esto es, para $t \ll 1/\lambda$ el neutrón extra va desapareciendo y transformándose en fracciones de un neutrón cada vez menores, mientras que la concentración de precursores extra aumenta, ambos con una constante de tiempo β/Λ . Si $\Lambda/\beta \ll 1/\lambda$, entonces para tiempos $t \lesssim 1/\lambda$ el neutrón prácticamente habrá desaparecido. Al llegar a $t = 1/\lambda$, el precursor decae, aparece un nuevo neutrón extra y el proceso se repite. En la figura 5.4 ilustramos este razonamiento. El resultado es que, en promedio, la población neutrónica aumenta en una cantidad igual al valor medio de $\delta n(t)$ en el intervalo $[0, 1/\lambda]$

$$\langle \delta n \rangle = \frac{1}{1/\lambda} \int_0^{1/\lambda} \exp\left(-\frac{\beta}{\Lambda} \cdot t\right) dt \quad (5.10)$$

Para $\lambda \ll \beta/\Lambda$, resulta

$$\langle \delta n \rangle \approx \frac{\lambda \Lambda}{\beta} \quad (5.11)$$

que es el mismo resultado al que se llega por un razonamiento matemático más riguroso. El sistema sigue estando crítico y alcanza un nuevo punto de equilibrio dado por la nueva población neutrónica y la correspondiente concentración de precursores, ambas diferentes a los valores previos a la inserción del neutrón extra.

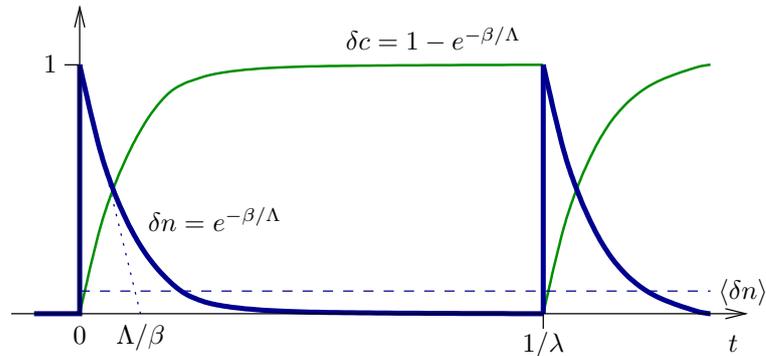


Figura 5.4: Ilustración cualitativa de la evolución temporal de la población neutrónica y de los precursores si a tiempo $t = 0$ se introduce un neutrón determinístico.

! Es interesante notar que si bien hemos insertado un neutrón, la nueva población neutrónica no se incrementa en uno sino que aumenta en una pequeña fracción $\lambda\Lambda/\beta$. El neutrón aparece en el sistema efectivamente “almacenado” bajo la forma de $(1 - \lambda\Lambda/\beta)$ precursores.

Este razonamiento cualitativo explica la figura 5.3, que proviene de modificar instantánea y simultáneamente tanto la población neutrónica como la concentración de precursores en un reactor crítico en equilibrio. En este caso general en el que agregamos —o quitamos— no sólo neutrones sino también precursores, podemos hacer un análisis completamente análogo llegando a la conclusión de que el sistema alcanzará un nuevo punto de equilibrio, que es un punto del espacio de las fases perteneciente al subespacio $c/c^* = n/n^*$.

Por otro lado, el hecho de que las órbitas sean esencialmente horizontales en la figura 5.3 tiene que ver con que $\lambda \ll \beta/\Lambda$ para la mayoría de los parámetros neutrónicos de los reactores térmicos. En particular, en el caso de los valores del reactor estudiado resulta

$$\begin{aligned}\lambda &= 7 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ \frac{\beta}{\Lambda} &= 40 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

por lo que efectivamente $\lambda \ll \beta/\Lambda$ y $\delta\bar{n} = \Lambda\lambda\beta^{-1}$. Si las condiciones previas a la perturbación eran $n = n^*$ y $c = c^*$, entonces la nueva concentración de precursores de equilibrio es

$$c_0 = \frac{\beta}{\lambda\Lambda} \left(1 + \frac{\lambda\Lambda}{\beta}\right) n^* \approx \frac{\beta}{\lambda\Lambda} n^* = c^* \quad (5.12)$$

y el movimiento es esencialmente horizontal en el espacio de las fases.

! Si λ es del orden de β/Λ , entonces ni $\langle\delta n\rangle$ está dada por la ecuación (5.11) ni vale el signo de aproximación en la ecuación (5.12), por lo que las órbitas resultantes no son horizontales. Sin embargo, se puede demostrar que siempre las trayectorias son rectas de pendiente -1 en el plano n vs. c .

! El análisis lineal de la estabilidad concluye que el sistema es no estale BIBO frente a perturbaciones en la reactividad ρ , mientras que un análisis numérico-cualitativo concluye que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov. Este resultado ilustra por un lado el hecho de que efectivamente existen diferentes conceptos relacionados con la estabilidad y por otro una propiedad patológica de las ecuaciones de cinética puntual sin realimentación.

5.3.2. Realimentación

Las ecuaciones de cinética puntual analizadas hasta el momento se suelen llamar ecuaciones a potencia cero, ya que ignoran los efectos que la modificación de la propia potencia generada tiene sobre las propiedades de moderación y absorción neutrónicas de los materiales presentes en el núcleo del reactor, que a su vez modifican la reactividad del núcleo. Podemos clasificar los mecanismos de realimentación en tres categorías:

- i.* Efectos de realimentación interna tales como modificación de la temperatura y fracción de vacío del moderador o producción de xenón y samario.
- ii.* Acople del reactor a elementos externos tales como generadores de vapor, turbinas y redes eléctricas que producen cambios en las condiciones de operación del núcleo.
- iii.* Sistemas de control de reactividad tales como barras de control, envenenamiento del moderador y estrategia de recambio de combustibles.

La incorporación de cualquiera de estos efectos hace que necesariamente debamos aumentar al menos en una unidad el orden del sistema dinámico estudiado, pasando esencialmente de un caso de orden dos a órdenes superiores, cuyo comportamiento puede llegar a ser mucho más complejo. Si bien es posible aún linealizar los sistemas resultantes y utilizar técnicas de análisis lineal en estos casos más generales (Lewins, 1978), es apropiado aquí realizar un estudio numérico de las ecuaciones de cinética puntual con realimentaciones y aplicar las herramientas de análisis no lineal desarrolladas en este trabajo, ya que una aproximación lineal elimina sistemáticamente los potenciales comportamientos complejos de un sistema no lineal de orden mayor que dos.

5.3.3. Coeficientes de reactividad

La forma más básica de incorporar los efectos de la realimentación interna es mediante los coeficientes de reactividad debido a la variación de alguna variable tal como la fracción de vacío o la temperatura del moderador. Definimos el coeficiente de reactividad debido a la variable x como

$$\alpha_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (5.13)$$

de forma tal que el cambio de reactividad introducido por una variación δx es

$$\delta \rho \approx \alpha_x \cdot \delta x$$

De particular interés resultan los coeficientes de vacío y de temperatura de los diversos componentes del núcleo, ya que son éstos los parámetros que se modifican en casi todos los transitorios que se pueden dar en operación normal, en condiciones de arranque o en secuencias accidentales. Está claro que por un lado estos coeficientes, definidos según la ecuación (5.13) varían en el tiempo según cambien las condiciones operativas del reactor. Por otro lado, la aproximación lineal (5.3.3) vale sólo para pequeños cambios de la variable x . De todas maneras, los coeficientes de reactividad son un concepto importante en la ingeniería conceptual de un reactor nuclear y suelen formar parte de los objetivos de diseño y de las condiciones de planta que forman parte las

base de diseño del reactor (Florido et al., 2007)². A continuación discutimos las variables más importantes que dan lugar a realimentaciones internas de reactividad.

Fracción de vacío El cambio local de la fracción de vacío v del refrigerante introduce en cambio de reactividad debido a que el vapor —esencialmente vacío— tiene propiedades de moderación y absorción sensiblemente diferentes a las del bulk del fluido. El coeficiente de vacío α_v depende de muchos factores, incluidos la ubicación de la perturbación, de la potencia térmica del reactor y de las condiciones termohidráulicas de la envuelta de presión. Más aún, los procesos físicos de generación y transporte de burbujas son fenómenos complejos difíciles de modelar. De todas maneras, el coeficiente de vacío α_v es uno de los parámetros de diseño más importantes en un reactor nuclear de potencia, y juega un especial papel en el desarrollo de transitorios, tal como lamentablemente ilustra la tristemente célebre unidad número cuatro (Mochizuki, 2007).

Temperatura del combustible Un aumento en la temperatura T_{fuel} afecta diferentes propiedades del combustible, tales como su densidad y dimensiones geométricas. De todas maneras, el efecto más importante de la temperatura es el ensanchamiento Doppler de las secciones eficaces de absorción resonantes, disminuyendo la probabilidad de escape a las resonancias y por lo tanto introduciendo una reactividad negativa. Sin embargo, el burn-up del combustible original y la aparición de ^{239}Pu afectan el coeficiente $\alpha_{T_{\text{fuel}}}$ y pueden hacer incluso que cambie de signo durante el ciclo de operación del combustible.

Temperatura del moderador No sólo las propiedades de moderación varían con la temperatura T_{mod} debido al cambio de densidad, sino que el espectro en energía de los neutrones termalizados depende fuertemente de la temperatura del moderador. Debido a que las secciones eficaces de los isótopos físi les no es $1/v$, esto implica un cambio en el balance neutrónico y por ende de reactividad. Ciertamente el coeficiente $\alpha_{T_{\text{mod}}}$ depende de la misma temperatura del moderador, y sus efectos y magnitud son diferentes en reactores experimentales y de potencia, y varían incluso fuertemente entre los diseños actuales de reactores comerciales.

²La elección de los accidentes que están dentro de la base de diseño de un reactor nuclear tiene que ver directamente con los aspectos regulatorios. En este sentido, no sólo deben considerarse las consecuencias de tener coeficientes de reactividad positivos sino también la probabilidad de ocurrencia de los eventos iniciantes involucrados, junto con una evaluación de mejor estimación de la evolución de la planta como un todo. Resaltamos nuevamente que este trabajo es meramente académico y no intenta profundizar en temas particulares de seguridad nuclear.

Temperatura del refrigerante Este coeficiente se aplica sólo en reactores donde el refrigerante está separado del moderador. Su contribución a la reactividad total es pequeño, aunque la temperatura T_{cool} del refrigerante suele afectar el balance térmico del núcleo y modificar la temperatura de otros materiales cuya importancia desde el punto de vista neutrónico es más importante.

5.3.4. Fórmula de perturbaciones

Los coeficientes de realimentación no suelen ser ni uniformes en todo el núcleo ni constantes en el tiempo, pero en etapas de ingeniería conceptual tal vez lo único que tengamos sea —en el mejor de los casos— una estimación de los objetivos de diseño, por lo que la utilización de coeficientes es lo mejor que podemos hacer para tener en cuenta los efectos de realimentación internos. Por otro lado, si conocemos la distribución axial de flujo neutrónico $\Phi(\mathbf{x}, E)$ de estado estacionario y de su adjunto $\Phi^\dagger(\mathbf{x}, E)$, y sabemos cómo dependen las secciones eficaces macroscópicas de fisión $\nu\Sigma_f(E)$ y de absorción $\Sigma_a(E)$ en función de las condiciones del combustible y del refrigerante, entonces podemos utilizar la teoría de perturbaciones (Henry, 1975) para calcular la variación de reactividad introducida por los efectos de realimentación interna como

$$\rho = - \frac{\int_V \int_0^\infty \Phi^\dagger(\mathbf{x}, E) \cdot (\delta\Sigma_a + \delta\nu\Sigma_f) \cdot \Phi(\mathbf{x}, E) dE d\mathbf{x}}{\int_V \int_0^\infty \Phi^\dagger(\mathbf{x}, E) \cdot \nu\Sigma_f \cdot \Phi(\mathbf{x}, E) dE d\mathbf{x}} \quad (5.14)$$

donde la integral espacial debe ser realizada sobre el volumen del núcleo.

Si bien la ecuación (5.14) se basa en una aproximación a primer orden, evitamos así recurrir a la utilización de coeficientes fijos de realimentación para calcular los efectos introducidos por cambios en las distribuciones de temperaturas y de fracción de vacío. En particular, en una formulación a un grupo de energías el flujo adjunto es igual al flujo directo

$$\Phi^\dagger(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$$

y la fórmula para el cálculo de la reactividad se simplifica a

$$\rho = - \frac{\int_V \Phi^2(\mathbf{x}) \cdot (\delta\Sigma_a + \delta\nu\Sigma_f) d\mathbf{x}}{\int_V \Phi^2(\mathbf{x}) \cdot \nu\Sigma_f d\mathbf{x}}$$

5.4. Mapas de estabilidad

Tanto la magnitud como el signo de los cuatro coeficientes discutidos depende de las condiciones operativas del reactor, por lo que un cálculo detallado de transitorios necesita una formulación más precisa de los efectos de realimentación neutrónica por condiciones termohidráulicas. De todas maneras, es útil tener una idea cualitativa de la clase de comportamiento que esperaríamos para ciertas combinaciones de coeficientes de reactividad constantes. Por ejemplo, está claro que si todos los coeficientes de realimentación son positivos el reactor es inestable mientras que si son todos negativos es estable. Pero podríamos preguntarnos qué sucede cuando los coeficientes tienen signos diferentes.

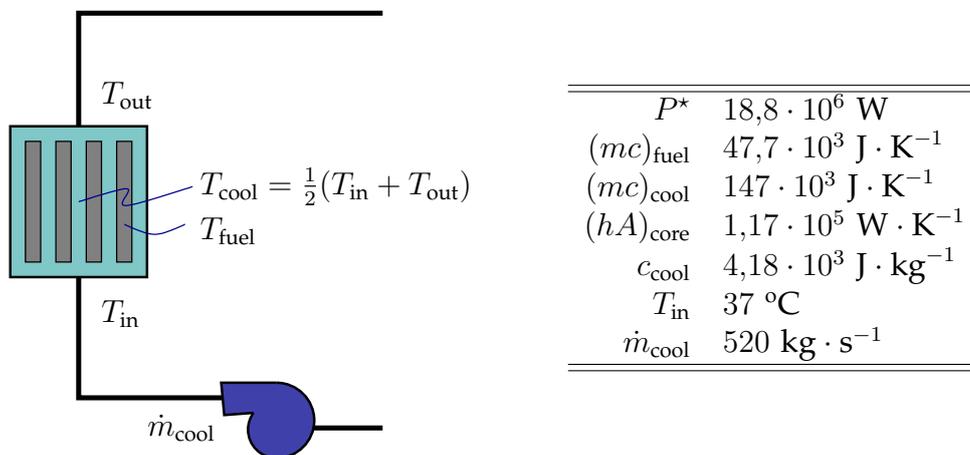


Figura 5.5: Modelo térmico cero dimensional del núcleo de un reactor de investigación de 20 MW de potencia térmica nominal. La temperatura T_{in} de entrada es constante y está fijada por un sistema de control independiente.

En la figura 5.5 mostramos un modelo de parámetros concentrados del núcleo de un reactor experimental junto con un set de parámetros que resultan en una dinámica similar a la del simulador de entrenamiento desarrollado para el proyecto (Etchepareborda, 2007). Una bomba provee un caudal de refrigeración constante \dot{m}_{cool} y un sistema de control independiente fija la temperatura de entrada al núcleo a un valor T_{in} . El reactor está diseñado para generar una potencia térmica P^* , correspondiendo a una concentración de precursores en equilibrio c^* y temperaturas de combustible³ y refrigerante T_{fuel}^* y T_{cool}^* respectivamente.

³La temperatura del combustible tomada es un valor medio de la distribución normal al sentido de circulación del refrigerante de forma tal de poder escribir el flujo de calor como el producto de un coeficiente por un salto térmico. Discutimos en forma más detallada la forma de obtener el promedio en la sección 7.1.2.

Teniendo en cuenta que el moderador es el mismo refrigerante⁴ y suponiendo que podemos incluir los efectos de la fracción de vacío en el coeficiente $\alpha_{T_{\text{fuel}}}$, escribimos las ecuaciones de cinética puntual directamente en función de la potencia $P(t)$ como

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \frac{\rho_{\text{ctrl}} + \rho_{\text{ext}} + \alpha_{T_{\text{fuel}}}(T_{\text{fuel}} - T_{\text{fuel}}^*) + \alpha_{T_{\text{cool}}}(T_{\text{cool}} - T_{\text{cool}}^*) - \beta}{\Lambda} P + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i \\ \dot{c}_j &= \frac{\beta_j}{\Lambda} P - \lambda_j c_j.\end{aligned}\quad (5.15)$$

donde separamos explícitamente la reactividad introducida por el sistema de control ρ_{ctrl} y perturbaciones externas ρ_{ext} como por ejemplo la inserción de muestras para irradiación in-core.

Para calcular la evolución temporal de las temperaturas en cuestión, proponemos modelos cero-dimensionales de parámetros concentrados y coeficientes de transferencia constantes. Para el combustible, tenemos

$$\dot{T}_{\text{fuel}} = \frac{1}{(mc)_{\text{fuel}}} \left[P - (hA)_{\text{core}} \cdot (T_{\text{fuel}} - T_{\text{cool}}) \right]$$

Definiendo la temperatura del refrigerante como el promedio entre T_{in} y T_{out} , y tomando un volumen de control en el núcleo, resulta

$$\dot{T}_{\text{cool}} = \frac{1}{(mc)_{\text{cool}}} \left[(hA)_{\text{core}} \cdot (T_{\text{fuel}} - T_{\text{cool}}) - \dot{m}_{\text{cool}} \cdot c_{\text{cool}} \cdot 2(T_{\text{cool}} - T_{\text{in}}) \right] \quad (5.16)$$

Las ecuaciones (5.15), (5.16) y (5.4) constituyen un sistema dinámico de orden cuatro con dos parámetros de control, ρ_{ctrl} y ρ_{ext} . Fijada la potencia P^* , las componentes del punto fijo

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} P^* \\ c_1^* \\ \vdots \\ c_6^* \\ T_{\text{fuel}}^* \\ T_{\text{cool}}^* \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

son

⁴En realidad algunos reactores de este tipo suelen tener un reflector de algún material moderador, pero en este modelo no tenemos en cuenta los efectos del reflector que —por otro lado— tiene una inercia térmica mucho mayor que el resto de los componentes.

$$\begin{aligned}
c_j^* &= \frac{\beta_j}{\Lambda \lambda_j} P^* \\
T_{\text{cool}}^* &= \frac{P^* + 2 \cdot \dot{m}_{\text{cool}} \cdot c_{\text{cool}} \cdot T_{\text{in}}}{2 \cdot \dot{m}_{\text{cool}} \cdot c_{\text{cool}}} \\
T_{\text{fuel}}^* &= \frac{P^* + (hA)_{\text{core}} \cdot T_{\text{cool}}^*}{(hA)_{\text{core}}}
\end{aligned}$$

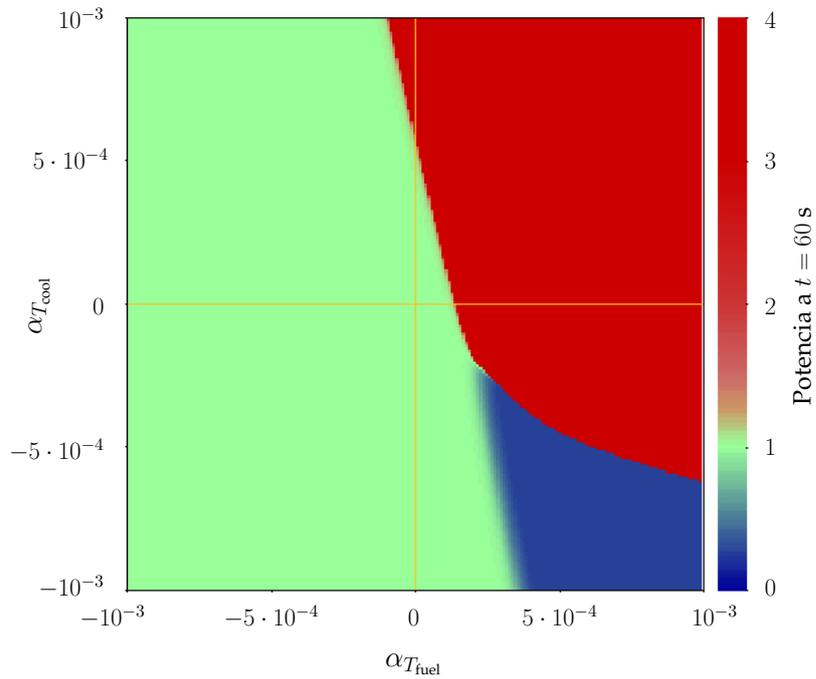
5.4.1. Mapa de estabilidad

Es de esperar que un reactor que tenga sus dos coeficientes de temperaturas negativos sea estable, y viceversa. Pero el caso en el que los coeficientes tienen signos diferentes no es trivial debido a los diferentes tiempos característicos de los transitorios térmicos en el combustible y en el refrigerante. Podemos estudiar la estabilidad del punto fijo (5.17) en función de $\alpha_{T_{\text{fuel}}}$ y $\alpha_{T_{\text{cool}}}$ aplicando las ideas desarrolladas en el capítulo 3 y construir mapas de estabilidad análogos a los obtenidos para el sistema de Lorenz en la figura 3.12.

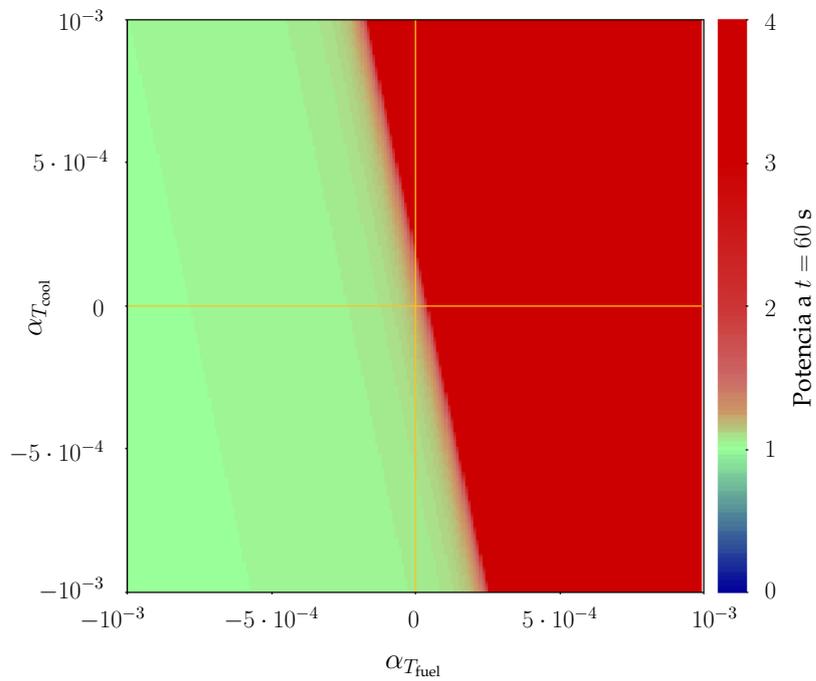
De todas maneras, el caso del sistema dinámico bajo estudio es esencialmente diferente al sistema de Lorenz ya que en principio estamos dejando que el vector de estado pueda aumentar indefinidamente. Además, para valores razonables de coeficientes de reactividad no existen ciclos límites. Para construir los mapas de estabilidad que siguen entonces adoptamos una aproximación diferente al problema. Para cada combinación de parámetros —en este caso $\alpha_{T_{\text{fuel}}}$ y $\alpha_{T_{\text{cool}}}$ — resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales perturbando la condición de estado estacionario y evaluamos la potencia que resulta un minuto después, considerando que potencias mayores a 4 veces la potencia inicial resultan en una excursión infinita.

En la figura 5.6 mostramos dos mapas de estabilidad en función de los coeficientes de reactividad por temperatura, uno correspondiente a la estabilidad de Lyapunov para una perturbación positiva del 5% en la temperatura T_{cool} del refrigerante y otro correspondiente a la estabilidad BIBO para una perturbación positiva de reactividad de 20 pcm. Si bien el modelo de Etcheparebor-da (2007) utiliza quince grupos de precursores incluyendo fotoneutrones, para la construcción de los mapas de estabilidad de la figura 5.6 usamos sólo los seis grupos de precursores de neutrones tradicionales ya que estudiamos el comportamiento del reactor a plena potencia desde condiciones en equilibrio, donde los efectos de los fotoneutrones son despreciables.

! Los mapas de estabilidad obtenidos en la figura 5.6 sólo indican el resultado de la potencia un minuto luego de iniciado el transitorio, calculada a partir de una simulación numérica de un modelo cero-dimensional basado en cinética puntual a seis grupo de precursores con coeficientes de reactividad



(a) Estabilidad de Lyapunov para una perturbación positiva del 5% en la temperatura del refrigerante al núcleo.



(b) Estabilidad BIBO para una reactividad externa positiva de 20 pcm

Figura 5.6: Mapas de estabilidad sin lazo de control para el modelo cero-dimensional de la figura 5.5 en función de los coeficientes de reactividad por temperatura del combustible y del refrigerante

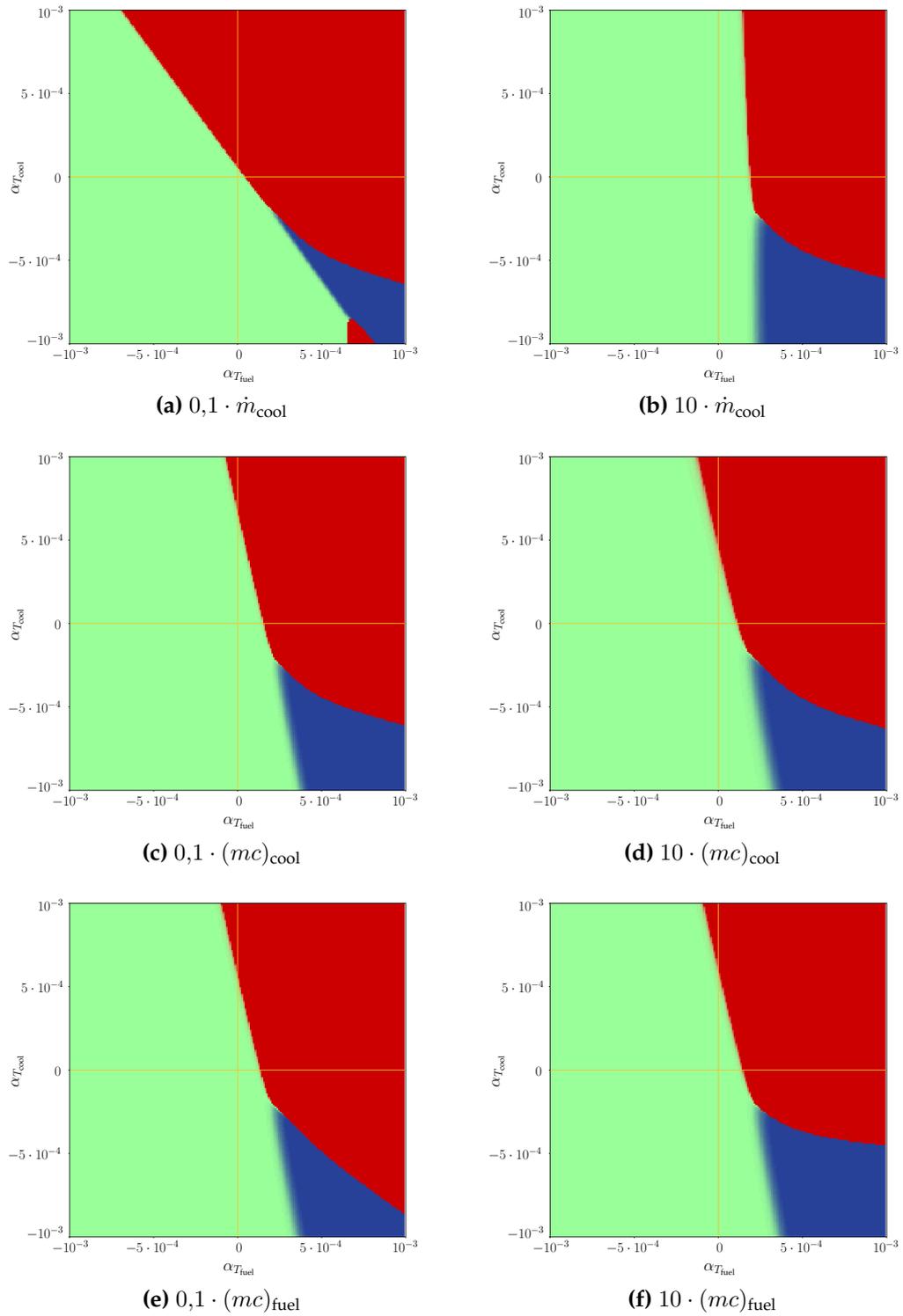


Figura 5.7: Sensibilidad de la estabilidad de Lyapunov (perturbación positiva del 5% en T_{cool} al orden de magnitud de los parámetros térmicos de los componentes.

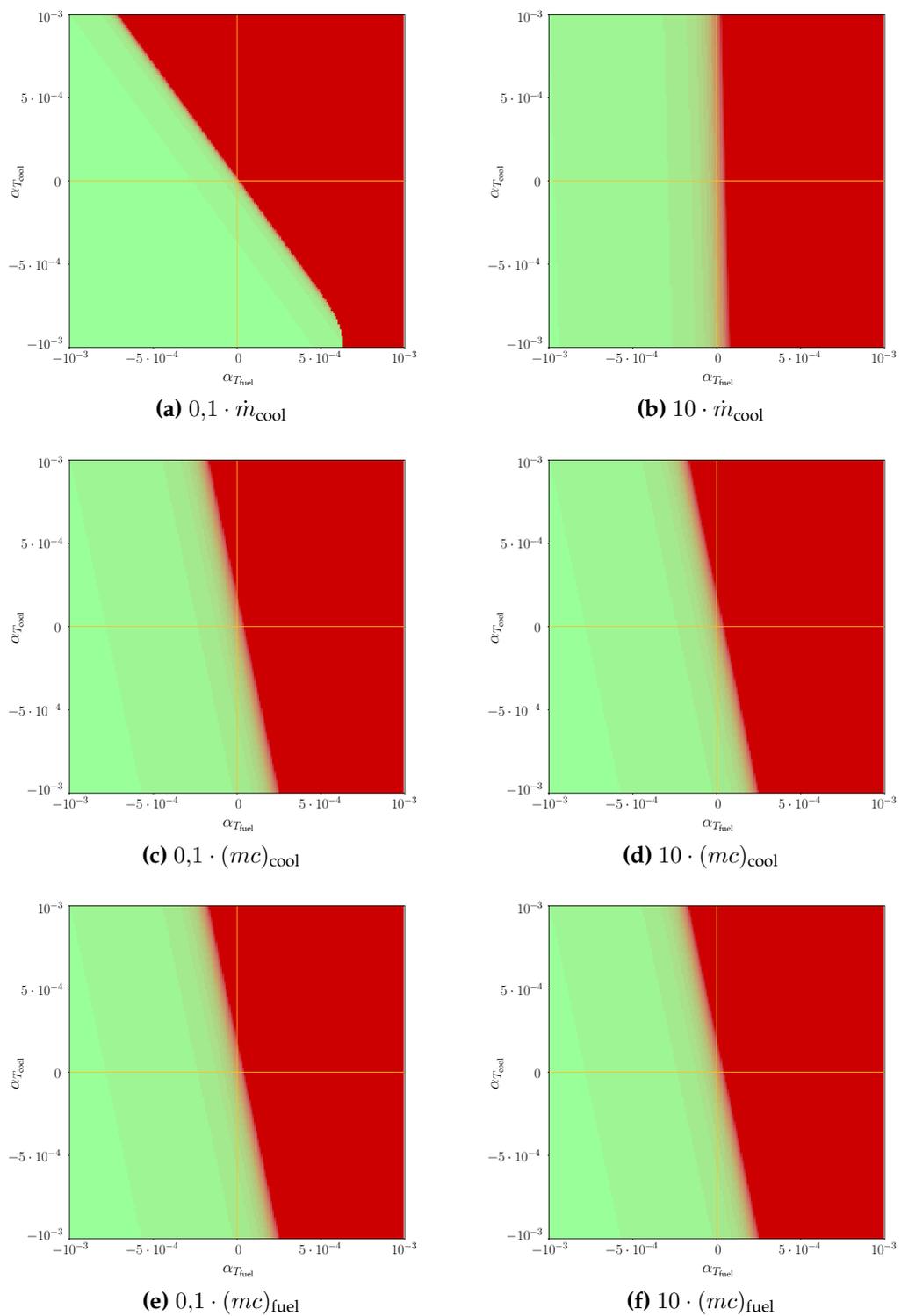


Figura 5.8: Sensibilidad de la estabilidad BIBO (perturbación positiva de 20 pcm en ρ) al orden de magnitud de los parámetros térmicos de los componentes.

constantes, y para nada cómo se comportaría un reactor nuclear real. Estos mapas sólo sirven como una guía muy preliminar para fijar objetivos de ingeniería en la concepción de un nuevo diseño. Más aún, el rango de variación de los coeficientes es bastante grande — $\alpha = 10^{-3}$ implica una reactividad de 100 pcm por cada grado centígrado. Suponer que en estas condiciones el mismo coeficiente de reactividad es constante es algo que se aleja bastante de la realidad.

De todas maneras, además de mostrar que para los parámetros térmicos del problema particular (5.5) la estabilidad del reactor está dominada esencialmente por el coeficiente de realimentación del combustible, la metodología de análisis propuesta sirve para estudiar cómo cambia la forma de este mapa de estabilidad con los parámetros del problema. En las figuras 5.7 y 5.8 construimos nuevamente los mismos mapas de estabilidad tipo Lyapunov y BIBO cambiando en un orden de magnitud el caudal de refrigeración, la inercia térmica del refrigerante y la inercia térmica del combustible manteniendo en cada caso el resto de los parámetros iguales a la formulación original del problema. La variación correspondiente de los mapas correspondientes a estabilidad de Lyapunov y estabilidad BIBO es esencialmente la misma, excepto que debido a que en el primer caso la perturbación fue positiva en la temperatura del refrigerante, para $\alpha_{T_{\text{fuel}}}$ muy negativos el reactor se apaga, mientras que en el segundo caso el reactor siempre aumenta su potencia.

De este análisis de sensibilidad concluimos que, en el caso de reactores de investigación, la importancia relativa de los coeficientes de reactividad por temperaturas de refrigerante y de combustible está dada principalmente por el caudal de refrigeración, mientras que las inercias térmicas de los diferentes componentes del núcleo —que por otra parte son menos susceptibles de ser modificadas sin afectar sensiblemente el resto del diseño— juegan un papel secundario. Para caudales de refrigeración grandes, la temperatura del refrigerante es esencialmente constante entonces el efecto de $\alpha_{T_{\text{cool}}}$ es despreciable frente a los cambios de reactividad introducidas por el combustible. Por el contrario, si el caudal de refrigerante es pequeño, entonces el refrigerante sufrirá grandes cambios de temperatura e introducirá reactividades que son comparables a las introducidas por el combustible.

! La estabilidad calculada en estos mapas es el comportamiento intrínseco del sistema sin acción de control externa. Parte de la ingeniería de diseño de un reactor nuclear consiste en concebir un sistema de control que sea capaz de estabilizar el reactor en casos patológicos inestables, por lo que es de esperar que un reactor con un sistema de control sea estable en un rango aún mayor del espacio de parámetros. De todas maneras, es deseable que el reactor sea inherentemente estable en la mayor cantidad de transitorios posibles, independientemente del sistema de control implementado.

Inestabilidades en flujo de dos fases

... hasta ahora he obtenido solamente dos clases de resultados:
1) hallazgos totalmente correctos que son muy viejos y
2) hallazgos completamente nuevos que son totalmente incorrectos.
Isaac Asimov, Exclamation Point!, 1965

Este capítulo trata sobre inestabilidades en flujo de dos fases, que es un tema central en el estudio de la estabilidad global de la envuelta de presión de un reactor nuclear de potencia. Basándonos en un modelo de nodalización móvil propuesto por Clause y Lahey para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de las ecuaciones de conservación en derivadas parciales de un canal en ebullición, estudiamos la estabilidad de un canal en ebullición utilizando la técnica de análisis de dimensión desarrolladas en el capítulo 3. Analizamos también el problema de dos canales paralelos y comparamos su estabilidad con respecto al caso de un canal individual. Finalmente, estudiamos el caso de un canal calefaccionado con un riser adiabático y proponemos una extensión al modelo de Clause y Lahey mediante retardos para analizar la estabilidad.

Para mejor evaluar y comparar cómo varían los resultados del análisis de estabilidad para diferentes conjuntos de parámetros, trabajamos con la formulación adimensional del problema del canal en ebullición. En el apéndice A planteamos la adimensionalización propuesta y la solución de estado estacionario del problema de un canal en ebullición, cuyos resultados eventualmente utilizamos en el análisis de los transitorios propuestos.

6.1. Tipos de inestabilidades

El flujo de dos fases es inherentemente más susceptible a presentar inestabilidades que el flujo de simple fase ya que aparecen una serie de efectos no

lineales debido a la ebullición de una de las fases. En principio, podemos clasificar las inestabilidades como estáticas o dinámicas de acuerdo a si es posible analizarlas sólo estudiando las ecuaciones de estado estacionario o bien es necesario tener en cuenta la evolución temporal del sistema. Un completo resumen de resultados teóricos y experimentales puede encontrarse en el trabajo de Kakac y Bon (2008).

Las inestabilidades más importantes a tener en cuenta en sistemas termohidráulicos —especialmente reactores nucleares— son las inestabilidades excursivas y los efectos de las ondas de densidad, que son el objeto principal del modelo dinámico desarrollado por Clause y Lahey.

6.1.1. Inestabilidad excursiva de Ledinegg

En un circuito fluidodinámico estacionario, el caudal de circulación es tal que la diferencia de presión proporcionada por la bomba impulsora igual a la pérdida de carga del circuito. En flujo de simple fase, la curva Δp vs. \dot{m} del circuito es monótonamente creciente por lo que existe a lo sumo sólo un posible punto de trabajo. En sistemas calefaccionados que pueden presentar cambio de fase, si el caudal de circulación es mayor que un cierto valor $\dot{m}_{1\phi}$ entonces el fluido se mantiene en simple fase, y la curva de pérdida de carga coincide con la que habría en ausencia de calefacción. Pero en flujo de dos fases puede darse el caso de que la curva de pérdida de carga tenga la forma de la figura 6.1, presentando varios posibles puntos de trabajo. La estabilidad de cada uno de ellos depende de las pendientes relativas de las curvas características de la bomba y del circuito. En particular, el punto ilustrado es inestable ya que perturbación positiva (negativa) en el caudal hace que la presión de la bomba sea mayor (menor) que la pérdida de carga y el caudal tiende a seguir aumentando (disminuyendo).

6.1.2. Ondas de densidad

Supongamos que un fluido subenfriado entra a un canal calefaccionado y cambia de fase en alguna posición axial. Una perturbación en el caudal viajará a través de la zona de una fase y cambiará las condiciones en la zona de dos fases —por ejemplo aumentando la fracción de vacío— lo que a su vez modificará la pérdida de carga del canal, con lo que el caudal volverá a modificarse. Debido a que las perturbaciones viajan con una velocidad finita, los efectos de la perturbación inicial aparecen con un retardo que puede llegar a ser tal que los cambios en la pérdida de carga refuercen la perturbación inicial del caudal, inestabilizando así el sistema.

Pensando la situación como un lazo cerrado por una realimentación, la situación es la de la figura 6.2. Una perturbación en el caudal es transportada

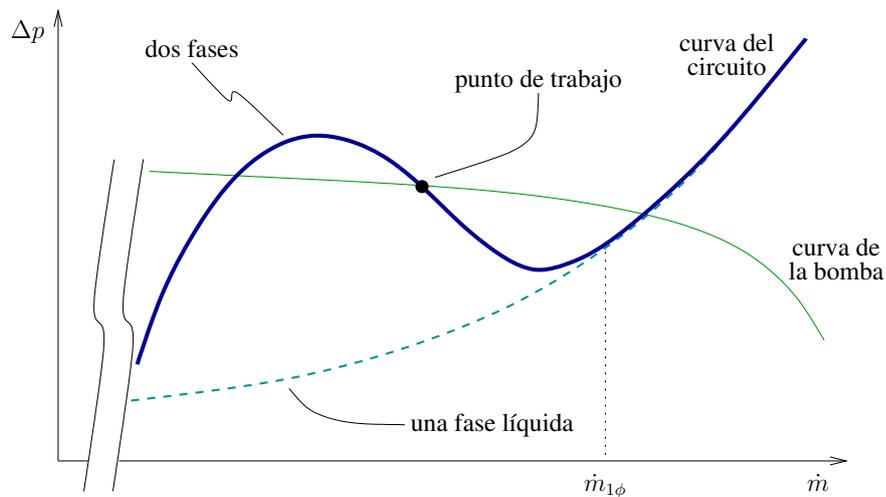


Figura 6.1: Origen de la inestabilidad de Ledinegg. La zona de bajos caudales correspondientes a flujo de una fase en vapor no está considerada.

por una función de transferencia con efectos de transporte en una fase hacia la zona de dos fases, y realimentada por otra función de transferencia debida a los efectos de las modificaciones de las condiciones en la zona de dos fases y la correspondiente perturbación en la pérdida de carga del canal. Si bien el sistema no es lineal, es posible linealizar las ecuaciones resultantes y obtener las funciones de transferencia involucradas en el proceso. De esta manera, el problema de la inestabilidad por ondas de densidad puede ser atacado utilizando técnicas estándar de análisis de estabilidad basados en frecuencia (Garea, 1998)

En particular, si la función de transferencia a lazo cerrado tiene dos polos en el eje imaginario, la teoría lineal predice que existirán oscilaciones autosostenidas. Debido a efectos no lineales, estas oscilaciones son estables en un entorno abierto del espacio de parámetros y de hecho son observadas experimentalmente (Delmastro, 1993). En la sección 6.3 mostramos resultados numéricos que ponen de manifiesto el carácter intrínsecamente no lineal del problema.

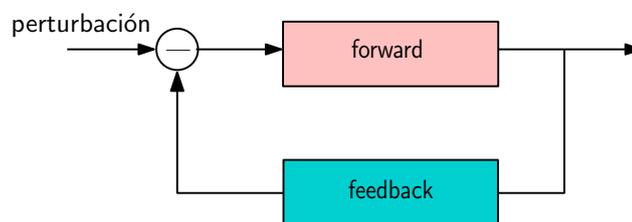


Figura 6.2: Diagrama de bloques de los efectos de inestabilidad por ondas de densidad

6.2. El modelo de Clausee y Lahey

Consideremos un canal vertical uniformemente calefaccionado en el cual entra un fluido subenfriado que alcanza las condiciones de saturación dentro del canal, como esquematizamos en la figura 6.3. El canal de área constante está sujeto a una diferencia de presión externa fija y las condiciones de subenfriamiento de entrada son constantes en el tiempo. El fluido recibe un flujo de calor uniforme y constante que hace que el seno del fluido llegue a ebullición en una posición axial λ que llamamos *frontera de ebullición*. La adimensionalización utilizada, las condiciones asumidas y la derivación de las condiciones de estado estacionario pueden encontrarse en el apéndice A. En este capítulo utilizamos las mismas suposiciones, i.e, modelo homogéneo, equilibrio termodinámico entre fases y presión externa constante. Resumimos las ecuaciones y números adimensionales del problema en la tabla 6.2.

Para resolver el problema teniendo en cuenta la dependencia temporal de la velocidad de entrada y de la frontera de ebullición podría implementarse un esquema numérico similar al propuesto en el capítulo 4 al resolver las ecuaciones de conservación del problema de loop toroidal. Sin embargo, Clausee y Lahey (1991) propusieron una forma de nodalizar el canal de forma tal de convertir las ecuaciones en derivadas parciales en un número reducido de ecuaciones diferenciales ordinarias que recuperan resultados experimentales con una cantidad de nodos mucho menor que los que se necesitarían en una solución nodal tradicional.

6.2.1. Zona de una fase

Clausee y Lahey proponen dividir el salto de entalpía entre el fluido subenfriado a la entrada del canal y la condición de saturación en $N_{1\phi}$ intervalos iguales y definir la frontera del n -ésimo nodo como una variable de estado que depende del tiempo. Esto es, la entalpía —adimensional como todas las variables en lo que sigue del trabajo— a la salida del nodo n es

$$h_n^+ = h^+(\ell_n^+) = h_i^+ + \frac{n}{N_{1\phi}} \frac{h_f - h_i}{h_{\text{ref}}} = h_i^+ + \frac{n}{N_{1\phi}} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \quad (6.1)$$

! Garea (1998) muestra que un modelo con una cantidad par de nodos en la zona de una fase arroja resultados que concuerdan mejor con los experimentos que modelos con $N_{1\phi}$ impar. Por ello en este trabajo utilizamos una cantidad de nodos $N_{1\phi}$ par.

El modelo supone una variación lineal de la entalpía dentro de cada nodo por lo que podemos integrar la ecuación de energía entre ℓ_{n-1}^+ y ℓ_n^+

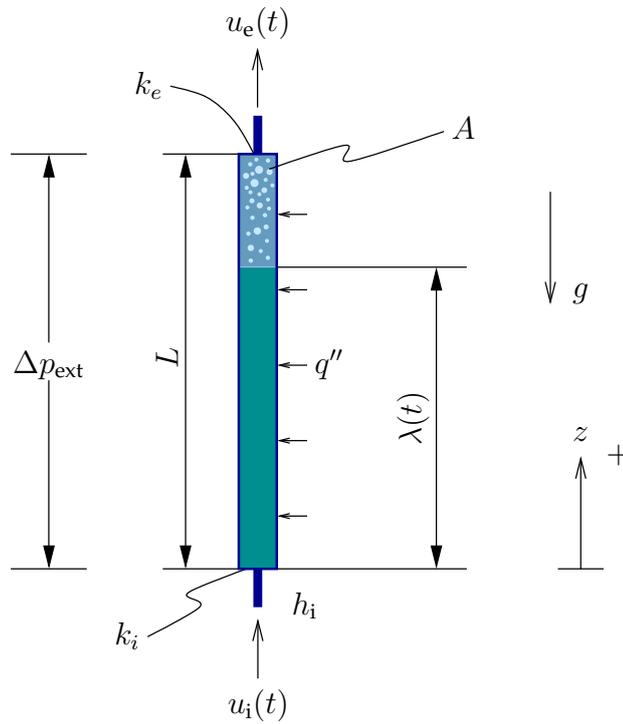


Figura 6.3: Boiling channel vertical uniformemente calentado sujeto a una diferencia de presión externa fija.

Variables		Variables	
t	tiempo	η	pendiente de la entalpía adimensional
z	coordenada axial	β	coeficiente de expansión isobárica
ρ	densidad	c	calor específico
u	velocidad	Subíndices	
h	entalpía	ref	referencia
q	potencia total	ext	externo
q''	flujo de calor	0	estacionario
A	área transversal del canal	H	hidráulico
L	longitud del canal	f	líquido saturado
D	diámetro hidráulico	g	vapor saturado
λ	frontera de ebullición	fg	diferencia vapor-líquido
p	presión	i	entrada
f	coeficiente de fricción de Darcy	e	salida
k	coeficiente de pérdidas puntuales	n	nodo n -ésimo
g	aceleración de la gravedad	ch	del canal
δ	distribución delta de Dirac	Supraíndices	
ℓ	frontera de nodo	+	adimensional

Tabla 6.1: Descripción de las variables del problema

Ecuaciones adimensionales

$$\frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+) + \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+ h^+) + \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+ h^+) = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^+} \left[\int_0^1 \rho^+ u^+ dz^+ \right] + (\rho_e^+ u_e^{+2} - \rho_i^+ u_i^{+2}) = \\ -\Lambda \int_0^1 \rho^+ u^{+2} dz^+ - \sum_j k_j \rho^+ u^{+2} - \frac{1}{\text{Fr}} \int_0^1 \rho^+ dz^+ + \text{Eu} \end{aligned}$$

$$\rho^+ = \begin{cases} 1 & \text{para } h^+ < 0 \\ [1 + N_{\text{pch}} h^+]^{-1} & \text{para } h^+ > 0 \end{cases}$$

Números adimensionales

$$N_{\text{pch}} = \frac{q}{\rho_f A u_0} \frac{v_{fg}}{h_{fg} v_f} \quad \text{Número de cambio de fase}$$

$$N_{\text{sub}} = \frac{h_f - h_i}{h_{fg}} \frac{v_{fg}}{v_f} \quad \text{Número de subenfriamiento}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{fL}{D_H} \quad \text{Número de fricción distribuida}$$

$$\text{Fr} = \frac{u_{\text{ref}}^2}{gL} \quad \text{Número de Froude}$$

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p_{\text{ext}}}{\rho_f u_{\text{ref}}^2} \quad \text{Número de Euler}$$

$$b = \frac{\beta h_{fg}}{c_{p_f}} \frac{v_f}{v_{fg}} \quad \text{Número de expansión}$$

Tabla 6.2: Formulación adimensional del problema del canal de ebullición vertical

$$\int_{\ell_{n-1}^+}^{\ell_n^+} \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+ h^+) dz^+ + \int_{\ell_{n-1}^+}^{\ell_n^+} \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+ h^+) dz^+ = \int_{\ell_{n-1}^+}^{\ell_n^+} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} dz^+$$

Para poder sacar la derivada parcial con respecto al tiempo fuera de la integral espacial es necesario utilizar la regla de Leibnitz

$$\int_a^b \frac{\partial \mathcal{F}(x)}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \left[\int_a^b \mathcal{F}(x) dx \right] - \mathcal{F}(b) \frac{db}{dt} + \mathcal{F}(a) \frac{da}{dt} \quad (6.2)$$

debido a que los extremos de integración dependen del tiempo. Entonces, teniendo en cuenta que $\rho^+ = 1$ y $u^+ = u_i^+$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^+} \left[\frac{(h_{n-1}^+ + h_n^+)(\ell_{n-1}^+ + \ell_n^+)}{2} \right] - h_n^+ \frac{d\ell_n^+}{dt^+} + h_{n-1}^+ \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+} + u_i^+(h_n^+ - h_{n-1}^+) \\ = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} (\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+) \end{aligned}$$

Despejando la derivada de la frontera del nodo n con respecto al tiempo y teniendo en cuenta la ecuación (6.1) resulta

$$\frac{d\ell_n^+}{dt^+} = 2u_i^+ - 2N_{1\phi}(\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+) - \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+} \quad (6.3)$$

donde debemos tomar $\ell_0^+ = 0$.

- ! Notar que la frontera de ebullición λ^+ coincide con la posición $\ell_{N_{1\phi}}^+$ del último nodo de la zona de una fase.

6.2.2. Zona de dos fases

Si bien en principio es posible dividir la zona de dos fases nuevamente en $N_{2\phi}$ nodos de entalpía constante (Chang y Lahey, 1997; Garea, 1998), el modelo original propone tomar sólo un nodo en la zona de dos fases. Esto simplifica notablemente la matemática pero a la vez mantiene el mecanismo responsable de las ondas de densidad, ya que el mecanismo de desfase entre las perturbaciones y el feedback se da principalmente en el transporte de la perturbación a través de la zona de una fase, modelada con $N_{1\phi}$ nodos. En este capítulo seguimos el modelo original de 1991 y tomamos $N_{2\phi} = 1$.

Clausse y Lahey proponen tomar como variable de estado representativa de la zona de dos fases la masa total del canal

$$\begin{aligned}
m^+ &= \int_0^1 \rho^+ dz^+ \\
m^+ &= \int_0^{\lambda^+} dz^+ + \int_{\lambda^+}^1 \frac{dz^+}{1 + N_{\text{pch}} h^+}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

En el apéndice A mostramos que en el estado estacionario la entalpía h^+ es una función lineal de pendiente igual a uno en todo el canal. Suponiendo que en el transitorio todavía podemos escribir la entalpía como una función lineal de la variable z^+ con una pendiente arbitraria $\eta(t)$, entonces

$$h^+ = \eta(z^+ - \lambda^+) \tag{6.5}$$

y la densidad en función del desplazamiento con respecto a la frontera de ebullición $\xi^+ = z^+ - \lambda^+$ resulta

$$\rho^+ = \frac{1}{1 + N_{\text{pch}} \eta \xi^+} \tag{6.6}$$

En particular, la densidad a la salida del canal es

$$\rho_e^+ = \frac{1}{1 + N_{\text{pch}} \eta (1 - \lambda^+)} \tag{6.7}$$

Reemplazando (6.6) en (6.4) e integrando nos queda

$$m^+ = \lambda^+ + \frac{1}{N_{\text{pch}} \eta} \ln [1 + N_{\text{pch}} \eta (1 - \lambda^+)]$$

que podemos reescribir en función de la ecuación (6.7) notando que

$$1 + N_{\text{pch}} \eta (1 - \lambda^+) = \frac{1}{\rho_e^+} \tag{6.8}$$

y

$$\eta N_{\text{pch}} = \frac{1/\rho_e^+ - 1}{1 - \lambda^+} \tag{6.9}$$

como

$$\begin{aligned}
m^+ &= \lambda^+ + (1 - \lambda^+) \frac{\ln(1/\rho_e^+)}{1/\rho_e^+ - 1} \\
m^+ &= \lambda^+ - (1 - \lambda^+) \frac{\rho_e^+}{1 - \rho_e^+} \ln \rho_e^+
\end{aligned} \tag{6.10}$$

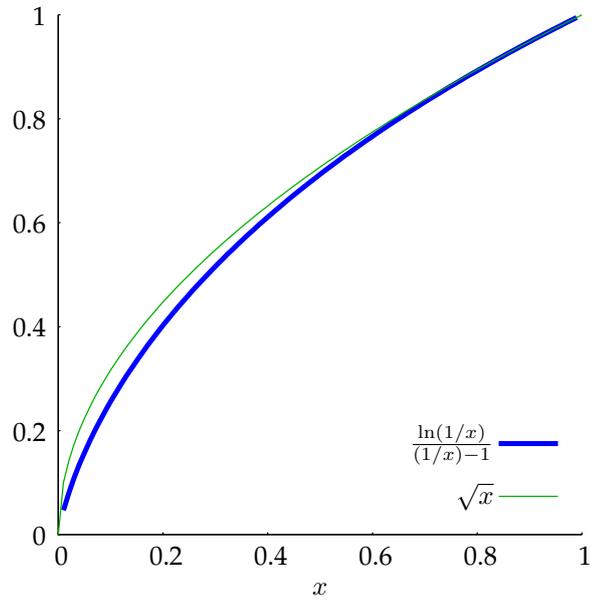


Figura 6.4: Comparación entre la media logarítmica y la media geométrica entre 1 y x en el intervalo $[0, 1]$

El factor que involucra la densidad de salida es el promedio logarítmico entre la densidad de salida y la densidad adimensional del líquido, que para $\rho_e^+ \approx 1$ podemos reemplazar por la media geométrica (figura 6.4)

$$\frac{\ln(1/\rho_e^+)}{1/\rho_e^+ - 1} \approx \sqrt{\rho_e^+}$$

lo que nos da una relación explícita entre la masa del canal y la densidad de salida

$$m^+ \approx \lambda^+ + (1 - \lambda^+) \sqrt{\rho_e^+}$$

o en forma equivalente

$$\rho_e^+ \approx \left(\frac{m^+ - \lambda^+}{1 - \lambda^+} \right)^2 \quad (6.11)$$

La variación temporal de la masa del canal proviene de integrar la ecuación de conservación de masa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+) dz^+ + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+) dz^+ &= 0 \\
\frac{dm^+}{dt^+} + \rho_e^+ u_e^+ - u_i^+ &= 0 \\
\frac{dm^+}{dt^+} &= u_i^+ - \rho_e^+ u_e^+
\end{aligned}$$

Podemos evaluar la velocidad de salida en función de la velocidad de entrada usando la ecuación (A.14) derivada en el apéndice A, que vale para el caso general dependiente del tiempo

$$u_e^+ = u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+) \quad (6.12)$$

con lo que escribimos la derivada de la masa del canal con respecto al tiempo como

$$\begin{aligned}
\frac{dm^+}{dt^+} &= u_i^+ - \rho_e^+ [u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)] \\
\frac{dm^+}{dt^+} &= u_i^+(1 - \rho_e^+) - \rho_e^+ N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+) \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Podemos poner \dot{m}^+ en función de m^+ bien resolviendo ρ_e^+ en función de m^+ en la relación implícita (6.10) o bien utilizando la aproximación explícita (6.11), que da como resultado

$$\frac{dm^+}{dt^+} \approx u_i^+ - \left(\frac{m^+ - \lambda^+}{1 - \lambda^+} \right)^2 \cdot [u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]$$

6.2.3. Conservación de momento

Resta encontrar una ecuación diferencial para la velocidad de entrada u_i^+ y obtener así un sistema dinámico autónomo de orden $N_{1\phi} + 2$. La ecuación de momento integrada en la longitud del canal es

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt^+} \left[\int_0^1 \rho^+ u^+ dz^+ \right] \right) + \left(\rho_e^+ u_e^{+2} - \rho_i^+ u_i^{+2} \right) = \\
&- \left(\Lambda \int_0^1 \rho^+ u^{+2} dz^+ + k_i \rho_i^+ u_i^{+2} + k_e \rho_e^+ u_e^{+2} \right) - \left(\frac{1}{\text{Fr}} \int_0^1 \rho^+ dz^+ \right) + \text{Eu} \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Cada uno de los términos entre paréntesis tiene la forma funcional de una diferencia de presiones y recibe un nombre particular. A continuación pasamos

a analizarlos por separado. El primero es la caída de presión debido a la inercia del fluido

$$\begin{aligned}\Delta p_i^+ &= \frac{d}{dt^+} \left[\int_0^1 \rho^+ u^+ dz^+ \right] \\ \Delta p_i^+ &= \frac{d}{dt^+} \left[u_i^+ \lambda^+ + \int_0^{1-\lambda^+} \frac{u_i^+ + N_{\text{sub}} \xi^+}{1 + N_{\text{pch}} \eta \xi^+} d\xi^+ \right] \\ \Delta p_i^+ &= \frac{d}{dt^+} \left[u_i^+ \lambda^+ + \frac{1}{\eta^2 N_{\text{pch}}^2} \left((u_i^+ \eta N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}}) \ln[1 + \eta N_{\text{pch}} (1 - \lambda^+)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta N_{\text{pch}} N_{\text{sub}} (1 - \lambda^+) \right) \right]\end{aligned}$$

Para simplificar la notación, utilizando la ecuación (6.9) definimos un número de cambio de fase transitorio

$$\tilde{N}_{\text{pch}}(\lambda^+, \rho_e^+) = \eta N_{\text{pch}} = \frac{1/\rho_e^+ - 1}{1 - \lambda^+} \quad (6.15)$$

con lo que escribimos

$$\begin{aligned}\Delta p_i^+ &= \frac{d}{dt^+} \left[u_i^+ \lambda^+ + u_i^+ \frac{\ln[1 + \tilde{N}_{\text{pch}}(1 - \lambda^+)]}{\tilde{N}_{\text{pch}}} + \frac{N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} \left(-\frac{\ln[1 + \tilde{N}_{\text{pch}}(1 - \lambda^+)]}{\tilde{N}_{\text{pch}}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \lambda^+) \right) \right] \\ \Delta p_i^+ &= \frac{d}{dt^+} \left[u_i^+ m^+ + \frac{N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} (-(m^+ - \lambda^+) + (1 - \lambda^+)) \right] \\ \Delta p_i^+ &= \frac{d}{dt^+} \left[u_i^+ m^+ + \frac{N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} (1 - m^+) \right] \\ \Delta p_i^+ &= \frac{du_i^+}{dt^+} m^+ + \frac{dm^+}{dt^+} u_i^+ + \frac{N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} \left[-\frac{dm^+}{dt^+} \tilde{N}_{\text{pch}} - (1 - m^+) \frac{d\tilde{N}_{\text{pch}}}{dt^+} \right] \quad (6.16)\end{aligned}$$

La derivada del número de cambio de fase transitorio definido por la ecuación (6.9) es

$$\frac{d\tilde{N}_{\text{pch}}}{dt^+} = \frac{-\frac{1}{\rho_e^{+2}} \frac{d\rho_e^+}{dt^+} (1 - \lambda^+) + \left(\frac{1}{\rho_e^+} - 1 \right) \frac{d\lambda^+}{dt^+}}{(1 - \lambda^+)^2} \quad (6.17)$$

mientras que podemos calcular $\dot{\rho}_e^+$ derivando ambos miembros de la ecuación (6.10) con respecto al tiempo y despejando

$$\frac{d\rho_e^+}{dt^+} = \frac{\frac{d\lambda^+}{dt^+} \left(1 + \frac{\rho_e^+}{1 - \rho_e^+} \ln \rho_e^+\right) - \frac{dm^+}{dt^+}}{(1 - \lambda^+) \left[\frac{\rho_e^+ \ln \rho_e^+}{(1 - \rho_e^+)^2} + \frac{1 + \ln \rho_e^+}{1 - \rho_e^+} \right]} \quad (6.18)$$

o bien directamente derivando (6.11)

$$\frac{d\rho_e^+}{dt^+} \approx 2 \frac{m^+ - \lambda^+}{(1 - \lambda^+)^3} \left[\left(\frac{dm^+}{dt^+} - \frac{d\lambda^+}{dt^+} \right) (1 - \lambda^+) + \frac{d\lambda^+}{dt^+} (m^+ - \lambda^+) \right] \quad (6.19)$$

! Delmastro (1993) propone escribir la caída de presión debida a la inercia como

$$\Delta p_i^+ = \frac{d}{dt^+} \left[m^+ u_i^+ + \frac{N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)(1 - m^+)}{1/\rho_e^+ - 1} \right]$$

expresión que arroja los mismos resultados que la ecuación (6.16).

El segundo término de la ecuación (6.14) es la llamada aceleración espacial. Es posible evaluarla calculando la densidad del fluido a la salida del canal con la relación (6.10) o con la ecuación (6.11) y la velocidad de salida con la ecuación (6.12)

$$\begin{aligned} \Delta p_a^+ &= \rho_e^+ u_e^{+2} - \rho_i^+ u_i^{+2} \\ \Delta p_a^+ &= \rho_e^+ [u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]^2 - u_i^{+2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

El siguiente término es la pérdida de carga debido a la fricción

$$\begin{aligned} \Delta p_f^+ &= \Lambda \int_0^1 \rho^+ u^{+2} dz^+ + k_i \rho_i^+ u_i^{+2} + k_e \rho_e^+ u_e^{+2} \\ \Delta p_f^+ &= \Lambda \left\{ \int_0^{\lambda^+} u_i^{+2} dz^+ + \int_0^{1-\lambda^+} \frac{(u_i^+ + N_{\text{sub}}\xi^+)^2}{1 + N_{\text{pch}}m\xi^+} d\xi^+ \right\} + k_i \rho_i^+ u_i^{+2} + k_e \rho_e^+ u_e^{+2} \\ \Delta p_f^+ &= \Lambda \left\{ u_i^{+2} \lambda^+ + \frac{1}{2(mN_{\text{pch}})^3} \left[2u_i^{+2} (mN_{\text{pch}})^2 \ln[1 + mN_{\text{pch}}(1 - \lambda^+)] \right. \right. \\ &\quad - 4u_i^+ N_{\text{sub}}(mN_{\text{pch}}) \ln[1 + mN_{\text{pch}}(1 - \lambda^+)] \\ &\quad + 2N_{\text{sub}}^2 \ln[1 + mN_{\text{pch}}(1 - \lambda^+)] + \lambda^{+2} N_{\text{sub}}^2 (mN_{\text{pch}})^2 \\ &\quad + 2N_{\text{sub}}^2 \lambda^+ [mN_{\text{pch}} - (mN_{\text{pch}})^2] - 4N_{\text{sub}} u_i^+ \lambda^+ (mN_{\text{pch}})^2 \\ &\quad \left. \left. + 4N_{\text{sub}} u_i^+ (mN_{\text{pch}})^2 + N_{\text{sub}}^2 (mN_{\text{pch}})^2 - 2N_{\text{sub}}^2 mN_{\text{pch}} \right] \right\} \\ &\quad + k_i u_i^{+2} + k_e \rho_e^+ [u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]^2 \end{aligned}$$

Nuevamente usando el número de cambio de fase transitorio, el término de fricciones viscosas en función de las variables de estado e intermedias queda

$$\Delta p_f^+ = \Lambda \left\{ m^+ u_i^{+2} + \frac{2u_i^+ N_{\text{sub}} \ln \rho_e^+}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} - \frac{N_{\text{sub}}^2 \ln \rho_e^+}{\tilde{N}_{\text{pch}}^3} + \frac{\lambda^{+2} N_{\text{sub}}^2}{2\tilde{N}_{\text{pch}}} \right. \\ \left. + \frac{\lambda^+ N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} - \frac{\lambda^+ N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}} - \frac{2u_i^+ \lambda^+ N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} + \frac{2u_i^+ N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} + \frac{N_{\text{sub}}^2}{2\tilde{N}_{\text{pch}}} \right. \\ \left. - \frac{N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} \right\} + k_i u_i^{+2} + k_e \rho_e^+ [u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]^2 \quad (6.21)$$

! Si asignamos números de fricción distribuidas $\Lambda_{1\phi}$ y $\Lambda_{2\phi}$ diferentes a cada zona, entonces Δp_f^+ resulta

$$\Delta p_f^+ = \Lambda_{1\phi} \lambda^+ u_i^{+2} + \Lambda_{2\phi} \left\{ (m^+ - \lambda^+) u_i^{+2} + \frac{2u_i^+ N_{\text{sub}} \ln \rho_e^+}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} - \frac{N_{\text{sub}}^2 \ln \rho_e^+}{\tilde{N}_{\text{pch}}^3} \right. \\ \left. + \frac{\lambda^{+2} N_{\text{sub}}^2}{2\tilde{N}_{\text{pch}}} + \frac{\lambda^+ N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} - \frac{\lambda^+ N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}} - \frac{2u_i^+ \lambda^+ N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} + \frac{2u_i^+ N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} \right. \\ \left. + \frac{N_{\text{sub}}^2}{2\tilde{N}_{\text{pch}}} - \frac{N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} \right\} + k_i u_i^{+2} + k_e \rho_e^+ [u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]^2$$

! En el modelo de Clause y Lahey nunca aparece un “número de cambio de fase transitorio”, sino que hemos introducido este *artefacto*¹ con el objetivo de hacer una segunda derivación de las ecuaciones más complicadas del modelo con el objetivo de encontrar errores en la implementación computacional. El modelo original propone expresar este término como

$$\Delta p_f^+ = \Lambda \left\{ m^+ u_i^{+2} + \frac{2u_i^+ (1 - m^+) (u_e^+ - u_i^+)}{1/\rho_e^+ - 1} \right. \\ \left. + \left(\frac{u_e^+ - u_i^+}{1/\rho_e^+ - 1} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_e^+} - 3 \right) (1 - \lambda^+) + m^+ - \lambda^+ \right] \right\} \\ + k_i u_i^{+2} + k_e \rho_e^+ u_e^{+2}$$

que se puede demostrar es equivalente al (6.21) deducido en este desarrollo.

¹Que sin embargo simplifica la matemática en la sección 6.4

El término que sigue en la ecuación de momento (6.14) es la presión debida a la gravedad

$$\Delta p_g^+ = \frac{1}{\text{Fr}} \int_0^1 \rho^+ dz^+$$

En principio, esta diferencia de presión es directamente el cociente entre la masa del canal y el número de Froude. Sin embargo, este es el término en el cual debemos aplicar la aproximación de Boussinesq desarrollando la densidad del líquido a primer orden en la entalpía para tener en cuenta los efectos de la convección natural que son realmente importantes en las aplicaciones de tecnología de reactores avanzados. Intuitivamente, la convección natural se da porque el calentamiento del líquido hace que el peso de la columna caliente sea menor que la de la columna fría y esto induce un movimiento neto ascendente. Como tomamos que el fluido entra al canal con densidad $\rho^+ = 1$, para modelar este efecto correctamente debemos desarrollar la densidad alrededor de la temperatura de entrada para recuperar el resultado de que el líquido disminuye su densidad conforme avanza en el canal

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_f [1 - \beta(T - T_i)] \\ \rho &= \rho_f \left[1 - \beta \frac{(h - h_f) - (h_i - h_f)}{c_{p_f}} \right] \\ \rho &= \rho_f \left[1 - \frac{\beta}{c_{p_f}} h_{\text{ref}} (h^+ - h_i^+) \right] \\ \rho^+ &= 1 - \frac{\beta h_{\text{ref}}}{c_{p_f}} (h^+ - h_i^+) \end{aligned}$$

Es conveniente escribir la densidad

$$\rho^+ = 1 - b N_{\text{pch}} (h^+ - h_i^+)$$

en función del número adimensional de expansión definido como

$$b = \frac{\beta h_{fg}}{c_{p_f}} \frac{v_f}{v_{fg}} = \frac{\beta h_{\text{ref}}}{c_{p_f} N_{\text{pch}}}$$

Recordando que el modelo supone un perfil lineal de entalpías dentro de cada nodo en simple fase, la integral de la densidad en el n -ésimo nodo es

$$\int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} [1 - b N_{\text{pch}} (h^+ - h_i^+)] dz^+ = \left[1 + b N_{\text{pch}} \left(h_i^+ - \frac{h_{n-1}^+ + h_n^+}{2} \right) \right] (\ell_n - \ell_{n-1})$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6.1)

$$\int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} (1 - bN_{\text{pch}}h^+) dz^+ = \left[1 + bN_{\text{pch}} \left(h_i^+ - h_i^+ - \frac{2n-1}{2N_{1\phi}} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \right) \right] (\ell_n - \ell_{n-1})$$

$$\int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} (1 - bN_{\text{pch}}h^+) dz^+ = \left[1 - \frac{bN_{\text{sub}}}{2N_{1\phi}} (2n-1) \right] (\ell_n - \ell_{n-1})$$

entonces el término de gravedad queda finalmente

$$\Delta p_g^+ = \frac{1}{\text{Fr}} \left[m^+ - \frac{b N_{\text{sub}}}{2N_{1\phi}} \sum_{j=1}^{N_{1\phi}} (2n-1) (\ell_n - \ell_{n-1}) \right] \quad (6.22)$$

! Notar que debido a que tomamos como referencia las condiciones en la entrada del canal, la diferencia de presión inducida por el peso de la columna de fluido es menor si tomamos en cuenta la compresibilidad del líquido que si no la tenemos en cuenta, que es lo que queríamos. Además, queda claro que este efecto es más importante mientras menor sea el número de Froude, es decir, para velocidades pequeñas.

Finalmente el número de Euler es la adimensionalización de la diferencia de presión externa fija Δp_{ext} . Como el número de cambio de fase involucra la velocidad de estado estacionario u_0 , entonces Eu y N_{pch} están relacionados por la ecuación (A.21). En los casos en los que analizamos un problema dado entonces debemos calcular el número de cambio de fase a partir del número de Euler, que está fijado por Δp_{ext} . Sin embargo, como discutimos en la sección 6.3, la estabilidad de un boiling channel queda determinada principalmente por N_{sub} y N_{pch} (Guido Lavallo et al., 1991; Garea, 1998), por lo que si estamos dimensionando un canal entonces calculamos Δp_{ext} a partir del número de cambio de fase que asegura su estabilidad.

La conservación de momento (A.11) implica

$$\Delta p_i^+ + \Delta p_a^+ = -\Delta p_f^+ - \Delta p_g^+ + \text{Eu} \quad (6.23)$$

Como Δp_i^+ depende de \dot{u}_i^+ , esta es la última ecuación diferencial que cierra el modelo de Clausey y Lahey.

6.2.4. El sistema dinámico

Resumiendo, el sistema dinámico de orden $N_{1\phi} + 2$ resultante está dado por las ecuaciones diferenciales (6.3), (6.13) y (6.23) más la definición de las variables intermedias. Podemos escribir el vector de estado \mathbf{x} como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \ell_0^+ \\ \ell_1^+ \\ \vdots \\ \ell_{N_{1\phi}}^+ \\ m^+ \\ u_i^+ \end{bmatrix}$$

Recordando la definición de la frontera de ebullición, tomamos

$$\lambda^+ = \ell_{N_{1\phi}}$$

Usando como variables intermedias la densidad del pseudo-fluido a la salida del canal calculada implícitamente con la ecuación (6.10)

$$m^+ = \lambda^+ - (1 - \lambda^+) \frac{\rho_e^+}{1 - \rho_e^+} \ln \rho_e^+ \quad (6.10)$$

o bien explícitamente con la aproximación (6.11)

$$\rho_e^+ \approx \left(\frac{m^+ - \lambda^+}{1 - \lambda^+} \right)^2 \quad (6.11)$$

y el número de cambio de fase transitorio

$$\tilde{N}_{\text{pch}} = \eta N_{\text{pch}} = \frac{1/\rho_e^+ - 1}{1 - \lambda^+} \quad (6.9)$$

con sus correspondientes derivadas (6.18) y (6.17)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_e^+}{dt^+} &= 2 \frac{m^+ - \lambda^+}{(1 - \lambda^+)^3} \left[\left(\frac{dm}{dt^+} - \frac{d\lambda^+}{dt^+} \right) (1 - \lambda^+) + \frac{d\lambda^+}{dt^+} (m^+ - \lambda^+) \right] \\ \frac{d\tilde{N}_{\text{pch}}}{dt^+} &= \frac{-\frac{1}{\rho_e^2} \frac{d\rho_e^+}{dt^+} + \left(\frac{1}{\rho_e^+} - 1 \right) \frac{d\lambda^+}{dt^+}}{(1 - \lambda^+)^2} \end{aligned}$$

el modelo resulta en el sistema dinámico autónomo y autoconsistente

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell_1}{dt^+} &= 2u_i^+ - 2N_{1\phi} \ell_1^+ \\
\frac{d\ell_n^+}{dt^+} &= 2u_i^+ - 2N_{1\phi}(\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+) - \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+} \\
\frac{dm^+}{dt^+} &= u_i^+(1 - \rho_e^+) - \rho_e^+ N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+) \\
\frac{du_i^+}{dt^+} &= \frac{1}{m^+} \left\{ -\frac{dm^+}{dt^+} u_i^+ - \frac{N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} \left[-\frac{dm^+}{dt^+} \tilde{N}_{\text{pch}} - (1 - m^+) \frac{d\tilde{N}_{\text{pch}}}{dt^+} \right] \right. \\
&\quad - \rho_e^+ [u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]^2 - u_i^{+2} \\
&\quad - \Lambda \left[m^+ u_i^{+2} + \frac{2u_i^+ N_{\text{sub}} \ln \rho_e^+}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} - \frac{N_{\text{sub}}^2 \ln \rho_e^+}{\tilde{N}_{\text{pch}}^3} + \frac{\lambda^{+2} N_{\text{sub}}^2}{2\tilde{N}_{\text{pch}}} \right. \\
&\quad + \frac{\lambda^+ N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} - \frac{\lambda^+ N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}} - \frac{2u_i^+ \lambda^+ N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} + \frac{2u_i^+ N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}} + \frac{N_{\text{sub}}^2}{2\tilde{N}_{\text{pch}}} \\
&\quad \left. - \frac{N_{\text{sub}}^2}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} \right] + k_i u_i^{+2} + k_e \rho_e^+ [u_i^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]^2 \\
&\quad \left. - \frac{1}{\text{Fr}} \left[m^+ - \frac{b N_{\text{sub}}}{2N_{1\phi}} \sum_{j=1}^{N_{1\phi}} (2n - 1) (\ell_n - \ell_{n-1}) \right] + \text{Eu} \right\}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

! A menos que especifiquemos lo contrario, en todos los casos resolvemos el sistema con la ecuación implícita (6.10) y utilizando un esquema Runge-Kutta de cuarto orden con paso temporal adimensional $\Delta t^+ = 10^{-3}$.

6.3. Estabilidad

La estabilidad de un canal de ebullición depende de todos los parámetros adimensionales introducidos en el desarrollo anterior. De todas maneras, se suelen presentar en la literatura mapas de estabilidad bidimensionales en función de los números de cambio de fase y de subenfriamiento, manteniendo el resto de los parámetros constantes. En el canal estudiado podemos diferenciar esencialmente dos tipos diferentes de inestabilidades: periódicas y excursivas. Las primeras son ciclos límites estables mientras que las segundas pueden deberse a inestabilidades de Ledineg o bien a que la generación de vapor es tan intensa que hace que la presión a la salida del canal sea mayor que la presión externamente impuesta y el flujo invierta su dirección, invalidando completamente el modelo de Clause y Lahey. En las figuras 6.5-6.8 mostramos mapas

de estabilidad en el plano N_{pch} vs. N_{sub} , obtenido resolviendo el sistema dinámico con una perturbación de un 1 % en la velocidad de entrada con respecto al valor estacionario y analizando luego la dimensión resultante del flujo del vector tridimensional

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda^+ \\ u_i^+ \\ m^+ \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

durante 25 unidades de tiempo adimensionales, descartando un transitorio inicial de 125 unidades, utilizando un paso fijo $\Delta t^+ = 10^{-3}$. Los casos estables corresponden a dimensión cero, los ciclos límites a dimensión uno y si alguna componente del vector \mathbf{x} sale fuera del intervalo $[0, 1]$ suponemos que el sistema es excursivamente inestable. En la figura 6.6 mostramos tres órbitas en el espacio de fases λ^+ vs. u_i^+ ilustrando cada uno de estos casos.

En principio no tenemos ninguna razón para pensar que el sistema dinámico tiene una dimensión de embedding tres, por lo que la elección del vector de estado (6.25) es en principio arbitraria. De todas maneras, tres es una dimensión suficiente como para distinguir puntos fijos estables, ciclos límites y atractores caóticos sin entrar en una análisis fino.

! En los mapas de estabilidad mostrados, hemos mantenido constante el número de Froude. Sin embargo —como nota Zanocco (2005)— para una geometría fija, Fr depende del número de cambio de fase ya que la velocidad u_{ref} que hace que $\lambda = L$ cambia con la potencia q disipada en el canal. Por lo tanto los mapas de estabilidad calculados en esta sección no son directamente aplicables a un problema con geometría fija.

Al igual que en el capítulo 5, debemos remarcar que los mapas de estabilidad presentados en esta sección son sólo el resultado de analizar la dimensión del flujo del vector (6.25) que proviene del sistema dinámico (6.24), derivado bajo la suposición de flujo unidimensional y modelo homogéneo en equilibrio. No hay razón para esperar que un boiling channel real se comporte exactamente como predicen estos mapas. De todas maneras, si bien no es cierto que sea posible obtener experimentalmente los comportamientos de la figura 6.6 para los parámetros mostrados, no quiere decir que la fenomenología mostrada no tenga sustento real sino sólo que los parámetros necesarios para lograrla son diferentes. Por otro lado, la utilidad real de este tipo de mapas de estabilidad reside en estudiar la *variación* de las zonas de estabilidad en función del resto de los parámetros mas que la evaluación absoluta de la estabilidad de un boiling channel.

En la figura 6.5 vemos que existen dos límites de estabilidad, uno correspondiente a inestabilidades excursivas de Ledinegg y otro de inestabilidad por ondas de densidad. Como discutimos en la sección 6.1, la fenomenología de

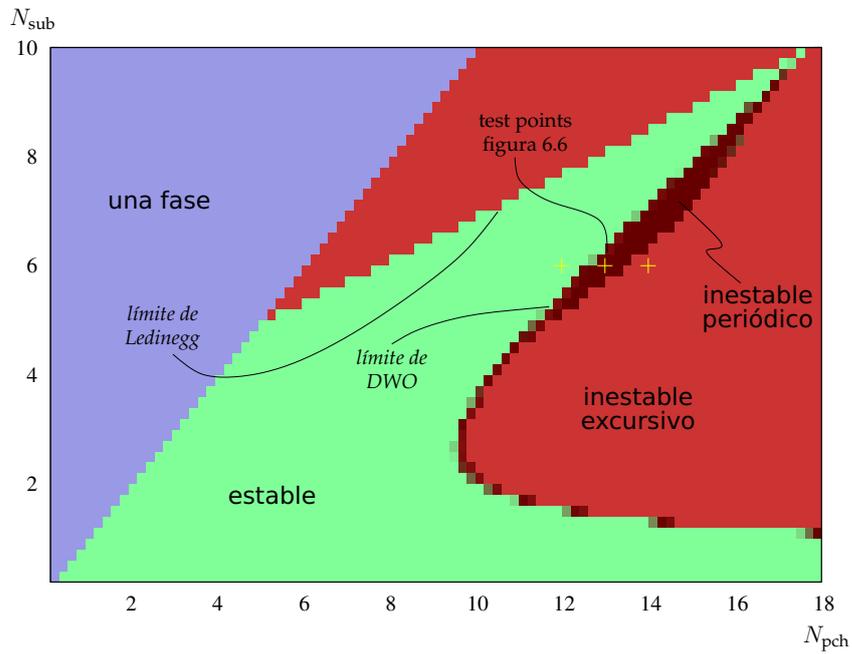


Figura 6.5: Mapa de estabilidad de un canal de ebullición para $Fr = 1$, $\Lambda = 3$, $k_i = 6$, $k_e = 2$, $b = 0$ con $N_{1\phi} = 20$

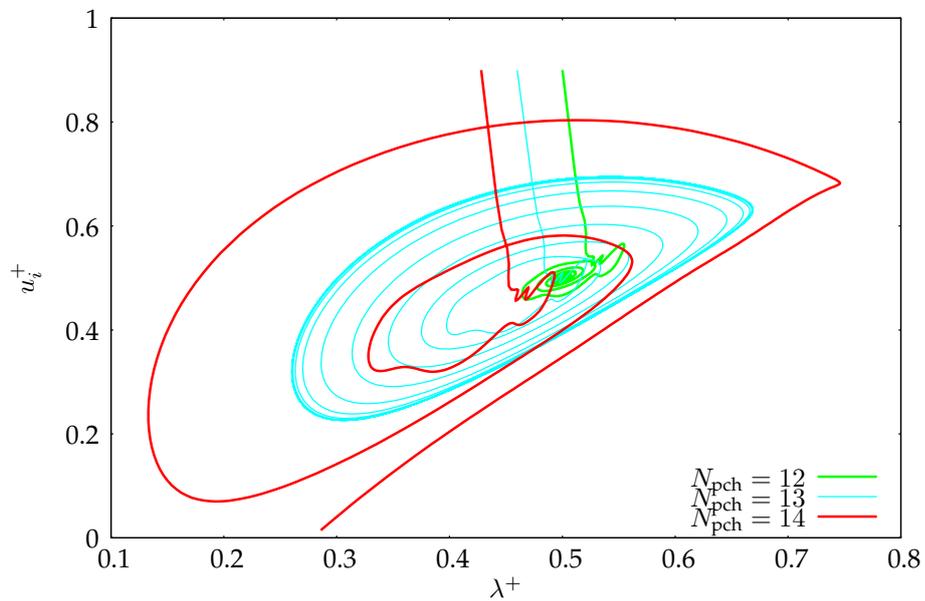


Figura 6.6: Flujo en el espacio de las fases λ^+ vs. u_i^+ para un caso estable ($N_{pch} = 12$), para un ciclo límite ($N_{pch} = 13$) y para un inestabilidad excursiva ($N_{pch} = 14$). Todos los casos con los parámetros correspondientes al mapa de la figura 6.5 y $N_{sub} = 6$.

cada una de ellas es diferente. Matemáticamente, las primeras corresponden a jacobianos con autovalores estrictamente reales, mientras que las segundas tienen autovalores imaginarios (Delmastro et al., 2001). Análisis de estabilidad basados en técnicas analíticas (Achard et al., 1985; Mochizuki, 1992; Garea, 1998) encuentran que en el límite de estabilidad por ondas de densidad se dan las condiciones suficientes para que exista una bifurcación de Hopf (teorema 2.6). Más aún, Rizwan-Uddin y Dorning (1986) dan argumentos para asegurar que si bien para N_{pch} bastante mayores que el correspondiente al límite de estabilidad las oscilaciones son de amplitud creciente —que es lo que predice un análisis lineal— existe una zona finita donde es posible que el sistema desarrolle ciclos límites estables de amplitud constante. De hecho esto es lo que observamos en los mapas de estabilidad encontrados con el método del análisis de dimensión. Existe una pequeña zona adyacente al límite de ondas de densidad donde las oscilaciones tienen una amplitud constante (figura 6.7), efecto que no se da en la zona de Ledinegg y que no es posible predecir a partir del problema linealizado.

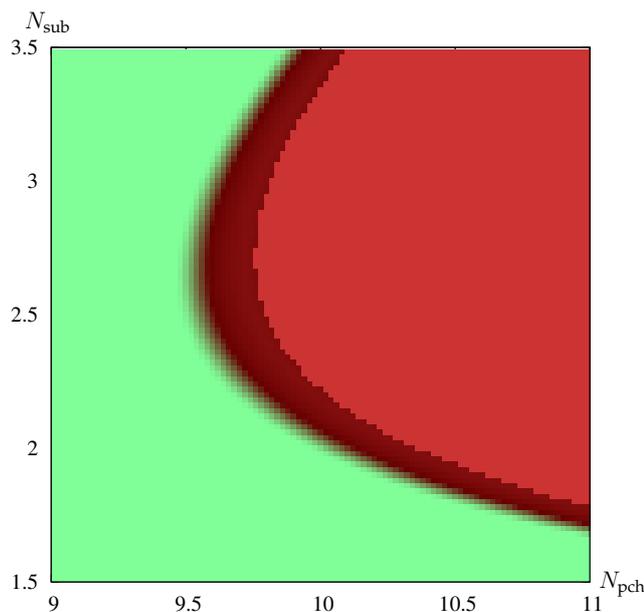


Figura 6.7: Detalle de la nariz de la zona de DWO para los parámetros de la figura 6.5. El gradiente de color es debido a que en la zona de transición, el sistema no llega al estado estacionario en el tiempo fijo utilizado para construir el mapa de estabilidad.

Para ilustrar la utilidad de este método no lineal de análisis de inestabilidad, calculamos la estabilidad del mismo canal estudiado en la figura 6.5 modificando los coeficientes de pérdida de carga puntual a la salida y a la entrada del canal en forma independiente. El resultado esperado es que grandes pér-

didadas de carga a la salida tienden a hacer el sistema más propenso a inestabilidades de ondas de densidad, y viceversa. En efecto, esto es lo que observamos en la figura 6.8.

Como una forma de estimar el error absoluto en la determinación de la estabilidad, podemos comparar los resultados del método desarrollado con mapas de estabilidad obtenidos analíticamente. Guido Lavalle, Converti, y Clause (1991) estudiaron la estabilidad lineal de un canal sin fricción distribuida y sin la influencia de la gravedad a partir de un balance quasi-estático de fuerzas. Analizando el sistema lineal de ecuaciones resultantes, obtuvieron límites de estabilidad en función del parámetro $2(k_i + k_e)/(k_e + 1)$, resultado que mostramos en la figura 6.9. El modelado basado en nodos variables y la solución numérica difusiva utilizada en el método del análisis de dimensión tiende a subestimar la inestabilidad por ondas de densidad. Sin embargo, los límites de Ledinegg coinciden notablemente.

6.4. Canales paralelos

Consideremos ahora el caso de canales de ebullición paralelos. En la figura 6.10 mostramos dos canales exactamente iguales, acoplados mediante dos plenums ideales que mezclan perfectamente el fluido. Todo el conjunto está sujeto a una diferencia de presión constante y los números adimensionales que caracterizan el problema se refieren a las propiedades —por ejemplo la potencia disipada q — de sólo un canal. Sea A_p^+ el área de la tubería de entrada al plenum inferior y de salida del superior. La entalpía de la mezcla en el plenum inferior es igual a la entalpía de entrada, mientras que en el plenum superior es

$$h_{pe}^+ = \frac{u_{e1}^+ h_{e1}^+ + u_{e2}^+ h_{e2}^+}{u_{e1}^+ + u_{e2}^+}$$

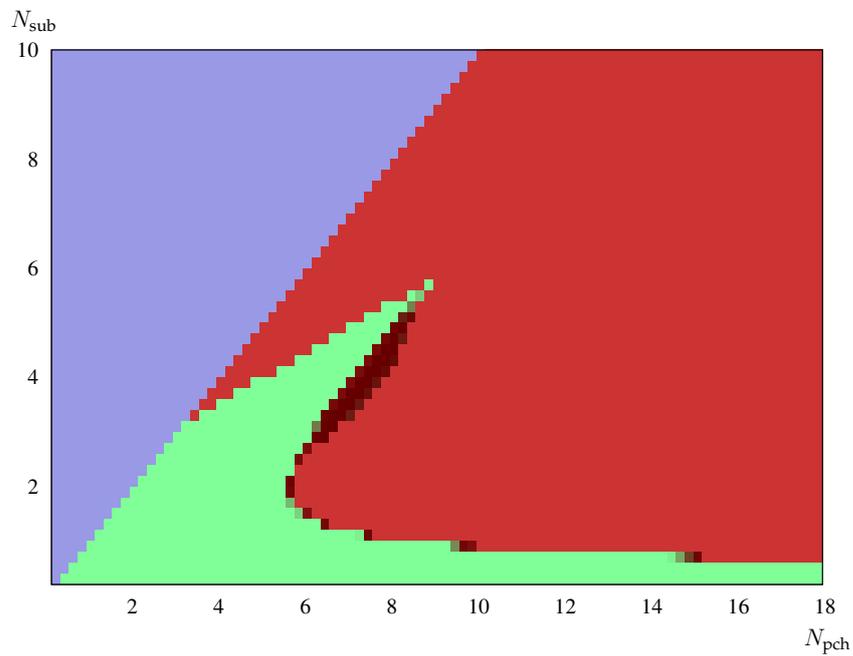
Teniendo en cuenta la ecuación (6.5) y la definición del número de cambio de fase transitorio (6.15), resulta

$$h_{pe}^+ = \frac{u_{e1}^+ \frac{\tilde{N}_{pch1}}{N_{pch}} (1 - \lambda_1^+) + u_{e2}^+ \frac{\tilde{N}_{pch2}}{N_{pch}} (1 - \lambda_2^+)}{u_{e1}^+ + u_{e2}^+}$$

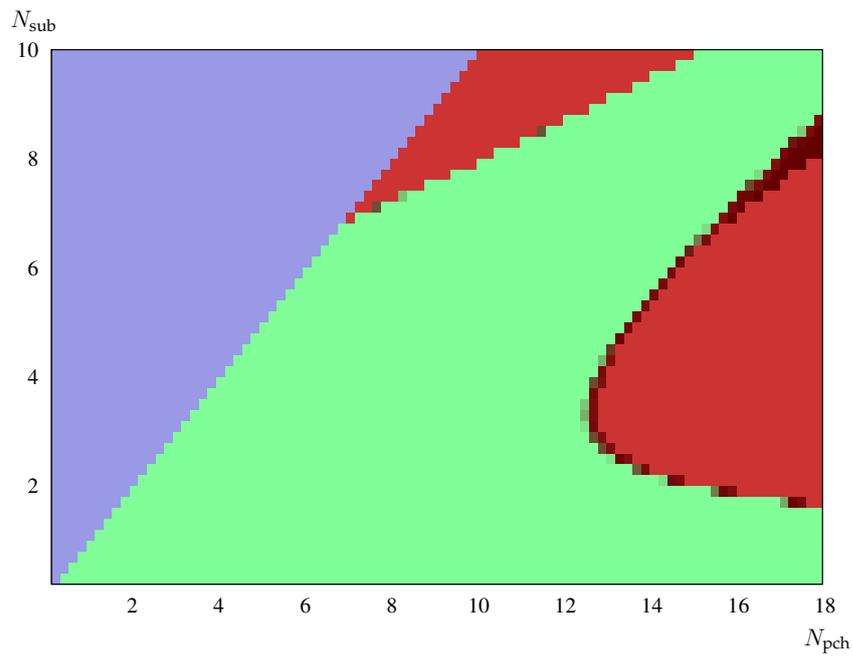
Luego la densidad que corresponde a esta entalpía es, según el modelo homogéneo

$$\rho_{pe}^+ = \frac{1}{1 + N_{pch} h_{pe}^+}$$

con lo que las pérdidas de carga concentradas en los plenums son



(a) $k_e = 6$



(b) $k_i = 10$

Figura 6.8: Efecto de las pérdidas de carga puntuales en la estabilidad de un boiling channel. Los parámetros son los mismos que los del mapa de la figura 6.5, aumentando en cada caso el coeficiente de pérdida a la salida y a la entrada en cuatro unidades.

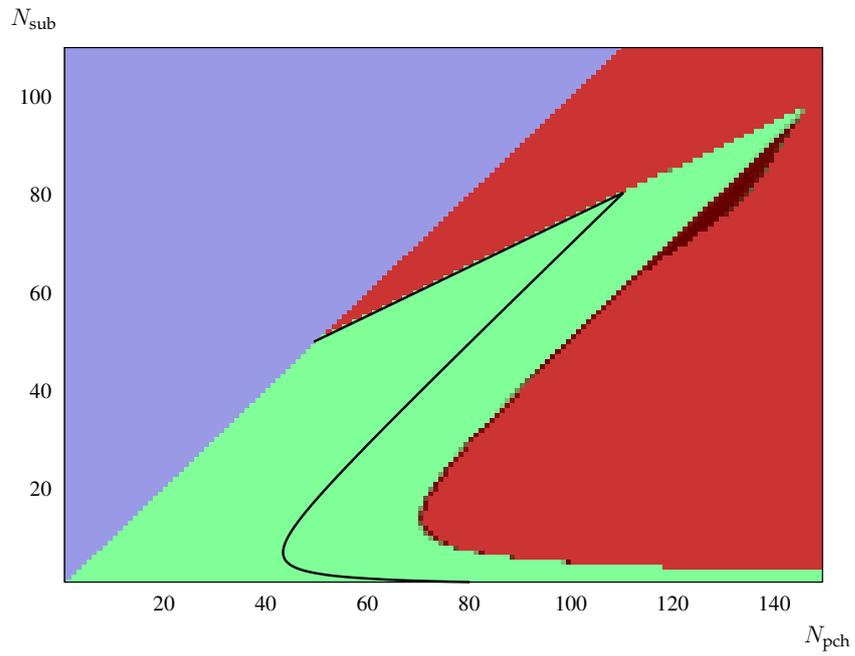


Figura 6.9: Comparación entre la estabilidad predicha por Guido Lavalle et al. (1991) y el método desarrollado en este capítulo para $2(k_i + k_e)/(k_e + 1) = 50$ ($\Lambda = 0$, $Fr = 10^6$, $b = 0$, $N_{1\phi} = 20$).

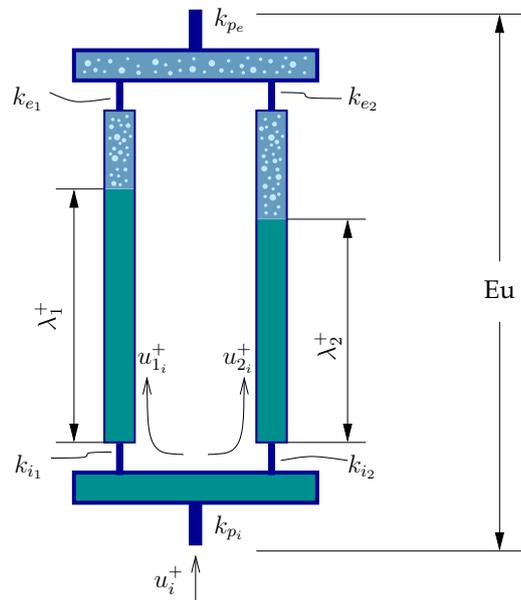


Figura 6.10: Dos canales verticales paralelos idénticos

$$\Delta p_{p_i}^+ = k_{p_i} \left(\frac{u_{1_i}^+ + u_{2_i}^+}{A_p^+} \right)^2$$

$$\Delta p_{p_e}^+ = k_{p_e} \rho_{p_e}^+ \left(\frac{u_{1_e}^+ + u_{2_e}^+}{A_p^+} \right)^2$$

Estos términos se agregan sumando algebraicamente a las expresiones para la pérdida de carga por fricción Δp_f^+ de cada canal, resultando así en un problema de $2(N_{1\phi} + 2)$ ecuaciones diferenciales ordinarias, acopladas a través de las velocidades de entrada de cada uno de los canales justamente en las ecuaciones de $u_{i_1}^+$ y $u_{i_2}^+$.

En el estado estacionario, las velocidades de los canales son iguales, por lo que para calcular el número de Euler del problema en función del número de cambio de fase, debemos reemplazar el factor k_i en la ecuación (A.21) por

$$\left[k_i + k_{p_i} \left(\frac{2}{A_p^+} \right)^2 \right] \quad (6.26)$$

y análogamente el factor k_e por

$$\left[k_e + k_{p_e} \left(\frac{2}{A_p^+} \right)^2 \right] \quad (6.27)$$

debido a que en el estado estacionario, las densidades en los plenums son iguales a las densidades de entrada y de salida respectivamente, de cada uno de los canales.

! Si los factores de pérdida de carga en los plenums fuesen nulos, entonces los canales estarían desacoplados y se comportarían como dos problemas independientes. Esto es así ya que estamos suponiendo que la diferencia de presión es siempre la misma independientemente del caudal total. En una situación real, la diferencia de presión que entrega una bomba depende del caudal instantáneo, por lo que aún sin pérdidas de carga comunes que hagan aparecer explícitamente en las ecuaciones de un canal la velocidad del otro, los canales estarían de todas maneras influenciados mutuamente.

Guido Lavalle, Converti, y Clausse (1991) muestran analíticamente que dos canales paralelos idénticos tienen dos modos normales de oscilación, en fase o en contra fase. En las figuras 6.11–6.14 mostramos resultados para parámetros particulares del problema, introduciendo una perturbación positiva de un 5% con respecto al estado estacionario en la velocidad de entrada de uno de los canales². En efecto, encontramos tanto oscilaciones en fase, en contra fase y

²Si perturbáramos —irrealmente— ambos canales con la misma intensidad, el sistema evolucionaría como un solo canal.

con una fase arbitraria dependiendo principalmente de la intensidad relativa de los coeficientes de pérdidas en los plenums.

El hecho de acoplar canales paralelos a través de plenums comunes hace que, además de propagar perturbaciones entre canales, cambie el mapa de estabilidad con respecto al caso de un sólo canal, ya que además de cambiar las condiciones de pérdida de carga total, es posible que el acoplamiento haga que una pequeña oscilación se sostenga —o incluso crezca— en condiciones que de otra manera se disiparía. En la figura 6.15 mostramos la diferencia entre el mapa de estabilidad de dos canales paralelos idénticos, acoplados mediante dos plenums de área $A_p^+ = 1$ y $k_{p_i} = k_{p_e} = 1$, con respecto al mapa de estabilidad calculado en el caso de la figura 6.5. Cada uno de los canales corresponde a los parámetros de la figura 6.5 pero con coeficientes de pérdidas $k_i = 5$ y $k_e = 1$ para mantener la pérdida de carga total en cada canal individual. La dimensión analizada es la del vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ \\ u_{i_1}^+ \\ m_1^+ \end{bmatrix}$$

correspondiente a uno de los canales. El color verde claro del mapa de la figura 6.15 corresponde a las condiciones en las cuales la estabilidad de un canal independiente es igual a la estabilidad de dos canales acoplados. Vemos que el acoplamiento hace que el sistema sea más propenso a oscilaciones por ondas de densidad, inestabilidad que se verifica para números de cambio de fase menores. Sin embargo, el caso de canales paralelos es más resistente a inestabilidades de Ledinegg. La zona de inestabilidad excursiva es más pequeña para dos canales acoplados que para un sólo canal. Más aún, el acoplamiento hace que en zonas cercanas al límite existan oscilaciones que no eran posibles con un sólo canal.

6.5. Riser adiabático

Volvamos ahora a estudiar un sólo canal vertical, y analicemos el caso en el que el canal tiene, además de una sección calefaccionada, un riser adiabático de longitud L_R y de área transversal A_R . El área transversal de la sección calefaccionada es $A < A_R$ ya que, por ejemplo, esta sección contiene elementos que generan potencia desde el interior. Sin embargo, la sección en los extremos del canal es la misma e igual a A_R , como mostramos en la figura 6.16. De todas maneras, para mantener el desarrollo realizado en la sección 6.2 tomamos como área de referencia la sección transversal A de la zona calefaccionada.

Consideremos el volumen de control V que abarca sólo al fluido contenido

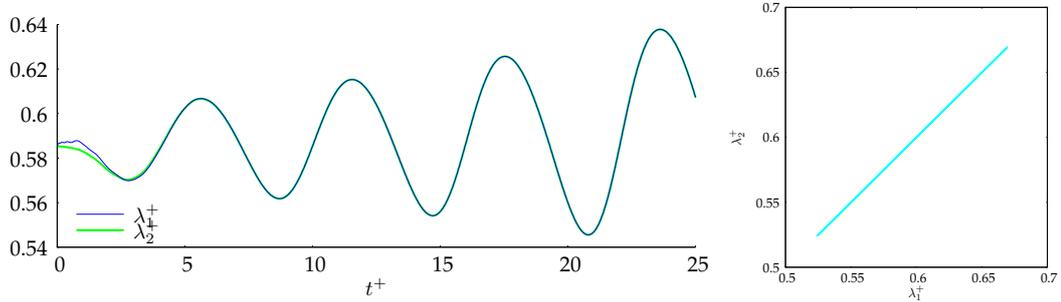


Figura 6.11: Fronteras de ebullición de dos canales paralelos para una perturbación positiva de un 5% en la velocidad de entrada del canal 1. Evolución temporal del inicio del transitorio y flujo asintótico en el espacio de fases $\lambda_1^+ - \lambda_2^+$ para $Fr = 1$, $\Lambda = 3$, $k_i = 6$, $k_e = 2$, $k_{p_i} = 0$, $k_{p_e} = 1$, $A_p^+ = 1$, $N_{sub} = 6$, $N_{pch} = 10,25$.

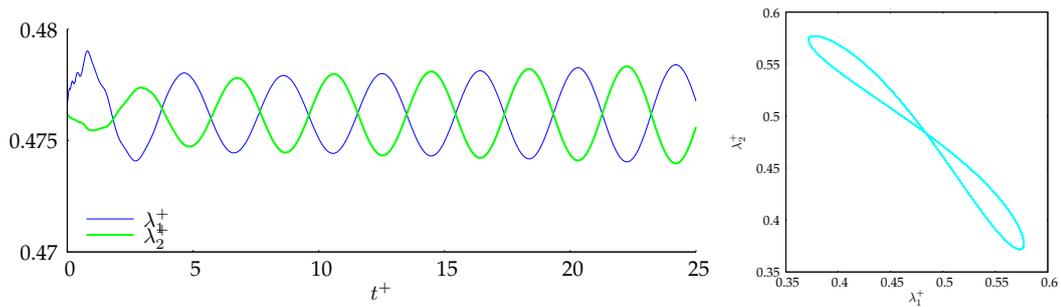


Figura 6.12: Ídem figura 6.11, para $k_{p_i} = 1$, $k_{p_e} = 0$, $N_{pch} = 12,6$.

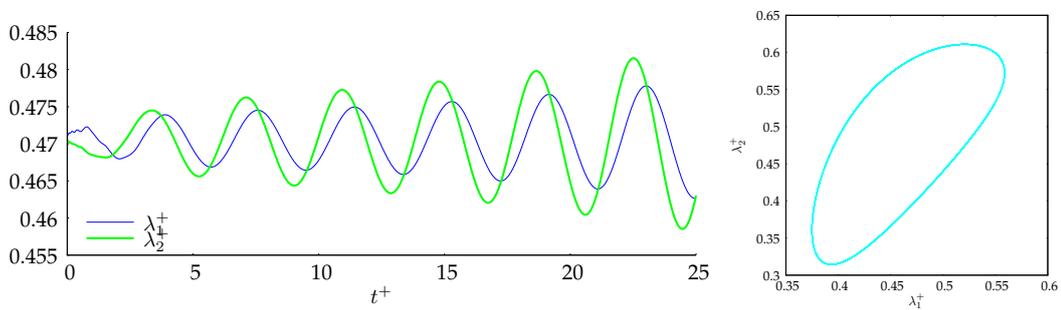


Figura 6.13: Ídem figura 6.11, para $k_{p_i} = 5$, $k_{p_e} = 1$, $N_{pch} = 12,75$.

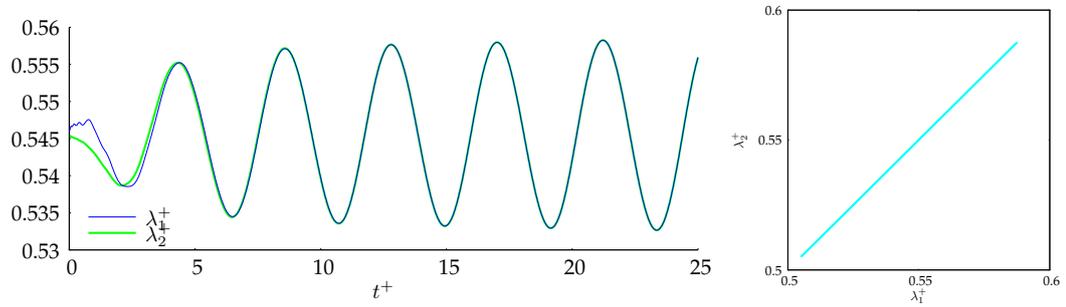


Figura 6.14: Ídem figura 6.11, para $k_{p_i} = 1$, $k_{p_e} = 1$, $N_{pch} = 11$.

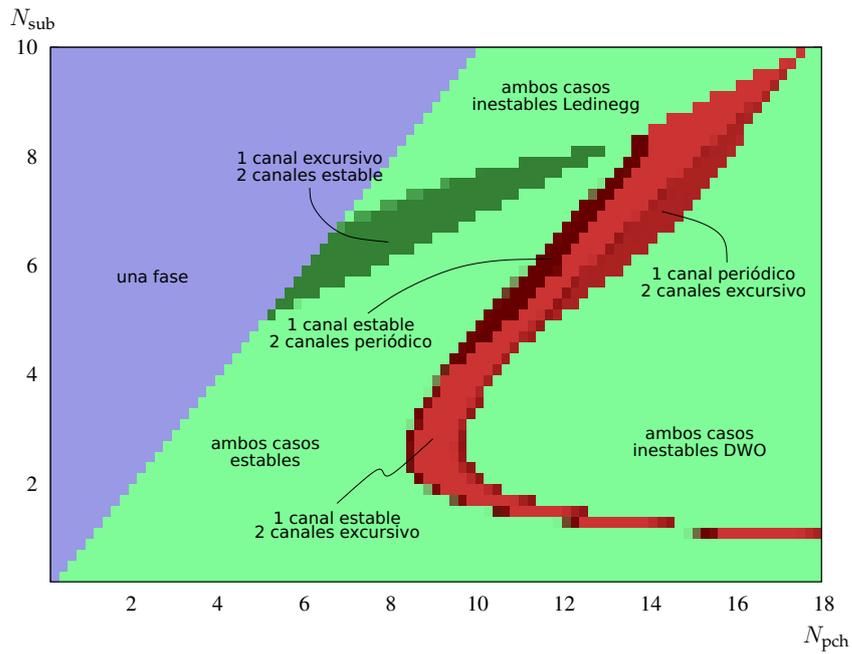


Figura 6.15: Diferencia entre el mapa de estabilidad de un canal simple y de dos canales idénticos acoplados con plenums de área $A_p^+ = 1$, $k_{p_i} = 1$, $k_{p_e} = 1$. Notar que los comportamientos no son todos los posibles y sólo corresponden a la perturbación propuesta.

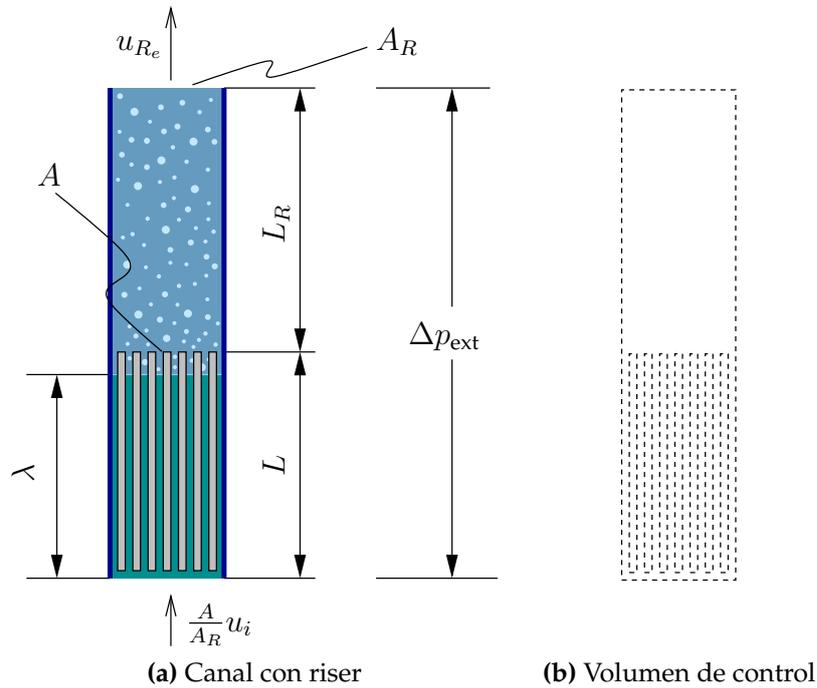


Figura 6.16: Canal vertical de ebullición con un riser adiabático

dentro del canal (figura 6.16b), y realicemos la conservación de flujo de momento lineal al estilo propuesto por White (1999)

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \mathbf{u} \cdot \rho dV \right] + \int_{\partial V} \mathbf{u} \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = \sum \mathbf{F}$$

Las fuerzas que debemos incluir en el miembro derecho son por un lado las fuerzas volumétricas y por el otro las que actúan tanto en forma normal como tangencial a la superficie del volumen de control. Las primeras corresponden al efecto de la gravedad, las segundas a la presión externa fija y las últimas al esfuerzo de corte en las paredes laterales del volumen de control. Escribimos entonces

$$\sum \mathbf{F} = - \int_V g \rho dV + \Delta p_{\text{ext}} A_R - \int_{\partial V} \tau_w dA$$

El último término se compone de una fuerza distribuida que podemos poner en función del factor de Fanning (White, 1999)

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u^2}$$

y de fuerzas puntuales en los cambios de áreas. Escribimos entonces el esfuerzo de corte integrado como

$$\int_{\partial V} \tau_w dA = \int_0^{L+L_R} \frac{1}{2} f \rho u^2 P_{\text{moj}} dz + \sum k \rho u^2 A$$

Utilizando el hecho de que el diámetro hidráulico es $D_H = 4A/P_{\text{moj}}$, que el factor de fricción f de Darcy es cuatro veces el factor f de Fanning y asignando coeficientes de pérdida de carga puntuales a las entradas y salidas tanto de la zona calefacionada como del riser, resulta

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \tau_w dA = & \frac{f}{2D_H} \int_0^L \rho u^2 A dz + \frac{f_R}{2D_{RH}} \int_L^{L+L_R} \rho u^2 A_R dz \\ & + k_i \rho_i u_i^2 A + k_e \rho_e u_e^2 A + k_{R_i} \rho_{R_i} u_{R_i}^2 A_R + k_{R_e} \rho_{R_e} u_{R_e}^2 A_R \end{aligned}$$

El flujo de momento lineal en el volumen V queda entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L u \rho A dz \right] + \frac{d}{dt} \left[\int_L^{L+L_R} u \rho A_R dz \right] \\ - \left(u_i \frac{A}{A_R} \right)^2 \rho_i A_R + u_{R_e}^2 \rho_{R_e} A_R = & - \int_0^L g \rho A dz - \int_L^{L+L_R} g \rho A_R dz \\ & - \frac{f}{2D_H} \int_0^L \rho u^2 A dz \\ & - \frac{f_R}{2D_{RH}} \int_L^{L+L_R} \rho u^2 A_R dz \\ & - k_i \rho_i u_i^2 A - k_e \rho_e u_e^2 A \\ & - k_{R_i} \rho_{R_i} u_{R_i}^2 A_R \\ & - k_{R_e} \rho_{R_e} u_{R_e}^2 A_R + \Delta p_{\text{ext}} A_R \end{aligned}$$

que podemos adimensionalizar con los valores de referencia correspondientes al canal calefacionado —es decir, de la misma manera que en la sección 6.2— como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^+} \left[\int_0^1 u^+ \rho^+ dz^+ \right] \\ + \frac{d}{dt^+} \left[\int_1^{1+L_R^+} u^+ \rho^+ A_R^+ dz^+ \right] \\ - \frac{u_i^{+2}}{A_R} + u_{R_e}^{+2} \rho_{R_e}^+ A_R^+ = & - \frac{1}{\text{Fr}} \int_0^1 \rho^+ dz^+ - \frac{1}{\text{Fr}} \int_1^{1+L_R^+} \rho^+ A_R^+ dz^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Lambda \int_0^1 \rho^+ u^{+2} A dz^+ \\
& -\Lambda_R \int_1^{1+L_R^+} \rho^+ u^{+2} A_R^+ dz^+ \\
& -k_i u_i^{+2} - k_e \rho_e^+ u_e^{+2} \\
& -k_{R_i} \rho_{R_i}^+ u_{R_i}^{+2} A_R^+ \\
& -k_{R_e} \rho_{R_e}^+ u_{R_e}^{+2} A_R^+ + \text{Eu} A_R^+ \quad (6.28)
\end{aligned}$$

con el número de fricción del riser definido como

$$\Lambda_R = \frac{f_R L}{D_{RH}}$$

! Notar que la longitud L que interviene en Λ_R es la longitud de la zona ca-
lefacionada. La longitud del riser está dada por el extremo de integración
del producto $\rho^+ u^{+2} A_R^+$ en z^+ .

Debido a que en el riser no existe transferencia de calor hacia el fluido, la
velocidad es homogénea en toda la longitud, sólo depende del tiempo y es
idénticamente igual a

$$u_R = u_e \frac{A}{A_R} \quad (6.29)$$

Teniendo en cuenta este resultado, identificando los términos Δp_i^+ (ecua-
ción (6.16)), Δp_f^+ (ecuación (6.21)) y Δp_g^+ (ecuación (6.22)) en la ecuación (6.28)
y sabiendo que la masa adimensional contenida en el riser es

$$m_R^+ = \int_1^{1+L_R^+} \rho^+ A_R^+ dz^+$$

podemos escribir la ecuación de momento como

$$\begin{aligned}
\Delta p_i^+ + \frac{d}{dt^+} [u_R^+ m_R^+] - \frac{u_i^2}{A_R^+} + u_R^{+2} A_R^+ \rho_{R_e}^+ &= -\Delta p_g^+ - \frac{1}{\text{Fr}} m_R^+ - \Delta p_f^+ - \Lambda_R u_R^{+2} m_R^+ \\
&\quad - u_R^{+2} A_R^+ (k_{R_i} \rho_{R_i}^+ + k_{R_e} \rho_{R_e}^+) + \text{Eu} A_R^+
\end{aligned}$$

La derivada de la velocidad adimensionalizada en el riser con respecto al
tiempo es

$$\begin{aligned}
\frac{du_R^+}{dt^+} &= \frac{1}{A_R^+} \frac{du_e^+}{dt^+} \\
\frac{du_R^+}{dt^+} &= \frac{1}{A_R^+} \left[\frac{du_i^+}{dt^+} - N_{\text{sub}} \frac{d\lambda^+}{dt^+} \right]
\end{aligned}$$

En principio, tomamos que la densidad a la entrada del riser es igual a la densidad del pseudo-fluido a la salida del canal

$$\rho_{R_i}^+ = \rho_e^+$$

para todo tiempo. En particular, en el estado estacionario, $\rho_{R_i}^+ = \rho_{R_e}^+ = \rho_{e_0}^+$ y la masa que contiene el riser en este caso es

$$\begin{aligned} m_{R_0}^+ &= \rho_{e_0}^+ A_R^+ L_R^+ \\ m_{R_0}^+ &= \frac{A_R^+ L_R^+}{1 + N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}}} \end{aligned}$$

En el transitorio, m_R^+ evoluciona según

$$\frac{dm_R^+}{dt^+} = A_R^+ u_R^+ (\rho_{R_i}^+ - \rho_{R_e}^+) \quad (6.30)$$

Ahora, dado que en esta zona el fluido no intercambia calor, entonces una partícula que entre en un tiempo t^+ al riser mantendrá constante su densidad y llegará a la salida en un tiempo $t^+ + \psi^+$ tal que

$$L_R^+ = - \int_{t^+}^{t^+ - \psi^+} u_R^+(\tau) d\tau \quad (6.31)$$

con lo que la densidad a la salida del riser es

$$\rho_{R_e}^+(t^+) = \rho_e^+(t^+ - \psi^+) \quad (6.32)$$

Las ecuaciones (6.31) y (6.32) hacen posible la evaluación de la derivada (6.30), lo que define la masa del riser tiempo a tiempo, haciendo posible a su vez el cálculo de u_i^+ a partir del balance de momento (6.28) como

$$\begin{aligned} \frac{du_i^+}{dt^+} &= \frac{1}{m^+ + \frac{m_R^+}{A_R^+}} \left\{ -\frac{dm^+}{dt^+} u_i^+ + \frac{N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} \left[\frac{dm^+}{dt^+} \tilde{N}_{\text{pch}} + (1 - m^+) \frac{d\tilde{N}_{\text{pch}}}{dt^+} \right] \right. \\ &\quad + \frac{N_{\text{sub}} m_R^+}{A_R^+} \frac{d\lambda^+}{dt^+} - u_R^+ \frac{dm_R^+}{dt^+} + \frac{u_i^{+2}}{A_R^+} - u_R^{+2} \rho_{R_e}^+ A_R^+ - \Delta p_g^+ - \frac{1}{\text{Fr}} m_R^+ \\ &\quad \left. - \Delta p_f^+ - \Lambda_R u_R^{+2} m_R^+ - A_R^+ u_R^{+2} (k_{R_i} \rho_{R_i}^+ + k_{R_e} \rho_{R_e}^+) + \text{Eu} A_R^+ \right\} \end{aligned}$$

que, con las ecuaciones para la posición de las fronteras de los $N_{1\phi}$ nodos, la masa del canal y la ecuación (6.30) conforma un sistema dinámico integro-diferencial no lineal de dimensión $N_{1\phi} + 3$ para el vector de estado

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \ell_0^+ \\ \ell_1^+ \\ \vdots \\ \ell_{N_{1\phi}}^+ \\ m^+ \\ m_R^+ \\ u_i^+ \end{bmatrix}$$

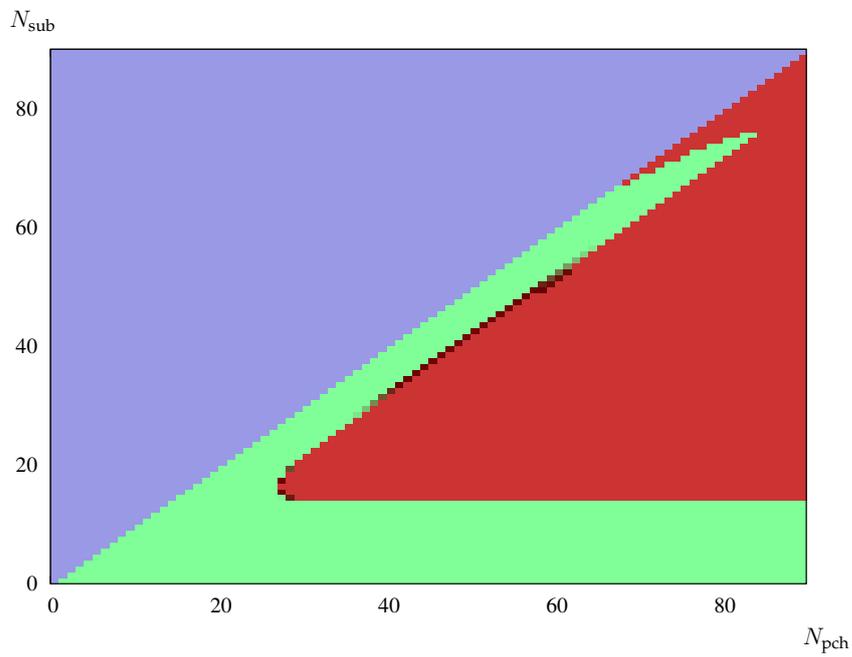
6.5.1. Estabilidad

El hecho de disminuir el número de Froude e incorporar un riser para aumentar los efectos de la convección natural hace que aparezca un mecanismo de inestabilidad que antes no estaba presente. En este caso, puede llegar a haber un retardo en el transporte de frentes de entalpía que modifican la fuerza boyante y correspondientemente el caudal, provocando oscilaciones de amplitud creciente. En la literatura sobre convección natural suele definirse a esta clase de inestabilidades como de tipo I, en contraste con las inestabilidades de onda de densidad que reciben el nombre de tipo II (Van Bragt y Van Der Hagen, 1998a; Zanicco, 2005). Estos efectos aparecen en situaciones donde el número de cambio de fase es ligeramente superior al número de subenfriamiento.

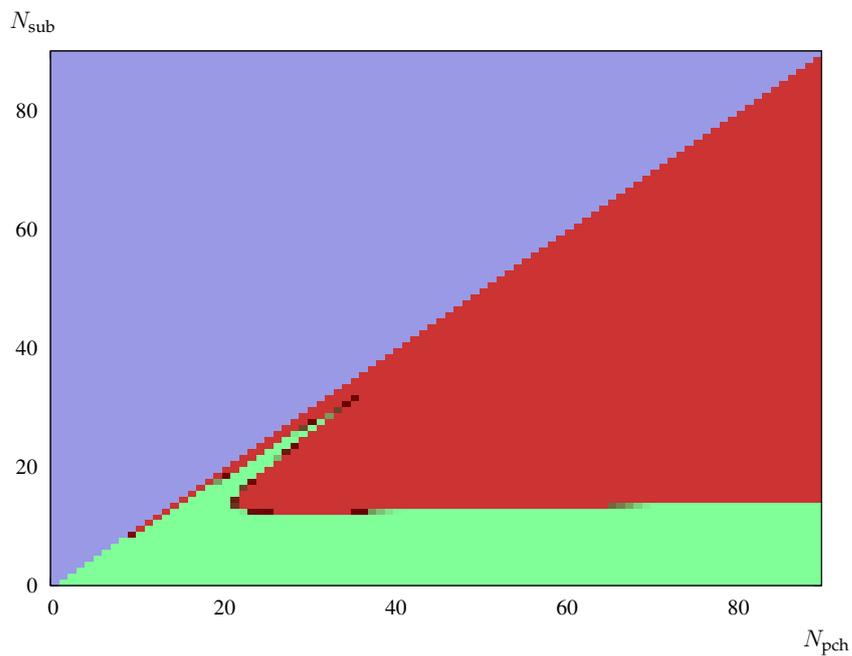
En la figura 6.17a mostramos el mapa de estabilidad para un canal sin riser, mientras que en la figura 6.17b agregamos al mismo canal un riser de longitud $L_R^+ = 0,1L^+$. Allí vemos que las inestabilidades de tipo I reducen sensiblemente la estabilidad en el espacio de parámetros. De la misma manera, construimos un mapa de estabilidad para un riser de longitud adimensional $L_R^+ = 4$ en la figura 6.18, que no guarda ninguna relación con la topología del resto de los mapas de estabilidad de los canales en ebullición que obtuvimos hasta el momento.

! En los mapas de estabilidad mostrados hemos mantenido el número de Froude constante. Como la velocidad de referencia depende del número de cambio de fase, entonces la longitud L debe ser necesariamente diferente para cada punto del mapa, pero la relación $L^+ = L/L_R$ es la misma para todos.

Chang y Lahey (1997) muestran que para ciertos parámetros, un canal con un riser acoplado puede presentar atractores caóticos. Justamente desarrollamos el método de análisis de estabilidad a través de la dimensión fractal para encontrar sistemáticamente el subespacio de parámetros que dan lugar a órbitas caóticas. El acople de un riser adiabático da lugar a ciclos límite que tienen alguna clase de complejidad, como por ejemplo el mostrado en la figura 6.19. Sin embargo, no hemos logrado reproducir resultados caóticos sostenidos para todo tiempo.



(a) Sin riser



(b) Con un riser de longitud $L_R^+ = 0,1$

Figura 6.17: Aparición de un nuevo modo de inestabilidad debido a los efectos de la incorporación de un riser. $Fr = 0,0015$, $b = 0,0002$, $\Lambda = 1$, $k_i = 40$, $k_e = 10$, $A_R^+ = 3$, $\Lambda_R = 0$, $k_{R_i} = 1$, $k_{R_e} = 1$.

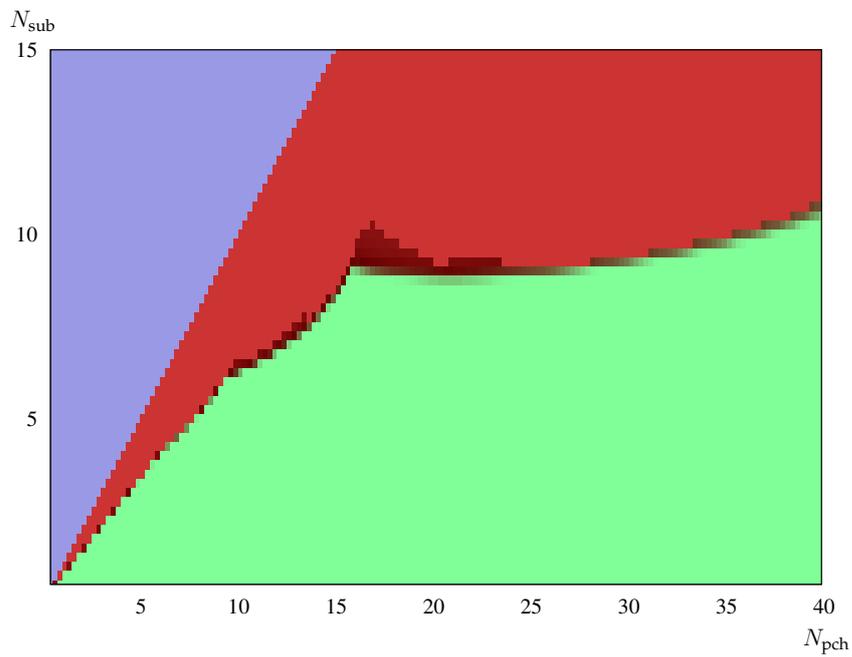


Figura 6.18: Mapa de estabilidad para $L_R^+ = 4$

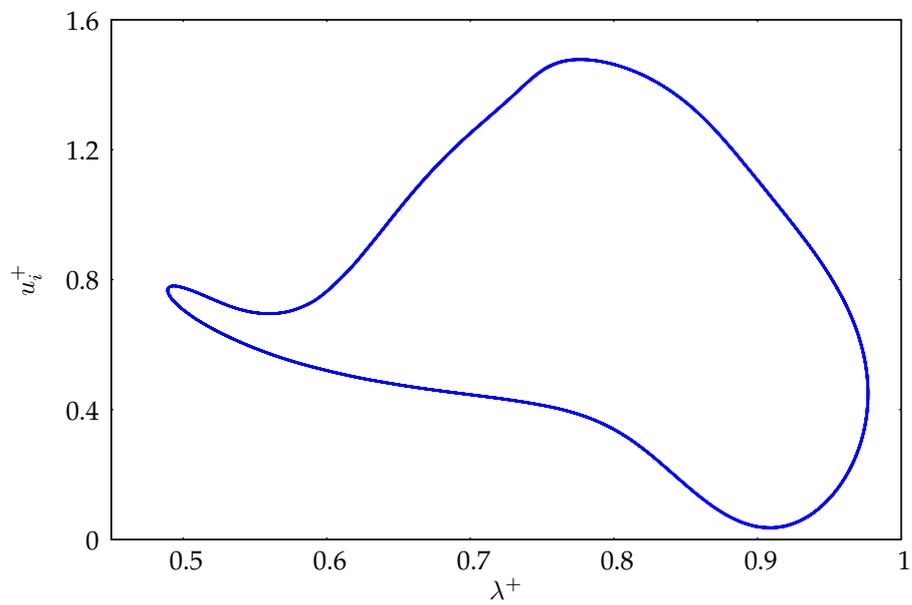


Figura 6.19: Flujo en el espacio λ^+ vs. u_i^+ para $Fr = 0,0015$, $b = 0,0002$, $N_{pch} = 7,6$, $N_{sub} = 5,0$, $A_R^+ = 3$, $L_R^+ = 1$, $\Lambda = 1$, $k_e = 10$, $k_i = 40$, $\Lambda_R^+ = 0$, $k_{Ri} = 1$, $k_{Re} = 1$

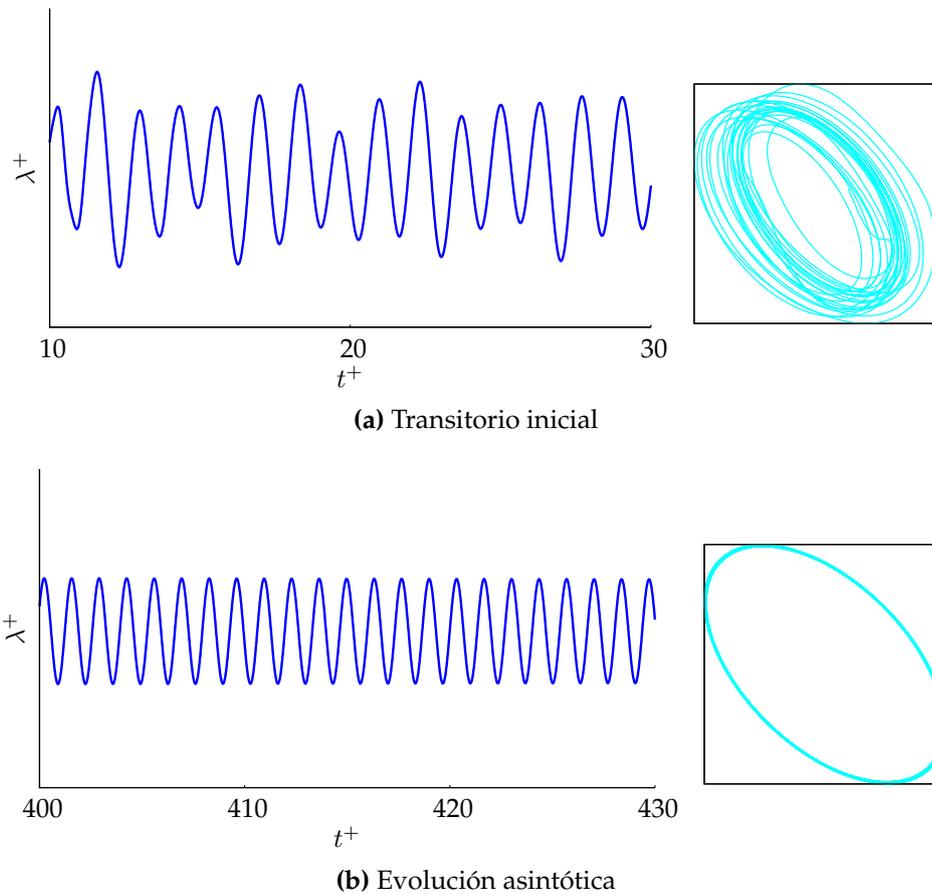


Figura 6.20: En los instantes iniciales de un transitorio la evolución temporal tiene características caóticas, pero para tiempos grandes el sistema evoluciona hacia un ciclo límite periódico.

Para alguna combinación de parámetros, efectivamente encontramos alguna clase de no periodicidad inicial luego de la perturbación del estado estacionario. Pero ésta se transforma en un ciclo límite estable para tiempos grandes, como ilustramos en la figura 6.20. La mayoría de los transitorios iniciales tienen la forma de la figura 6.20a, pero luego las perturbaciones son atenuadas en canales estables, llevadas a un ciclo límite periódico en casos oscilatorios o amplificadas en los casos inestables.

Con una longitud considerable del riser, en el mapa de estabilidad de la figura 6.18 vemos que existe una zona donde la dimensión del atractor resultante es mayor que uno. En este caso también observamos características de no periodicidad como observamos en la figura 6.21. Sin embargo, el flujo no se sustenta en el tiempo ya que para tiempos más grandes aún —del orden de $t^+ \approx 1500$ — la velocidad u^+ se hace negativa, invalidando el modelo de Clause y Lahey. Sospechamos entonces que estos efectos de aparente

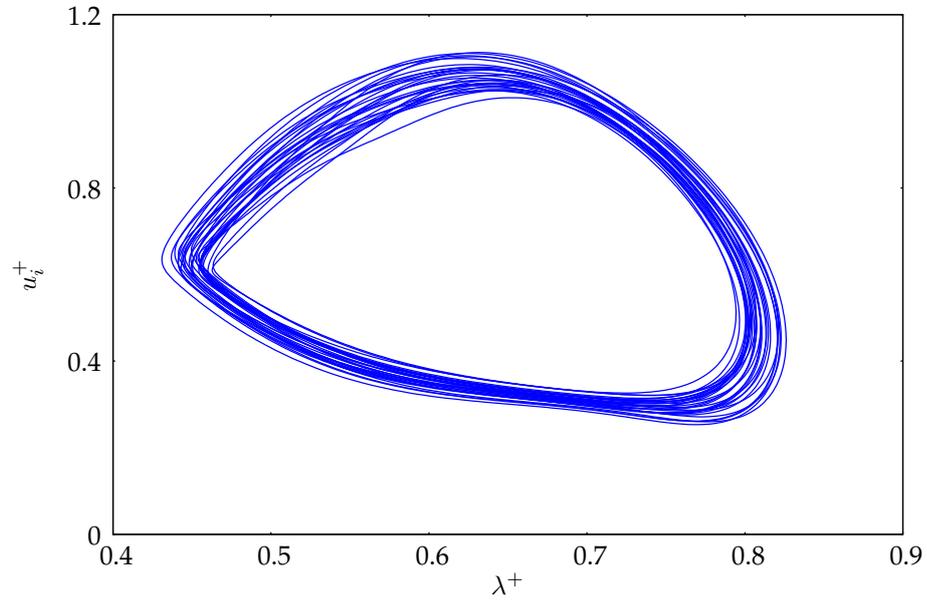


Figura 6.21: Flujo en el espacio λ^+ vs. u_i^+ para $Fr = 0,0015$, $b = 0,0002$, $N_{pch} = 16,25$, $N_{sub} = 9,5$, $A_R^+ = 3$, $L_R^+ = 1$, $\Lambda = 1$, $k_e = 10$, $k_i = 40$, $\Lambda_R^+ = 0$, $k_{Ri} = 1$, $k_{Re} = 1$

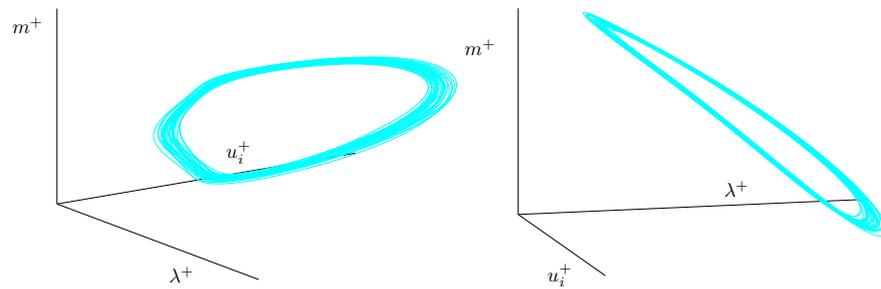


Figura 6.22: Flujo el espacio λ^+ vs. u_i^+ vs m^+ para el flujo de la figura 6.21. A pesar de ser no periódico, el flujo no presenta las características de doblado y mezclado características de un sistema caótico.

caos se deben a una combinación entre la no linealidad del sistema y una mal condicionamiento numérico para esa combinación de parámetros en particular. Además, en la figura 6.22 mostramos el flujo tridimensional al considerar también la masa m^+ del canal. No observamos las características de *folding* y *mixing* características de sistemas caóticos ergódicos que según discutimos en la sección 2.3.4 son aquellos en los que los promedios temporales asociados a una órbita dada resultan iguales a los promedios instantáneos tomados sobre varias órbitas. Para que esto suceda, las órbitas individuales deben *doblarse* y *mezclarse*, tal como discute Ott (2002). El hecho de que no encontremos estas características en la figura 6.22 refuerza la idea de que este comportamiento se deba a un efecto puramente numérico más que a una característica inherente al problema de un canal de ebullición un un riser adiabático.

Reactor nuclear integrado de convección natural

No one [. . .] would be able to recall an occasion when the blue-suiters pulled an end run around their own inviolate rule:
“Fly it before you buy it.”
Ben Ritch, Skunk Works, 1994

Los reactores integrados surgen al considerar la seguridad como principal objetivo de diseño, ya que la eliminación de cañerías de gran diámetro en la envuelta de presión disminuye considerablemente la probabilidad de ocurrencia de incidentes de pérdida de refrigerante. Más aún, si los efectos de la convección natural son suficientes para establecer un caudal de refrigeración sin depender de elementos activos, prácticamente no existe la posibilidad de que ocurran accidentes con pérdida de caudal de refrigeración. Estas características junto a la utilización de sistemas de seguridad pasivos hace que este tipo de reactores sean inherentemente seguros, obteniendo probabilidades de fusión de núcleo dos órdenes de magnitud menores que en los diseños tradicionales.

En este capítulo desarrollamos un sistema dinámico que intenta aproximar la evolución temporal de un reactor integrado de convección natural, basado fuertemente en las ecuaciones desarrolladas en el capítulo anterior. La finalidad del modelo no es estudiar transitorios desde el punto de vista de la seguridad sino estudiar cómo es la evolución en temporal de ciertas variables de interés tales como la potencia total o el caudal de refrigeración en función del tiempo ante pequeñas perturbaciones del punto de trabajo de diseño a plena potencia del reactor.

Dado que el modelo matemático desarrollado es adimensional, la cantidad de parámetros externos que toma el sistema dinámico es la mínima posible. De esta manera, es posible identificar y variar sistemáticamente unos pocos parámetros manteniendo el resto constante y construir mapas de estabilidad utilizando las técnicas de análisis de dimensión ya discutidas. Al igual que en

los capítulos 5 y 6 esto permite conocer cómo varía la estabilidad del reactor en función de cambios en los parámetros de diseño a nivel de ingeniería conceptual, sin ser un estudio minucioso de todos los factores que entran en juego en un análisis detallado de transitorios en una etapa posterior de ingeniería.

7.1. Modelo matemático

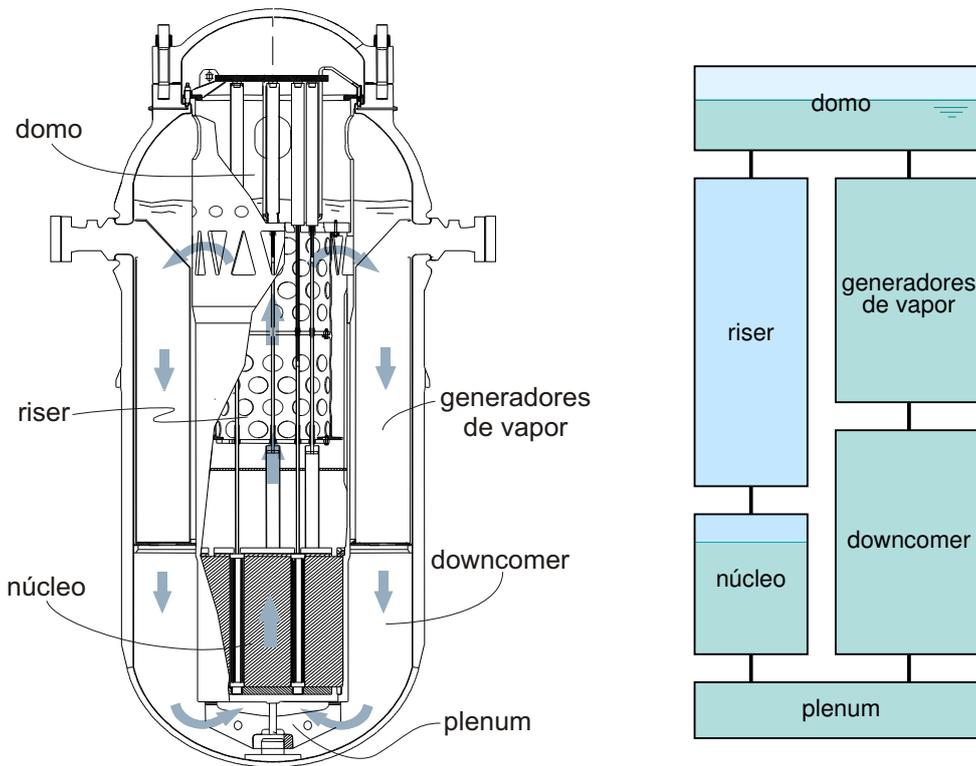
En este tipo de reactores el circuito termohidráulico primario está completamente contenido dentro del recipiente de presión, como mostramos en la figura 7.1a. Como no existe un presurizador externo que controle la presión del sistema, debe proveerse un mecanismo de autopresurización. Para ello, en algún lugar del circuito el refrigerante debe llegar a saturación y proveer vapor que sea capaz de ascender hasta el domo y presurizar recipiente. Por otro lado, para establecer un caudal de circulación debido a la convección natural los generadores de vapor deben estar ubicados por encima del núcleo. De esta manera, se configuran dos piernas, una fría y una pierna caliente con diferentes densidades que dan lugar a una fuerza boyante neta.

El modelo matemático que desarrollamos a continuación consta de ecuaciones para describir el problema circuito termohidráulico, la distribución de temperaturas en el combustible y la potencia neutrónica generada. Para ello, dividimos el reactor en seis zonas funcionalmente diferentes como mostramos en la figura 7.1b. En cada caso, aplicamos una aproximación unidimensional y obtenemos ecuaciones diferenciales ordinarias que determinan la evolución temporal de alguna variable de interés en un nodo determinado, construyendo así un vector de estado y un sistema dinámico que depende de un vector de parámetros adimensionales \mathbf{p}

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

cuya estabilidad —tanto de Lyapunov como BIBO— en función de los parámetros es susceptible de ser analizada con las herramientas desarrolladas en el capítulo 3.

Está claro que un reactor nuclear es un sistema tan complejo y complicado que no es posible describirlo completamente bajo la forma de expresiones matemáticas que puedan ser resueltas con los recursos disponibles hoy en día. Además, con el objetivo de obtener un sistema dinámico que sea razonablemente simple es que debemos realizar alguna cantidad de simplificaciones y suponer que ciertas aproximaciones son válidas. En la sección 7.3 discutimos las limitaciones y puntos débiles del modelo.



(a) RPV de un reactor integrado

(b) Zonas del modelo matemático

Figura 7.1: Recipiente de presión de un reactor integrado y división del modelo matemático en secciones funcionales.

7.1.1. Circuito termohidráulico

En este tipo de reactores en los que la fuente fría está ubicada espacialmente por encima de la fuente caliente, se genera una fuerza boyante neta que genera un caudal de circulación capaz de refrigerar el núcleo y transportar la energía térmica hacia el circuito secundario. Para lograr la autopresurización es necesario que en el núcleo se genere vapor, por lo que el circuito termohidráulico debe tener en cuenta necesariamente flujo de dos fases.

El fenómeno de autopresurización se da cuando existe un desbalance entre la potencia generada en el núcleo y la potencia removida por la fuente fría, en cuyo caso se forma una mayor cantidad de vapor que sube hasta el domo y aumenta la presión de todo el recipiente. Este efecto es difícil de modelar matemáticamente ya que por un lado debemos tener en cuenta una gran cantidad de variables que regulan la dinámica de evaporación y condensación en el domo, y por el otro el hecho de modificar la presión de saturación hace que cambien las propiedades termofísicas del refrigerante lo que complica signi-

ficativamente las ecuaciones de conservación. Es por eso que suponemos que la presión del sistema es constante en el tiempo, y que en el domo el fluido está estratificado en las condiciones de saturación a la presión de diseño. Esto implica que de alguna manera, en el domo se condensa la cantidad correcta de vapor de forma tal de que al generador de vapor ingresa líquido incompresible de forma tal de que se conserve la masa total. Más aún, suponemos que todo recipiente está a la presión de diseño, despreciando la variación de presión hidrostática debido a la altura de las columnas de líquido en las piernas.

! La notación utilizada para la descripción de las variables es similar a la introducida en el capítulo 6. De todas maneras, la cantidad de variables y parámetros es tan grande que es necesario utilizar hasta subíndices dobles en algunos casos, por lo que el significado de algún símbolo puede ser ambiguo en algunos casos. En general, el supraíndice + indica que la variable es adimensional y * indica valor de estado estacionario. Los subíndices se refieren a la zona de la figura 7.1b a la que la variable o el parámetro se refiera, teniendo en cuenta que el núcleo no tiene ningún subíndice asociado. Finalmente, la letra n indica evaluación en la frontera de un nodo, 1ϕ indica una fase y 2ϕ indica dos fases. En cualquier caso, la notación debería quedar clara en función del entorno en la que sea utilizada.

! Las variables correspondientes al circuito termohidráulico están adimensionalizadas de la misma manera que en el capítulo anterior, donde utilizamos los valores de referencia definidos en el apéndice A. Introducimos la adimensionalización de las temperaturas en la sección 7.1.2 correspondiente a la dinámica del combustible y las ecuaciones de cinética puntual están adimensionalizadas de forma tal que la población neutrónica sea igual a la unidad en el estado estacionario.

! Los efectos de autopresurización y de la variación hidrostática de la presión tienen consecuencias importantes en la dinámica. Se recomienda consultar la Tesis Doctoral de Zanocco (2005).

Generador de vapor

El fluido entra desde el domo superior a la zona de los generadores de vapor como líquido saturado a la presión —constante— del sistema y se enfría a medida que desciende, constituyendo un flujo de simple fase. Suponiendo que el fluido es incompresible, entonces la velocidad u_{SG} no depende de la posición. Si despreciamos la conductividad axial y tomamos como densidad del fluido la densidad ρ_f de saturación, entonces la ecuación de energía es

$$\rho_f A_{SG} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u_{SG} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = -h_{SG} P_{SG_{int}} (T - T_{fw})$$

que escrita en forma adimensional resulta

$$\frac{\partial h^+}{\partial t^+} + u_{SG}^+ \frac{\partial h^+}{\partial z^+} = -\text{Nu}_{SG} \frac{k_f}{\rho_f c_{p_f}} \frac{P_{SG_{\text{int}}} L_{SG}}{A_{SG} D_{SG}} \frac{1}{u_{\text{ref}}} \left(h^+ - \frac{c_{p_f} T_{\text{fw}}}{h_{\text{ref}}} \right) \quad (7.1)$$

La correlación más utilizada en la literatura para estimar el número de Nusselt es la debida a Dittus y Boelter (Incropera y Dewitt, 2002)

$$\text{Nu} = \frac{hD}{k} = 0,0023 \text{Re}_D^{4/5} \text{Pr}^{0,3} \quad (7.2)$$

Suponiendo que las propiedades del fluido son independientes de la temperatura, agrupamos el factor adimensional del miembro derecho de la ecuación (7.1) en una constante κ_{SG} para escribir

$$\frac{\partial h^+}{\partial t^+} + u_{SG}^+ \frac{\partial h^+}{\partial z^+} = -\text{Nu}_{SG} \cdot \kappa_{SG} (h^+ - h_2^+) \quad (7.3)$$

donde h_2^+ es la entalpía que tendría el fluido del circuito primario a la temperatura del circuito secundario, que no es necesariamente igual a la entalpía del fluido en el lado secundario del generador de vapor y que suponemos constante e igual a algún valor medio representativo de las condiciones de operación.

Para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, dividimos la longitud L_{SG}^+ en N_{SG} nodos *fijos*, suponemos un perfil lineal de entalpías dentro de cada nodo e integramos la ecuación (7.3) en la longitud del nodo n -ésimo. Si $h_{SG_n}^+$ es la entalpía a la salida del nodo n , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^+} \left[\frac{1}{2} \frac{L_{SG}}{N_{SG}} (h_{SG_n}^+ + h_{SG_{n-1}}^+) \right] \\ + u_{SG}^+ (h_{SG_n}^+ - h_{SG_{n-1}}^+) = -\text{Nu}_{SG} \kappa_{SG} \frac{1}{2} \frac{L_{SG}}{N_{SG}} (h_{SG_n}^+ + h_{SG_{n-1}}^+) \\ + \text{Nu}_{SG} \kappa_{SG} \frac{L_{SG}}{N_{SG}} h_2^+ \end{aligned}$$

y la evolución temporal de la entalpía en cada nodo está dada por

$$\begin{aligned} \frac{dh_{SG_n}^+}{dt^+} = -2u_{SG}^+ \frac{N_{SG}}{L_{SG}} (h_{SG_n}^+ - h_{SG_{n-1}}^+) - \text{Nu}_{SG} \kappa_{SG} (h_{SG_n}^+ + h_{SG_{n-1}}^+) \\ + 2\text{Nu}_{SG} \kappa_{SG} h_2^+ - \frac{dh_{SG_{n-1}}^+}{dt^+} \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde debemos tomar

$$h_{SG_0}^+ = 0$$

ya que supusimos que en el domo el fluido está en condiciones de saturación y que la presión es constante.

Downcomer

La función del downcomer es separar espacialmente la fuente caliente de la fuente fría para promover la convección natural. Idealmente el fluido no debería intercambiar calor en esta zona pero en la práctica, dado que el downcomer rodea al núcleo, alguna cantidad de energía es transferida hacia el fluido. De todas maneras, en este modelo suponemos que esta sección es adiabática. Despreciando nuevamente los efectos de la conductividad axial y razonando como en la sección 6.5 donde calculamos la densidad de salida en un riser adiabático, llegamos a la conclusión de que la entalpía a la salida del downcomer debe ser igual a

$$h_{D_e}^+(t^+) = h_{i_D}^+(t^+ - \psi_D^+)$$

siendo ψ_D^+ un delay tal que

$$L_D^+ = - \int_{t^+}^{t^+ - \psi_D^+} u_D^+(\tau) d\tau$$

Plenum inferior

En el plenum inferior la velocidad del fluido cambia de sentido y existe un efecto de mezclado que tiende a homogeneizar entalpías. Si tomamos que la entalpía de salida del plenum es igual a la entalpía media h_P , que las propiedades del fluido son independientes de la temperatura e iguales a las condiciones de referencia y suponemos un mezclado perfecto, entonces

$$\rho_f V \frac{dh_P}{dt} = \dot{m} (h_{D_e} - h_P)$$

que en forma adimensional resulta

$$\frac{dh_P^+}{dt^+} = \frac{u_i^+}{V_P^+} (h_{D_e}^+ - h_P^+) \quad (7.5)$$

donde el volumen V_P del plenum está adimensionalizado tomando como referencia el volumen AL que ocupa el refrigerante en el núcleo y u_i^+ es la velocidad de entrada al núcleo.

Núcleo

El núcleo es la sección mas compleja para modelar ya que la potencia transferida al fluido depende tanto de la posición espacial como del tiempo y además el fluido sufre un cambio de fase. Si bien la energía útil del reactor proviene de los procesos de fisión que se generan en el material fisible del combustible, la

potencia que se transfiera instantáneamente al fluido refrigerante no es necesariamente igual a la potencia neutrónica generada. La diferencia entre ambas tiene que ver con la dinámica del combustible, que discutimos más adelante. Sea $q'_{\text{fuel}}(z, t)$ la potencia por unidad de longitud transferida desde el combustible hacia el refrigerante. Entonces la ecuación unidimensional de energía es

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho h] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho u h] = \frac{q'_{\text{fuel}}(z, t)}{A} \quad (7.6)$$

En el estado estacionario, $q'_{\text{fiss}}(z^+) = q'_{\text{fuel}}(z^+)$ y la potencia térmica total del reactor es

$$q^* = \int_0^L q'_{\text{fiss}}(z) dz$$

Podemos entonces adimensionalizar la ecuación (7.6) de la misma manera que en el apéndice A para el caso de potencia constante y homogénea, obteniendo ahora la ecuación de energía

$$\frac{\partial}{\partial t^+} [\rho^+ h^+] + \frac{\partial}{\partial z^+} [\rho^+ u^+ h^+] = \frac{q'_{\text{fuel}}(z, t) N_{\text{sub}}}{q^*/L N_{\text{pch}}}$$

Definiendo la potencia lineal adimensional dependiente del tiempo q'^+_{fuel} utilizando como valor de referencia la potencia lineal media q^*/L , la ecuación de energía en el caso general resulta entonces

$$\frac{\partial}{\partial t^+} [\rho^+ h^+] + \frac{\partial}{\partial z^+} [\rho^+ u^+ h^+] = q'^+_{\text{fuel}} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \quad (7.7)$$

Dividimos la zona de una fase del núcleo en $N_{1\phi}$ nodos cuya posición variable está definida por los puntos donde el fluido alcanza las sucesivas entalpías fijas

$$h_n = h_i + (h_f - h_i) \frac{n}{N_{1\phi}}$$

o en forma adimensional

$$h_n^+ = h_i^+ \left(1 - \frac{n}{N_{1\phi}} \right) \quad (7.8)$$

de la misma manera que en la sección 6.2.1. A partir de una distribución continua de potencia axial $q'^+_{\text{fuel}}(z^+, t^+)$, definimos la potencia lineal media en el nodo n (figura 7.2) como

$$\bar{q}'^+_{\text{fuel}_n}(t^+) = \frac{1}{\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+} \int_{\ell_{n-1}^+}^{\ell_n^+} q'^+_{\text{fuel}}(z^+, t^+) dz^+ \quad (7.9)$$

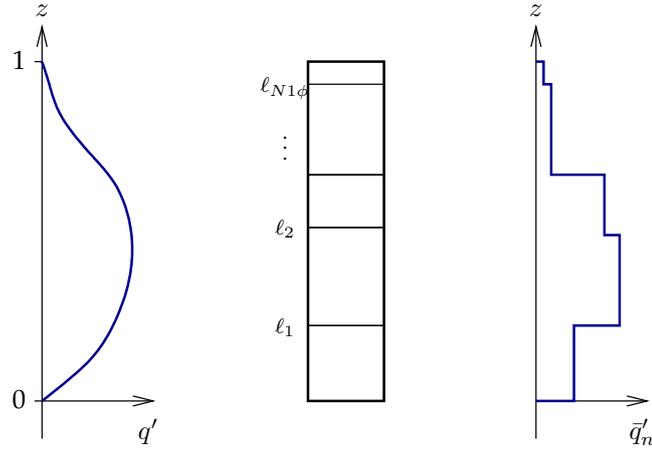


Figura 7.2: Cálculo de la potencia media por nodo. Tanto la amplitud de la distribución de potencia lineal como la posición de los nodos varía en el tiempo.

La ecuación equivalente a la (6.3) para la posición de los nodos en el caso de una distribución axial de potencia arbitraria queda

$$\frac{d\ell_n^+}{dt^+} = 2u_i^+ - 2N_{1\phi} \bar{q}_n'^+ (\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+) - \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+} \quad (7.10)$$

! Notar que si el perfil de potencia es plano e independiente del tiempo, $\bar{q}_n'^+$ es igual a la unidad para todos los nodos y recuperamos las ecuaciones de la sección 6.2.1. Además, siempre se cumple que la potencia total es

$$q^+(t^+) = \int_0^1 q'^+(z^+, t^+) dz^+ = \sum_{j=1}^{N_{1\phi}} q_n'^+ (\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+)$$

e igual a uno en el estado estacionario.

Sin embargo la ecuación (7.10) no vale para un loop cerrado, ya que en este caso la entalpía de entrada h_i^+ —igual a h_p^+ para este modelo— puede no ser constante. Se puede demostrar (Chang y Lahey, 1997) que la ecuación que resulta teniendo en cuenta esta eventual variación temporal es

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_n^+}{dt^+} = & 2u_i^+ + 2N_{1\phi} (\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+) \frac{N_{\text{sub}} \bar{q}_n'^+}{N_{\text{pch}} h_i^+} - \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+} \\ & - (2N_{1\phi} - 2n + 1) (\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+) \frac{1}{h_i^+} \frac{dh_i^+}{dt^+} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Las entalpías que definen la posición de los nodos siguen estando dadas por la ecuación (7.8), sólo que en este caso las entalpías no son fijas sino que dependen —en una forma que podemos conocer— del tiempo.

De la misma manera que para la zona de una fase, la potencia lineal media en el único nodo de la zona de dos fases es

$$\bar{q}'_{\text{fuel}_{2\phi}}(t^+) = \frac{1}{1 - \lambda^+} \int_{\lambda^+}^1 q'_{\text{fuel}}(z^+, t^+) dz^+$$

con lo que el perfil transitorio de densidades es

$$\rho(z^+, t^+) = \frac{1}{1 + N_{\text{pch}} \eta(t^+) \bar{q}'_{2\phi}(t^+) [z^+ - \lambda^+(t^+)]}$$

Con pasos matemáticos análogos a los de la sección 6.2.2, resulta que la relación entre la masa de refrigerante presente en el núcleo y la densidad a la salida es

$$m^+ = \lambda^+ + (1 - \lambda^+) \frac{\ln(1/\rho_e^+)}{1/\rho_e^+ - 1} \quad (7.12)$$

con lo que podemos calcular la densidad a la salida del núcleo en función de m^+ resolviendo la ecuación implícita (7.12). El número de cambio de fase transitorio \tilde{N}_{pch} es ahora

$$\tilde{N}_{\text{pch}}(t) = \eta(t) \bar{q}'_{2\phi}(t) N_{\text{pch}} = \frac{1/\rho_e^+ - 1}{1 - \lambda^+}$$

y en el estado estacionario vale

$$\tilde{N}_{\text{pch}}^* = q'_{\text{fuel}_{2\phi}} N_{\text{pch}}$$

La ecuación (A.14) para calcular el perfil de velocidad en la zona de dos fases, para el caso de potencia dependiente del tiempo y del espacio queda

$$\frac{\partial u^+}{dz^+} = q'_{\text{fuel}}(z^+, t^+) N_{\text{sub}}$$

Integrando, tenemos

$$\begin{aligned} u_e^+ &= u_i^+ + N_{\text{sub}} \int_{\lambda}^1 q'_{\text{fuel}}(z^+, t^+) dz^+ \\ u_e^+ &= u_i^+ + N_{\text{sub}} \bar{q}'_{\text{fuel}_{2\phi}}(1 - \lambda^+) \end{aligned} \quad (7.13)$$

La ecuación diferencial que describe la evolución de la masa de refrigerante en el núcleo es

$$\frac{dm^+}{dt^+} = u_i^+ - \rho_e^+ u_e^+ \quad (7.14)$$

Riser

Al igual que en el caso del downcomer, las paredes del riser no son completamente adiabáticas y la pluma caliente pierde algo de energía hacia la zona más fría de los generadores de vapor. De todas maneras, para poder utilizar las ecuaciones desarrolladas en la sección 6.5, suponemos que el riser es totalmente adiabático. Es suficiente entonces una única variable de estado para caracterizar completamente su comportamiento, siendo la ecuación diferencial correspondiente

$$\frac{dm_R^+}{dt^+} = u_R^+ A_R^+ [\rho_e^+(t^+) - \rho_e^+(t^+ - \psi_R^+)] \quad (7.15)$$

con el tiempo ψ^+ tal que

$$L_R^+ = - \int_{t^+}^{t^+ - \psi_R^+} u_R^+(\tau) d\tau$$

Conservación de momento

Para completar la formulación matemática del circuito termohidráulico es necesario considerar la conservación de impulso y obtener la fuerza boyante neta. Si bien existen varias maneras de tratar este punto, una vez más para poder aplicar directamente las ecuaciones desarrollados en el capítulo 6, proponemos el siguiente razonamiento. Consideremos en forma aislada el subconjunto núcleo más riser. Podemos decir que este subconjunto es un boiling channel sujeto a una diferencia de presión externa dependiente del tiempo. Esta presión externa está dada por la combinación de la presión estática que ejerce la pierna fría del subconjunto generador de vapor más downcomer sobre el plenum inferior, y por los efectos dinámicos del caudal de circulación instantáneo. Si la presión en el domo es la presión de saturación p_{sat} (figura 7.3), la presión en un punto del plenum inferior donde el fluido esté casi en reposo es aproximadamente

$$p_{\text{stag}} = p_{\text{sat}} + \rho_f g(L_{SG} + L_D)$$

En un punto ubicado ligeramente por debajo de la entrada al núcleo, el fluido adquiere una velocidad u_P , por lo que la presión que experimenta el mismo en el plenum inmediatamente antes de entrar al núcleo es

$$p_P = p_{\text{sat}} + \rho_f g(L_{SG} + L_D) - \frac{1}{2} \rho_f u_P^2$$

Suponiendo que el área transversal que presenta el plenum a la salida es igual al área del riser, entonces

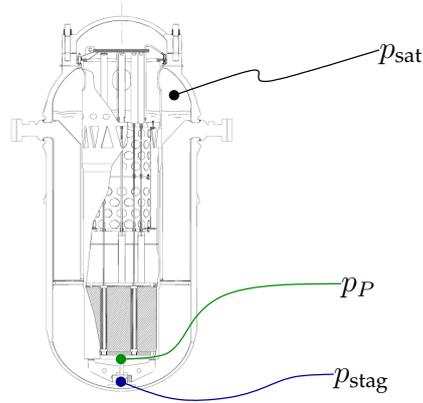


Figura 7.3: Cálculo de la presión externa que actúa sobre el subconjunto núcleo-riser

$$u_P = u_i \frac{A}{A_R}$$

y la diferencia de presión a la que está sujeta el subconjunto núcleo más riser es

$$\Delta p_{\text{ext}}(t) = \rho_f g (L_{SG} + L_D) - \frac{1}{2} \frac{A}{A_R} \rho_f u_i^2$$

que podemos escribir en forma adimensional dividiendo ambos miembros por $\rho_f u_{\text{ref}}^2$

$$\text{Eu} \Delta p_{CR}^+ = \frac{1}{\text{Fr}} (L_{SG}^+ + L_D^+) - \frac{1}{2} \frac{1}{A_R^+} u_i^{+2}$$

Recordando que en el estado estacionario $u_i^{+*} = N_{\text{sub}}/N_{\text{pch}}$ y que debe ser $\Delta p_{CR}^{+*} = 1$, entonces el número de Euler del problema es

$$\text{Eu} = \frac{1}{\text{Fr}} (L_{SG}^+ + L_D^+) - \frac{1}{2 A_R^+} \frac{N_{\text{sub}}^2}{N_{\text{pch}}^2}$$

y la modulación temporal de la diferencia de presión externa al conjunto core-
riser es

$$\Delta p_{CR}^+ = 1 + \frac{1}{\text{Eu}} \frac{1}{2 A_R^+} \left(\frac{N_{\text{sub}}^2}{N_{\text{pch}}^2} - u_i^{+2} \right)$$

De esta forma, incorporando las pérdidas de carga de la zona de los generadores de vapor y del downcomer —todas de simple fase— y los efectos

inerciales que supone acelerar la masa de líquido constantes m_{SG} y en m_D ¹

$$m_{SG}^+ = \frac{m_{SG}}{m^*} = \frac{\rho_f^* A_{SG} L_{SG}}{\rho_f^* A L} = A_{SG}^+ L_{SG}^+ \quad (7.16)$$

$$m_D^+ = \frac{m_D}{m^*} = \frac{\rho_f^* A_D L_D}{\rho_f^* A L} = A_D^+ L_D^+ \quad (7.17)$$

podemos utilizar la ecuación de momento derivada en la sección (6.5) utilizando la ecuación (7.13) para calcular la velocidad de salida. Obtenemos así una ecuación diferencial para el caudal de circulación debido a los efectos de las fuerzas boyantes a través de una expresión para la velocidad de entrada al núcleo

$$\begin{aligned} \frac{du_i^+}{dt^+} = & \frac{1}{m^+ + \frac{m_R^+}{A_R^+} + L_{SG}^+ + L_D^+} \left\{ \frac{N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} \left[\frac{dm^+}{dt^+} \tilde{N}_{\text{pch}} + (1 - m^+) \frac{d\tilde{N}_{\text{pch}}}{dt^+} \right] - \frac{dm^+}{dt^+} u_i^+ \right. \\ & + \frac{N_{\text{sub}} m_R^+}{A_R^+} \frac{d\lambda^+}{dt^+} - u_R^+ \frac{dm_R^+}{dt^+} + \frac{u_i^{+2}}{A_R^+} - u_R^{+2} \rho_{R_e}^+ A_R^+ - \Delta p_g^+ - \frac{1}{\text{Fr}} m_R^+ \\ & - \Delta p_f^+ - \Lambda_R u_R^{+2} m_R^+ - A_R^+ u_R^{+2} (k_{R_i} \rho_{R_i}^+ + k_{R_e} \rho_{R_e}^+) \\ & \left. - A_R^+ u_{SG}^{+2} (\Lambda_{SG} L_{SG}^+ + k_{SG}) - A_R^+ u_D^{+2} (\Lambda_D L_D^+ + k_D) + \text{Eu} \Delta p_{CR}^+ A_R^+ \right\} \end{aligned} \quad (7.18)$$

! Notar que esta ecuación no tiene en cuenta el cambio de densidad con la temperatura de la rama fría compuesta por el generador de vapor más el downcomer.

7.1.2. Combustible

Consideremos el combustible como una única barra unidimensional dividida en $N_{1\phi} + 1$ nodos coincidentes con la nodalización termohidráulica del núcleo. En esta barra, por un lado se está generando una potencia lineal $q'_{\text{fiss}}(z, t)$ proveniente de fisiones mientras que por otro el refrigerante está extrayendo calor a una tasa que es igual a (figura 7.4)

$$q'_{\text{fuel}} = h_{\text{fuel}} P_{\text{int}_{\text{fuel}}} (T_{\text{wall}} - T_{\text{cool}}) \quad (7.19)$$

¹La longitud que aparece en el cálculo del término de inercia debe ser la longitud que recorre el fluido en esta zona, que en el caso de generadores de vapor helicoidales no es igual a la longitud vertical. Despreciamos este efecto y utilizamos la longitud vertical L_{SG} .

Sin embargo, la temperatura representativa del combustible no es la temperatura en la pared de la vaina sino una temperatura promediada en la sección transversal de la pastilla pesada con la inercia térmica del dióxido de uranio (Zanocco, 2005)

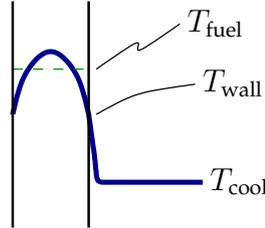


Figura 7.4: Distribución radial de temperatura en el combustible. Al escribir el flujo de calor en función de la temperatura media y no de la temperatura en la pared debemos utilizar un coeficiente de transferencia térmica equivalente que tenga en cuenta la resistencia por conductividad de la pastilla.

$$T_{\text{fuel}} = \frac{\int_0^R \rho(r)c_p(r) T(r) r dr}{\int_0^R \rho(r)c_p(r) r dr}$$

y es ésta la temperatura que representa la energía almacenada en el combustible, por lo que si el refrigerante que está en contacto con ella tiene una distribución de axial temperaturas $T_{\text{cool}}(z, t)$ (figura 7.5), en un diferencial de volumen la ecuación de energía —despreciando conductividad axial en el elemento combustible— es

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_{\text{fuel}}c_{\text{fuel}}A_{\text{fuel}}T_{\text{fuel}}] = q'_{\text{fiss}} - \tilde{h}_{\text{fuel}}P_{\text{fuel}_{\text{int}}}(T_{\text{fuel}} - T_{\text{cool}}) \quad (7.20)$$

donde el coeficiente de transferencia térmica por conducción \tilde{h}_{fuel} es un coeficiente equivalente que tiene en cuenta además la resistencia térmica por conductividad en la pastilla combustible y en el gap con la vaina, de forma tal de que el último término de la ecuación (7.20) sea igual al flujo de calor de la ecuación (7.19).

Nuevamente, suponemos un perfil lineal de temperaturas e integramos la ecuación (7.20) en el nodo n . Como la posición de los nodos depende del tiempo debemos utilizar la regla de Leibnitz (6.2)

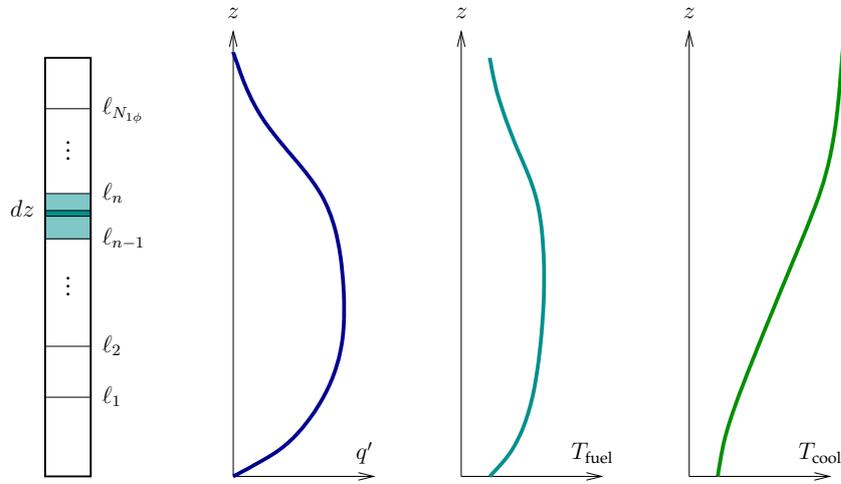


Figura 7.5: Conservación de energía en el elemento combustible

$$\begin{aligned}
 \rho c A \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (T_{\text{fuel}_{n-1}} + T_{\text{fuel}_n}) (\ell_n - \ell_{n-1}) \right] \\
 + \rho c A \left[-T_{\text{fuel}_n} \frac{d\ell_n}{dt} + T_{\text{fuel}_{n-1}} \frac{d\ell_{n-1}}{dt} \right] = (\ell_n - \ell_{n-1}) \left\{ \dot{q}'_{\text{fiss}_n} \right. \\
 \left. - \eta_{\text{fuel}_{1\phi}} P_{\text{fuel}_{\text{int}}} \left[\left(\frac{T_{\text{fuel}_{n-1}} + T_{\text{fuel}_n}}{2} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{T_{\text{cool}_{n-1}} + T_{\text{cool}_n}}{2} \right) \right] \right\} \quad (7.21)
 \end{aligned}$$

! Notar que el área que aparece en esta ecuación es el área transversal A_{fuel} total de todas las barras combustibles sumadas y no el área de caldeo, que es igual a $P_{\text{fuel}_{\text{int}}} L$.

Definimos ahora una temperatura adimensional

$$T^+ = \frac{T - T_{\text{cool}_i}^*}{T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i}^*}$$

siendo $T_{\text{cool}_i}^*$ la temperatura de entrada al núcleo de estado estacionario y T_{sat} la temperatura de saturación a la presión —constante— del domo. Dividendo ambos miembros de la ecuación (7.21) por $\rho c A u_{\text{ref}} (T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i}^*)$ obtenemos la versión adimensional de la ecuación de energía

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt^+} \left[\frac{1}{2} \left(T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ + T_{\text{fuel}_n}^+ \right) \left(\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+ \right) \right] \\
- T_{\text{fuel}_n}^+ \frac{d\ell_n^+}{dt^+} + T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+} = \left(\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+ \right) \left\{ \gamma_{\text{fuel}} \bar{q}_{\text{fiss}_n}^+ \right. \\
\left. - \aleph_{\text{fuel}} \frac{\text{Nu}_{1\phi}}{\text{Nu}_{1\phi}^*} \left[\frac{T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ + T_{\text{fuel}_n}^+}{2} \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{T_{\text{cool}_{n-1}}^+ + T_{\text{cool}_n}^+}{2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{7.22}$$

donde los parámetros adimensionales que caracterizan la transferencia térmica son

$$\begin{aligned}
\gamma_{\text{fuel}} &= \frac{1}{\rho_{\text{fuel}} c_{\text{fuel}} A_{\text{fuel}}} \frac{q^*}{u_{\text{ref}} (T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i}^*)} \\
\aleph_{\text{fuel}} &= \frac{1}{\rho_{\text{fuel}} c_{\text{fuel}} A_{\text{fuel}}} \frac{\tilde{h}_{\text{fuel}_{1\phi}} P_{\text{int}_{\text{fuel}}} L}{u_{\text{ref}}} \\
\text{Nu}_{1\phi} &= 0,0023 \text{Re}_D^{4/5} \text{Pr}^{0,4} \\
\text{Nu}_{1\phi}^* &= 0,0023 \text{Re}_D^*{}^{4/5} \text{Pr}^{0,4}
\end{aligned}$$

El producto $\tilde{h}PL$ entre el coeficiente de transferencia térmica por convección equivalente y el área de caldeo entre combustible puede ser calculado partir de las resistencias térmicas por conductividad en la pastilla, el gap pellet-cladding y de la correlación de Dittus-Boelter (7.2) (Zanocco, 2005), por lo que suponemos que $\tilde{h}PL$ es un dato conocido.

Las entalpías del refrigerante en los nodos están fijas o, a lo más, dependen de una forma conocida del tiempo. Teniendo en cuenta que las temperaturas adimensionales de estado estacionario a la entrada y a la salida del núcleo son cero y uno respectivamente, y suponiendo que el calor específico es constante en este intervalo de temperaturas, entonces

$$T_{\text{cool}_n}^+ = T_{\text{cool}_i}^+ + (1 - T_{\text{cool}_i}^+) \frac{n}{N_{1\phi}}$$

siendo $T_{\text{cool}_i}^+$ la temperatura adimensional del líquido saturado correspondiente la entalpía de entrada al núcleo h_i . A partir de la ecuación (7.22) podemos despejar la derivada de la temperatura del nodo n -ésimo.

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\text{fuel}_n}^+}{dt^+} = & \frac{-\frac{dT_{\text{fuel}_{n-1}}^+}{dt^+} \ell_n^+ - T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ \frac{d\ell_n^+}{dt^+} + \frac{dT_{\text{fuel}_{n-1}}^+}{dt^+} \ell_{n-1}^+ + T_{\text{fuel}_n}^+ \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+}}{\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+} + 2\gamma_{\text{fuel}} \bar{q}'_{\text{fiss}_n} \\ & - \aleph_{\text{fuel}} \frac{\text{Nu}_{1\phi}}{\text{Nu}_{1\phi}^*} \left[\left(T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ + T_{\text{fuel}_n}^+ \right) - 2T_{\text{cool}_i}^+ - (1 - T_{\text{cool}_i}^+) \frac{2n-1}{N_{1\phi}} \right] \end{aligned} \quad (7.23)$$

La potencia lineal media \bar{q}'_{fuel_n} transferida desde el combustible al refrigerante en cada uno de los nodos de la zona de una fase es

$$\bar{q}'_n = \tilde{h}_{\text{fuel}_{1\phi}} P_{\text{int}_{\text{fuel}}} \left[\left(\frac{T_{\text{fuel}_{n-1}} + T_{\text{fuel}_n}}{2} \right) - \left(\frac{T_{\text{cool}_{n-1}} + T_{\text{cool}_n}}{2} \right) \right]$$

que podemos poner en forma adimensional dividiendo por el valor de referencia q^*/L para obtener

$$\bar{q}'_{\text{fuel}_n} = \aleph_{\text{cool}} \frac{\text{Nu}_{1\phi}}{\text{Nu}_{1\phi}^*} \frac{1}{2} \left[\left(T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ + T_{\text{fuel}_n}^+ \right) - T_{\text{cool}_i}^+ - (1 - T_{\text{cool}_i}^+) \frac{2n-1}{2N_{1\phi}} \right]$$

donde el número adimensional de transferencia entre el combustible y el refrigerante es

$$\aleph_{\text{cool}} = \frac{\tilde{h}_{\text{fuel}_{1\phi}} P_{\text{int}_{\text{fuel}}} L (T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i}^*)}{q^*}$$

Análogamente, en el nodo de dos fases la potencia transferida es

$$\bar{q}'_{\text{fuel}_n} = \aleph_{\text{cool}} \frac{\text{Nu}_{2\phi}}{\text{Nu}_{1\phi}^*} \left[\frac{1}{2} \left(T_{\text{fuel}_{N_{1\phi}}}^+ + T_{\text{fuel}_{2\phi}}^+ \right) - 1 \right]$$

7.1.3. Neutrónica

Para completar el modelo resta definir la potencia lineal proveniente de los procesos de fisión $q_{\text{fiss}}^{+'}(z^+, t^+)$. En el espíritu del diseño con características de seguridad inherentemente seguras basadas en sistemas de control pasivos —y ciertamente en el de la simplificación— buscamos evaluar la respuesta intrínseca del reactor sin tener en cuenta la actuación de las barras de control, que suponemos se mantienen fijas en su posición nominal de trabajo.

Tomamos como dato conocido el perfil de potencia de estado estacionario $q^*(z)$ y suponemos que en todo momento la potencia térmica generada es proporcional al flujo neutrónico y que el perfil de potencia no modifica su forma sino que sólo aumenta o disminuye su amplitud en función de la población

neutrónica total n^+ . Esto es, escribimos la potencia lineal como el producto de dos funciones de variables separables

$$q'_{\text{fiss}}(z^+, t^+) = n^+(t^+) \cdot q'^*(z^+)$$

Como la integral de la potencia lineal de estado estacionario es igual a la unidad, entonces la población neutrónica adimensional n^+ es numéricamente igual a la potencia total adimensional instantánea. Las ecuaciones de cinética puntual adimensionales² a I grupos resultan

$$\frac{dn^+}{dt^+} = \frac{\rho_{\text{fiss}} - \beta}{\Lambda_{\text{fiss}}^+} n^+ + \sum_{j=1}^I \lambda_{\text{fiss}_j}^+ c_j^+ \quad (7.24)$$

$$\frac{dc_i^+}{dt^+} = \frac{\beta_i}{\Lambda_{\text{fiss}}^+} n^+ - \lambda_{\text{fiss}_i}^+ c_i^+ \quad (7.25)$$

donde

$$\Lambda_{\text{fiss}}^+ = \frac{\Lambda_{\text{fiss}}}{t_{\text{ref}}}$$

$$\lambda_{\text{fiss}_i}^+ = \lambda_{\text{fiss}_i} t_{\text{ref}}$$

El parámetro ρ_{fiss} es la reactividad introducida por los efectos de la realimentación interna que está determinada básicamente por las temperaturas del combustible y del refrigerante y por la fracción de vacío del refrigerante. Una forma de calcular la reactividad de acople es utilizando los coeficientes de realimentación definidos por la ecuación (5.13) y ampliamente discutidos en el capítulo 5, adimensionalizados convenientemente de forma tal de poder escribir

$$\rho_{\text{fiss}} = \int_0^1 \alpha_{T_{\text{fuel}}} (T_{\text{fuel}}^+ - T_{\text{fuel}}^{+\star}) dz^+ + \int_0^1 \alpha_{T_{\text{cool}}} (T_{\text{cool}}^+ - T_{\text{cool}}^{+\star}) dz^+ + \int_0^1 \alpha_{\rho_{\text{cool}}} (\rho_{\text{cool}}^+ - \rho_{\text{cool}}^{+\star}) dz^+$$

teniendo en cuenta que la integral de la longitud adimensional del núcleo es igual a la unidad.

²Un reactor nuclear es un sistema tan complejo que involucra muchas más variables y parámetros que la cantidad de símbolos disponibles en los alfabetos latinos y griegos (incluso hemos tenido que recurrir al hebreo en la ecuación 7.22). En aras de mantener la notación estándar es que abusamos de la utilización de subíndices en este capítulo.

! Notar que debido a que utilizamos el modelo homogéneo para describir el flujo de dos fases, es conveniente escribir la reactividad introducida por aparición de vapor en función del coeficiente de reactividad por densidad de refrigerante $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}$. En este modelo, resulta (abuso de notación)

$$\rho = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_f$$

por lo podemos escribir el coeficiente de vacío como

$$\alpha_v = \frac{\partial \rho_{\text{fiss}}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho_{\text{fiss}}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = \alpha_{\rho_{\text{cool}}} (\rho_g - \rho_f)$$

con lo que los coeficientes de realimentación por vacío y por densidad de refrigerante tienen signos opuestos. Un coeficiente de reactividad por fracción de vacío positivo corresponde a un coeficiente por densidad negativo, y viceversa.

Si suponemos que disponemos de coeficientes medios de reactividad, teniendo en cuenta que estamos suponiendo perfiles lineales de temperaturas en los nodos e identificando la integral de la densidad como la masa de refrigerante en el núcleo, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \rho_{\text{fiss}} = & \alpha_{T_{\text{fuel}}} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} \left(T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ + T_{\text{fuel}_n}^+ - T_{\text{fuel}_{n-1}}^{+\star} - T_{\text{fuel}_n}^{+\star} \right) \\ & + \alpha_{T_{\text{cool}}} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} \left(T_{\text{cool}_{n-1}}^+ + T_{\text{cool}_n}^+ - T_{\text{cool}_{n-1}}^{+\star} - T_{\text{cool}_n}^{+\star} \right) \\ & + \alpha_{\rho_{\text{cool}}} (m^+ - m^{+\star}) \end{aligned} \quad (7.26)$$

! Podríamos intentar acoplar el problema neutrónico al termohidráulico utilizando la fórmula de perturbaciones (5.14) que se basa en la dependencia de las secciones eficaces neutrónicas macroscópicas con los parámetros termohidráulicos. Pero dado que estamos interesados en estudiar la dependencia de la estabilidad de un reactor de este tipo con respecto a las variables de diseño, no es posible obtener secciones eficaces condensadas ya que éstas dependen justamente de estas mismas variables de diseño. Por otro lado, no estamos aplicando el modelo a un reactor en particular sino estudiando el diseño desde la etapa de ingeniería conceptual, mientras que el proceso de condensación de secciones eficaces es una tarea de ingeniería básica, que escapa al alcance de este trabajo.

Para finalizar el razonamiento, una vez calculada la población neutrónica a partir de las ecuaciones de cinética puntual teniendo en cuenta los efectos

de realimentación interna, calculamos la potencia lineal media generada por fisiones en el n -ésimo nodo como

$$\bar{q}_{\text{fiss}}^+ = \frac{n^+}{\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+} \int_{\ell_{n-1}^+}^{\ell_n^+} q_{\text{fiss}}^*(z^+) dt^+$$

con lo que completamos el desarrollo del modelo matemático.

7.2. Sistema dinámico

El modelo matemático propuesto para simular el comportamiento de un reactor integrado de convección natural consiste en un sistema dinámico de dimensión $2N_{1\phi} + N_{SG} + I + 5$, cuyo vector de estado³ es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \ell_1^+ \\ \vdots \\ \ell_{N_{1\phi}}^+ \\ m^+ \\ m_R^+ \\ h_{SG_1}^+ \\ \vdots \\ h_{SG_{N_{SG}}}^+ \\ h_P^+ \\ u_i^+ \\ n^+ \\ c_1^+ \\ \vdots \\ c_I^+ \\ T_{\text{fuel}_1}^+ \\ \vdots \\ T_{\text{fuel}_{N_{1\phi}}}^+ \end{bmatrix}$$

Por completitud, reproducimos aquí las ecuaciones diferenciales que conforman el sistema dinámico. En cada caso, explicitamos el número de cada ecuación para poder ubicar rápidamente su deducción y la forma de las variables intermedias asociadas.

³Para definir completamente el estado del sistema es necesario también tener en cuenta la historia de las variables ρ_e^+ , u_R^+ , u_D^+ y $h_{SG_e}^+$.

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_n^+}{dt^+} &= 2u_i^+ + 2N_{1\phi} (\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+) \frac{N_{\text{sub}} \bar{q}_n^+}{N_{\text{pch}} h_P^+} - \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+} \\ &\quad - (2N_{1\phi} - 2n + 1) (\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+) \frac{1}{h_P^+} \frac{dh_P^+}{dt^+} \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\frac{dm^+}{dt^+} = u_i^+ - \rho_e^+ u_e^+ \quad (7.14)$$

$$\frac{dm_R^+}{dt^+} = u_R^+ A_R^+ [\rho_e^+ - \rho_e^+(t^+ - \psi_R^+)] \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_{SG_n}^+}{dt^+} &= -2u_{SG}^+ \frac{N_{SG}}{L_{SG}} (h_{SG_n}^+ - h_{SG_{n-1}}^+) - \text{Nu}_{SG} \kappa_{SG} (h_{SG_n}^+ + h_{SG_{n-1}}^+) \\ &\quad + 2\text{Nu}_{SG} \kappa_{SG} h_2^+ - \frac{dh_{SG_{n-1}}^+}{dt^+} \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\frac{dh_P^+}{dt^+} = \frac{u_i^+}{V_P^+} (h_{e_D}^+ - h_P^+) \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_i^+}{dt^+} &= \frac{1}{m^+ + \frac{m_R^+}{A_R^+} + L_R^+ + L_D^+} \left\{ \frac{N_{\text{sub}}}{\tilde{N}_{\text{pch}}^2} \left[\frac{dm^+}{dt^+} \tilde{N}_{\text{pch}} + (1 - m^+) \frac{d\tilde{N}_{\text{pch}}}{dt^+} \right] \right. \\ &\quad - \frac{dm^+}{dt^+} u_i^+ + \frac{N_{\text{sub}} m_R^+}{A_R^+} \frac{d\lambda^+}{dt^+} - u_R^+ \frac{dm_R^+}{dt^+} + \frac{u_i^{+2}}{A_R^+} - u_R^{+2} \rho_{R_e}^+ A_R^+ - \Delta p_g^+ \\ &\quad - \frac{1}{\text{Fr}} m_R^+ - \Delta p_f^+ - \Lambda_R u_R^{+2} m_R^+ - A_R^+ u_R^{+2} (k_{R_i} \rho_{R_i}^+ + k_{R_e} \rho_{R_e}^+) \\ &\quad \left. - A_R^+ u_{SG}^{+2} (\Lambda_{SG} L_{SG}^+ + k_{SG}) - A_R^+ u_D^{+2} (\Lambda_D L_D^+ + k_D) + \text{Eu} \Delta p_{CR}^+ A_R^+ \right\} \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\frac{dn^+}{dt^+} = \frac{\rho_{\text{fiss}} - \beta}{\Lambda_{\text{fiss}}^+} n^+ + \sum_{j=1}^I \lambda_{\text{fiss}_j}^+ c_j^+ \quad (7.24)$$

$$\frac{dc_i^+}{dt^+} = \frac{\beta_i}{\Lambda_{\text{fiss}}^+} n^+ - \lambda_{\text{fiss}_j}^+ c_i^+ \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\text{fuel}_n}^+}{dt^+} &= \frac{-\frac{dT_{\text{fuel}_{n-1}}^+}{dt^+} \ell_n^+ - T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ \frac{d\ell_n^+}{dt^+} + \frac{dT_{\text{fuel}_{n-1}}^+}{dt^+} \ell_{n-1}^+ + T_{\text{fuel}_n}^+ \frac{d\ell_{n-1}^+}{dt^+}}{\ell_n^+ - \ell_{n-1}^+} \\ &\quad + 2\gamma_{\text{fuel}} \bar{q}_{\text{fiss}_n}^+ \\ &\quad - \aleph_{\text{fuel}} \frac{\text{Nu}_{1\phi}}{\text{Nu}_{1\phi}^*} \left[\left(T_{\text{fuel}_{n-1}}^+ + T_{\text{fuel}_n}^+ \right) - 2T_{\text{cool}_i}^+ - \left(1 - T_{\text{cool}_i}^+ \right) \frac{2n-1}{N_{1\phi}} \right] \end{aligned} \quad (7.23)$$

7.2.1. Estado estacionario

Para calcular cuál es el vector x^* que representa las condiciones estacionarias de trabajo debemos encontrar qué combinación de variables de estado hace que todas las derivadas temporales se anulen. Algunos valores de estado estacionario se desprenden de la definición de ciertos números adimensionales, mientras que otros deben ser encontrados anulando explícitamente todas las derivadas con respecto al tiempo.

La velocidad de estado estacionario, la entalpía a la entrada del núcleo y la población neutrónica están definidos por la formulación del problema que elegimos

$$\begin{aligned} u_i^{+*} &= \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \\ h_i^{+*} &= h_P^{+*} = -\frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \\ n^{+*} &= 1 \end{aligned}$$

Las velocidades en las zonas de una fase del circuito resultan

$$\begin{aligned} u_{SG}^{+*} &= \frac{1}{A_{SG}^+} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \\ u_D^{+*} &= \frac{1}{A_D^+} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \end{aligned}$$

Fijadas u_{SG}^{+*} y h_P^{+*} , entonces hay un sólo valor del parámetro κ_{SG} que hace que la entalpía en el último nodo del generador de vapor sea igual a la entalpía del plenum. Como suponemos que los generadores de vapor están diseñados para que en el estado estacionario extraigan exactamente la potencia térmica total q^* generada, entonces calculamos κ_{SG} a partir de la condición

$$h_{SG_{NSG}}^{+*} = -\frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \quad (7.27)$$

Anulando las derivadas de las entalpías en los nodos del generador de vapor, obtenemos

$$h_{SG_n}^{+*} = \frac{2u_{SG}^{+*} \frac{N_{SG}}{L_{SG}^+} h_{SG_{n-1}}^{+*} + 2\text{Nu}_{SG} \kappa_{SG} h_2^+ - \text{Nu}_{SG} \kappa_{SG} h_{SG_{n-1}}^{+*}}{2u_{SG}^{+*} \frac{N_{SG}}{L_{SG}^+} + \text{Nu}_{SG} \kappa_{SG}} \quad (7.28)$$

lo que, junto con la ecuación (7.27) y el hecho de que $h_{SG_0}^+ = 0$, nos provee de $N_{SG} + 1$ ecuaciones con las que podemos calcular iterativamente el valor de κ_{SG} de diseño. Una vez obtenido este parámetro, fijamos las entalpías de todos los nodos del generador de vapor con las ecuaciones (7.28).

Por otro lado, como ya mencionamos, en el estado estacionario la potencia lineal generada por fisión debe ser igual a la transferida desde el combustible al refrigerante por convección. En particular, tienen que ser iguales las potencias medias en cada nodo

$$\bar{q}_{\text{fiss}_n}^{+\star} = \bar{q}_{\text{fuel}_n}^{+\star} = \frac{1}{\ell_n^{+\star} - \ell_{n-1}^{+\star}} \int_{\ell_{n-1}^{+\star}}^{\ell_n^{+\star}} q'^{+\star}(z^+) dz^+$$

pero como $\ell_n^{+\star}$ también depende de la potencia lineal media en el nodo

$$\ell_n^{+\star} = \ell_{n-1}^{+\star} + \frac{1}{\bar{q}_{\text{fiss}_n}^{+\star}} \frac{1}{N_{1\phi}} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}}$$

entonces para la posición de los nodos en el estado estacionario deben ser tales que se cumpla la relación implícita

$$\ell_n^{+\star} = \ell_{n-1}^{+\star} + \frac{1}{N_{1\phi}} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \frac{1}{\frac{1}{\ell_n^{+\star} - \ell_{n-1}^{+\star}} \int_{\ell_{n-1}^{+\star}}^{\ell_n^{+\star}} q'^{+\star}(z^+) dz^+} \quad (7.29)$$

Tomando la frontera de ebullición como la posición del nodo $N_{1\phi}$ donde la entalpía se hace cero

$$\lambda^{+\star} = \ell_{N_{1\phi}}^{+\star}$$

el flujo de calor medio en la zona de estado estacionario es

$$\bar{q}_{\text{fiss}_{2\phi}}^{+\star} = \frac{1}{1 - \lambda^{+\star}} \int_{\lambda^{+\star}}^1 q'^{+\star}(z^+) dz^+$$

y la masa de refrigerante en el núcleo resulta

$$m^{+\star} = \lambda^{+\star} + \frac{\ln \left(1 + \bar{q}_{\text{fiss}_{2\phi}}^{+\star} N_{\text{pch}} (1 - \lambda^{+\star}) \right)}{\bar{q}_{\text{fiss}_{2\phi}}^{+\star} N_{\text{pch}}}$$

La velocidad a la salida del núcleo queda

$$u_e^{+\star} = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} + \bar{q}_{\text{fiss}_{2\phi}}^{+\star} N_{\text{sub}} (1 - \lambda^{+\star})$$

y la velocidad en toda la longitud del riser es

$$u_R^{+*} = \frac{1}{A_R^+} u_e^{+*}$$

La distribución de temperaturas en el combustible debe ser tal que el flujo de calor medio en cada nodo sea igual a la potencia de fisión estacionaria $\bar{q}_{\text{fiss}_n}^{+*}$. Esto se da sólo si

$$T_{\text{fuel}_n}^{+*} = \frac{2\gamma_{\text{fuel}} \bar{q}_{\text{fiss}_n}^{+*}}{N_{\text{fuel}}} + \frac{2n-1}{N_{1\phi}} T_{\text{fuel}_{n-1}}^{+*}$$

Finalmente, la concentración de precursores correspondientes a la población neutrónica de estado estacionario unidad es

$$c_i^{+*} = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i}$$

7.2.2. Implementación

El modelo matemático implica un acoplamiento entre el problema puramente neutrónico y las condiciones termohidráulicas a través del cálculo de la reactividad introducida por los efectos internos de realimentación, sea a través de coeficientes de reactividad o mediante la fórmula de perturbaciones (5.14). Para mejor ilustrar la forma propuesta de resolver este acople, en la figura 7.6 mostramos un diagrama de flujo de una posible implementación del modelo desarrollado.

A partir de los valores de diseño que caracterizan el reactor tales como potencia térmica total, dimensiones geométricas y presión de operación calculamos los parámetros adimensionales correspondientes (número de cambio de fase, de subenfriamiento, números de Nusselt, entalpía del secundario, etc). Luego calculamos el vector de estado estacionario x^* y perturbamos una o más componentes —por ejemplo la entalpía de salida del generador de vapor o la velocidad de entrada al núcleo— para simular un pequeño transitorio cercano a las condiciones de operación.

En cada paso de integración del sistema dinámico, primero calculamos la potencia neutrónica media en cada uno de los nodos móviles y utilizamos esa información para encontrar la distribución de temperatura en los combustibles. A partir de ésta calculamos los flujos de calor desde el combustible hacia el refrigerante, que sirven para calcular las condiciones instantáneas del circuito termohidráulico. Finalmente, partiendo de las temperaturas del combustible y del refrigerante, y del perfil de densidades del refrigerante estimamos la reactividad introducida, con lo que estamos en condiciones de pasar al siguiente paso de tiempo.

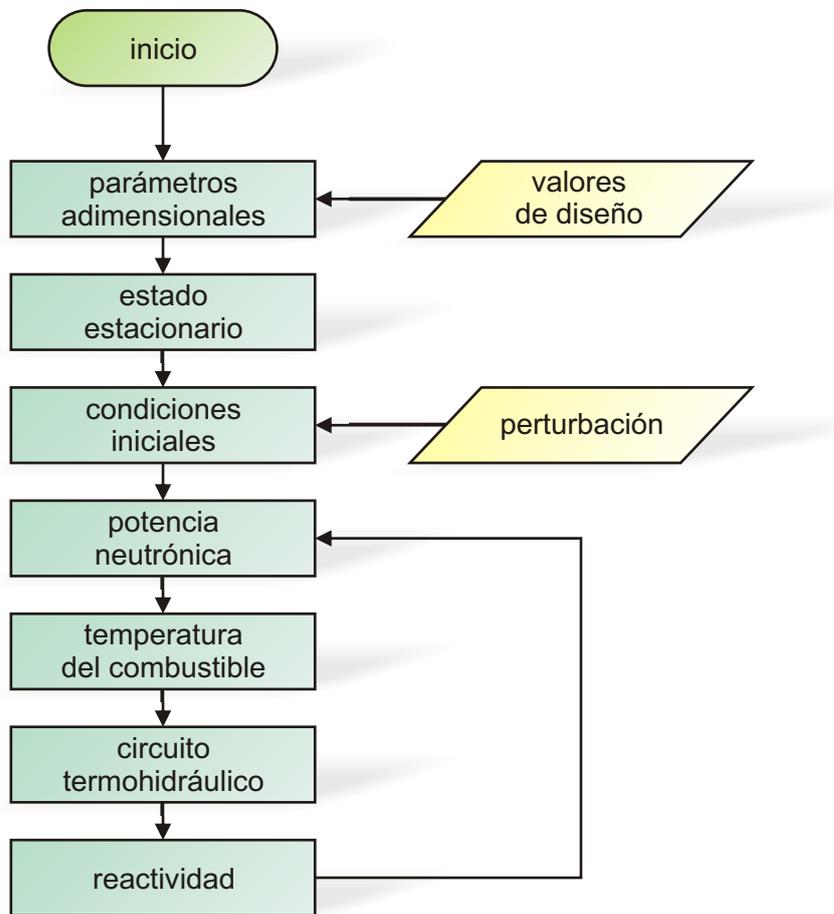


Figura 7.6: Posible implementación del acople termohidráulico-neutrónico propuesto

7.3. Limitaciones del modelo

En la búsqueda de obtener una descripción matemática lo suficientemente sencilla como para obtener un sistema dinámico manejable hemos realizado una serie de suposiciones y aproximaciones que reducen significativamente la complejidad del modelo. Durante la interpretación de los resultados obtenidos con el modelo desarrollado debemos tener presentes sus limitaciones y aproximaciones. A continuación identificamos y la razonabilidad y consecuencias de cada una de ellas.

Ecuaciones unidimensionales Esto implica necesariamente que no podemos tener en cuenta —al menos directamente— las influencias que la distribución radial de cualquier variable tenga sobre circuito termofluidodiná-

mico. En particular, existen efectos de flujos cruzados que provocan una mezcla que cambian las condiciones termohidráulicas. De la misma manera, la distribución radial del flujo neutrónico tiene consecuencias que no podemos observar con este modelo. Por otro lado, la división en nodos —fijos en el generador de vapor y móviles en el núcleo— hace que las frecuencias características del sistema dependan fuertemente de la cantidad de nodos utilizadas, por lo que no es de esperar que el resultado de una simulación prediga correctamente la evolución temporal de un reactor real. De todas maneras, intentar una descripción más detallada que un modelo unidimensional escaparía largamente cualquier clase de tesis de posgrado.

Modelo homogéneo El hecho de utilizar el modelo homogéneo para la descripción del flujo de dos fases resulta en una sobreestimación de la fracción de vacío, que a su vez implica una fuerza boyante mayor que la real. Además como el riser presenta un área transversal bastante mayor que el núcleo, las velocidades son relativamente bajas y el modelo homogéneo pierde validez. Como trabajo futuro, proponemos comparar los resultados obtenidos con modelos de flujo de dos fases tipo drift-flux o de dos fluidos y eventualmente reescribir el sistema dinámico para tener en cuenta slip entre fases.

Presión constante La autopresurización es una característica propia de este tipo de reactores que no hemos tenido en cuenta para poder utilizar propiedades constantes del fluido. Evitamos así describir la dinámica de evaporación y condensación en el domo e igualamos la entalpía adimensional del líquido en el domo constantemente a cero. Esto no tiene una base física, pero dado que la autopresurización tiende a estabilizar perturbaciones ya que un aumento en la potencia aumenta la presión lo que colapsa burbujas y tiende a disminuir la potencia, estamos simulando un caso más inestable que el real. Podemos pensar que el modelo forma parte de la envuelta conservativa de estados físicos no necesariamente reales de la base de diseño. Por otro lado, en el domo condensamos *automáticamente* la cantidad correcta de vapor de forma tal de que la masa de líquido saturado que ingresa al generador de vapor es igual a la masa de fluido que sale de la chimenea, efecto que simplifica el hecho de que la tasa de condensación tiene una dinámica adicional y acoplada al resto de las estructuras.

Cinética puntual Debido a que el núcleo es compacto es posible utilizar las ecuaciones de cinética puntual para describir la población neutrónica sin cometer mayores errores. Pero como existe un cambio de fase y aparece vacío en la parte superior del núcleo justamente en una zona de flujo distorsionado por las barras de control, no parece muy razonable mantener

la forma del perfil de potencia de estado estacionario durante transitorios con cambio de potencia total. Sin embargo, tanto el perfil de estado estacionario como la influencia del vacío y la posición de las barras depende fuertemente del momento del ciclo de vida de combustible en el que esté trabajando el reactor y evaluar correctamente estos transitorios neutrónicos está fuera del alcance de este trabajo.

Riser y downcomer adiabáticos Por el riser circula fluido a la temperatura de saturación mientras que en los generadores de vapor el líquido está más frío, por lo que podemos pensar que el refrigerante se enfría al subir. Sin embargo es posible aislar térmicamente y encamisar los tubos de los generadores de vapor para reducir esta pérdida de forma tal de que la aproximación adiabática resulte razonable. Sin embargo, en el riser existen otros efectos que el modelo no tiene en cuenta y que pueden llegar a ser importantes. Por un lado, hay deslizamiento entre las dos fases mientras que por otro se establecen flujos cruzados que tienden a mezclar el flujo. Más aún, debido a que disminuye la de presión hidrostática con la altura puede haber flashing del líquido que cambie la fracción de vacío y consecuentemente la fuerza boyante neta.

Líquido incompresible La fuerza boyante es una combinación del cambio de densidad del líquido con la aparición de vapor en la pierna caliente. Con el objetivo de simplificar la adimensionalización hemos supuesto que las propiedades del líquido en todo el circuito son iguales a las propiedades de saturación. En particular, la densidad cambia un 5 % entre 320 y 280 grados centígrados, por lo que tanto la suposición de propiedades constantes como la aproximación de Boussinesq pueden ser discutidas. De todas maneras, tanto el orden de magnitud como la variación de la fuerza boyante neta debería ser razonable dentro del resto de las aproximaciones del modelo.

Temperatura de secundario constante Para prestar atención a lo que sucede sólo en el lado primario de los generadores de vapor hemos supuesto que el lado secundario se mantiene una temperatura uniforme y constante, cosa que no es cierta ya que justamente un generador de vapor debería proveer vapor sobrecalentado en su circuito secundario. Pero dado que la dinámica de la dinámica de la entalpía en la zona del generador de vapor del circuito primario es de segundo orden con respecto a lo que sucede en el núcleo, esta aproximación es razonable en este tipo de reactores.

7.4. Caso particular

Para ilustrar la aplicación del modelo para obtener la evolución temporal de un reactor integrado luego de una perturbación en las condiciones de operación, definimos ciertos valores nominales de diseño y calculamos los parámetros adimensionales que resultan. En la tabla 7.1 listamos los objetivos de diseño y en la tabla 7.2 la geometría y parámetros termofluidodinámicos propuestos.

Al fijar la geometría, el fluido, la presión de trabajo, la potencia térmica y el caudal de estado estacionario quedan determinados los valores de referencia

$$t_{\text{ref}} = \frac{\rho_f^* AL}{q^*} \frac{h_f^*}{h_i^*} = 1,7 \text{ s}$$

$$u_{\text{ref}} = \frac{L}{t_{\text{ref}}} = 0,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$h_{\text{ref}} = \frac{q^*}{\dot{m}^*} = 244 \text{ kJ} \cdot (\text{kg K})^{-1}$$

y los números adimensionales

$$N_{\text{pch}} = \frac{q^*}{\dot{m}^*} \frac{v_{fg}^*}{h_{fg}^* v_{fg}^*} = 1,662$$

$$N_{\text{sub}} = \frac{h_f^* - h_i^*}{h_{fg}^*} \frac{v_{fg}^*}{v_f^*} = 1,587$$

$$b = \frac{\beta^* h_{fg}^* v_{fg}^*}{c_{pf}^* v_f^*} = 0,09$$

$$\text{Fr} = \frac{u_{\text{ref}}^2}{gL} = 0,05$$

$$\text{Eu} = \frac{1}{\text{Fr} (L_{SG}^+ + L_D^+)} - \frac{1}{2} \left(\frac{N_{\text{pch}}}{N_{\text{sub}}} \right)^2 = 86$$

$$\text{Re}^* = \frac{D u_0}{\nu_f^*} = 87600$$

$$\text{Nu}_{1\phi}^* = 0,0023 \text{Re}^{*4/5} \text{Pr}^{0,4} = 21$$

$$\text{Nu}_{2\phi}^* = \text{Nu}_{1\phi}^* = 21$$

$$\text{Re}_{SG}^* = \frac{D_{SG} u_0}{\nu_f^* A_{SG}^+} = 270000$$

$$\text{Nu}_{SG}^* = 0,0023 \text{Re}_{SG}^{*4/5} \text{Pr}^{0,3} = 50$$

	Refrigerante	H ₂ O
p	Presión absoluta de trabajo	12,25 MPa
q^*	Potencia térmica total	100 MW
\dot{m}^*	Caudal de refrigeración	410 kg · s ⁻¹
$T_{cool_i}^*$	Temperatura de entrada al núcleo	286 °C
$T_{cool_e}^*$	Temperatura de salida del núcleo	saturación
T_2^*	Temperatura del circuito secundario	200 °C

Tabla 7.1: Potencia, presión y temperaturas de diseño

Núcleo		
L	Longitud	1,4 m
A	Área transversal de pasaje	0,8 m ²
D	Diámetro hidráulico	0,013 m
f	Factor de fricción distribuido	0,025
k_i	Factor de pérdidas concentradas a la entrada	36*
k_e	Factor de pérdidas concentradas a la salida	1
Riser		
L_R	Longitud	4,6 m
A_R	Área transversal de pasaje	2 m ²
D_R	Diámetro hidráulico	1,5 m
f_R	Factor de fricción distribuido	0,04
k_{i_R}	Factor de pérdidas concentradas a la entrada	1
k_{e_R}	Factor de pérdidas concentradas a la salida	1
Generador de vapor		
L_{SG}	Longitud	4 m
A_{SG}	Área transversal de pasaje	2 m ²
D_{SG}	Diámetro hidráulico	0,2 m
f_{SG}	Factor de fricción distribuido	0,03
k_{SG}	Factor de pérdidas concentradas	10
Downcomer		
L_D	Longitud	2 m
A_D	Área transversal de pasaje	4 m ²
D_D	Diámetro hidráulico	0,5 m
f_D	Factor de fricción distribuido	0,02
k_D	Factor de pérdidas concentradas	5
V_P	Volumen del plenum	2,5 m ³

Tabla 7.2: Parámetros geométricos y termofluidodinámicos. El factor k_i se calcula *ad hoc* para lograr el caudal de circulación de diseño.

Por otro lado, la pérdida de carga total del circuito termohidráulico debe ser tal que sea igual a la fuerza boyante neta —que resulta ser una combinación de los efectos del cambio de densidad del líquido en el núcleo y la menor densidad del flujo de dos fases en el riser— cuando la velocidad a la entrada del núcleo sea igual a u_0 , que está fijada por el caudal másico \dot{m}^* . Es por eso que al menos uno de los coeficientes de pérdidas debe ser elegido *ad hoc* para lograr que el estado estacionario sea el de diseño.

En este sentido, conociendo el resultado de que las pérdidas de carga en la zona de dos fases contribuye con efectos desestabilizantes (figuras 6.8), la estrategia a seguir es minimizar las pérdidas de dos fases y agregar obstrucciones en zonas de simple fase hasta obtener el caudal buscado. El lugar más indicado para agregar pérdida de carga a propósito es la zona de la entrada al núcleo, ya que además de ser uno de los puntos más fríos de todo el circuito fluidodinámico, resulta útil distribuir radialmente el flujo en los subcanales de forma tal de que en la periferia haya menos caudal que en el centro de forma tal de lograr un calentamiento axial lo más uniforme posible. Es por eso que fijamos todos los coeficientes de pérdida de carga excepto k_i , que calculamos anulando la ecuación de momento (7.18) en el estado estacionario.

A partir de los factores de fricción distribuida de cada una de las secciones —que suponemos independientes del número de Reynolds y estimamos a partir del diagrama de Moody— los números adimensionales de fricción que resultan son

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{fL}{D} = 2,7 \\ \Lambda_R &= \frac{f_R L}{D_R} = 0,04 \\ \Lambda_{SG} &= \frac{f_{SG} L}{D_{SG}} = 0,2 \\ \Lambda_D &= \frac{f_D L}{D_D} = 0,06\end{aligned}$$

Por otro lado, con las propiedades del combustible de la tabla 7.3, los parámetros adimensionales que caracterizan su dinámica son

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{fuel}} &= \frac{1}{\rho_{\text{fuel}} c_{\text{fuel}} A_{\text{fuel}}} \frac{q^*}{u_{\text{ref}} (T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i}^*)} = 0,76 \\ \aleph_{\text{fuel}} &= \frac{1}{\rho_{\text{fuel}} c_{\text{fuel}} A_{\text{fuel}}} \frac{\tilde{h}_{\text{fuel}_{1\phi}} P_{\text{int}_{\text{fuel}}} L}{u_{\text{ref}}} = 0,15 \\ \aleph_{\text{cool}} &= \frac{\tilde{h}_{\text{fuel}_{1\phi}} P_{\text{int}_{\text{fuel}}} L (T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i}^*)}{q^*} = 0,20\end{aligned}$$

ρ_{fuel}	Densidad	$10800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
c_{fuel}	Capacidad calorífica	$305 \text{ J} \cdot (\text{kg K})^{-1}$
A_{fuel}	Área transversal de los todos los EECC	$1,2 \text{ m}^2$
$\tilde{h}_{\text{fuel}1\phi} P_{\text{int}_{\text{fuel}}} L$	Parámetro de convección equivalente	$0,486 \text{ MW}$

Tabla 7.3: Parámetros del combustible

Neutrones retardados		
Grupo	β_i	$\lambda_i [\text{s}^{-1}]$
1	$2,47 \cdot 10^{-4}$	0,0127
2	$1,38 \cdot 10^{-3}$	0,0317
3	$1,22 \cdot 10^{-3}$	0,115
4	$2,65 \cdot 10^{-3}$	0,311
5	$8,32 \cdot 10^{-4}$	1,400
6	$1,69 \cdot 10^{-4}$	3,870

β	Fracción de neutrones retardados	$650 \cdot 10^{-5}$
Λ	Vida media de neutrones prompt	$8,8 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

Tabla 7.4: Parámetros cinéticos

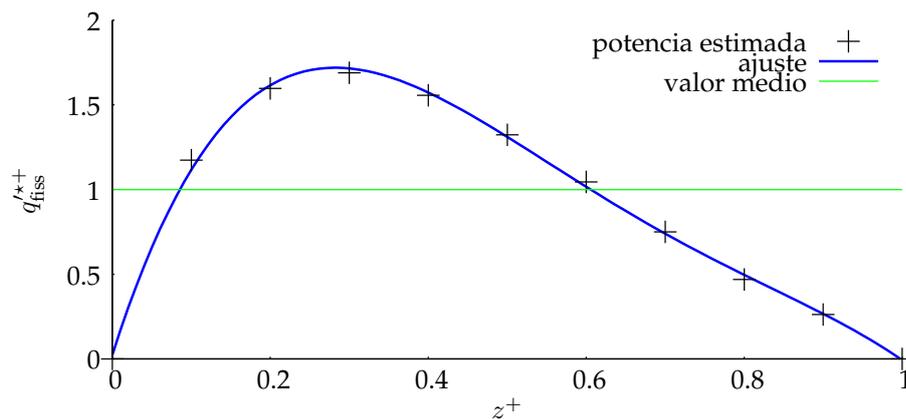


Figura 7.7: Perfil de potencia lineal de estado estacionario. A partir de potencias estimadas en posiciones discretas ajustamos un polinomio de cuarto grado para obtener una función continua.

Adimensionalizando los parámetros cinéticos de la tabla 7.4 obtenemos

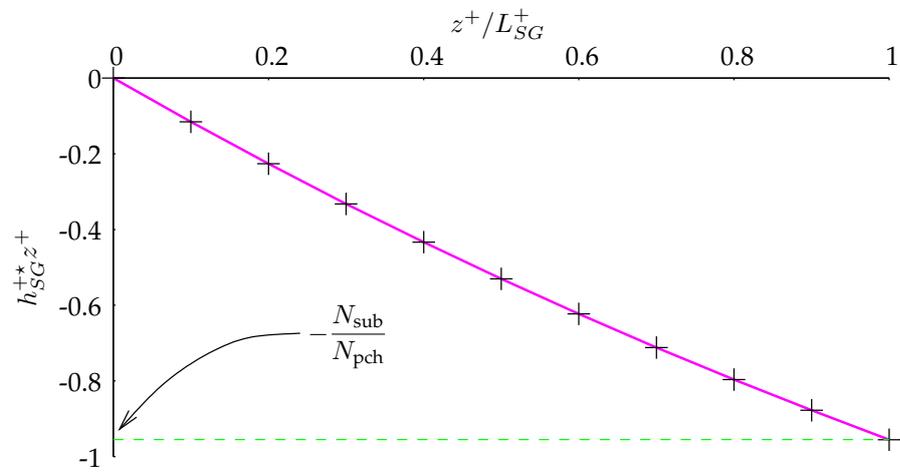
$$\begin{aligned}\Lambda^+ &= \frac{\Lambda}{t_{\text{ref}}} = 5 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_1^+ &= \lambda_1 t_{\text{ref}} = 0,021 \\ \lambda_2^+ &= \lambda_2 t_{\text{ref}} = 0,054 \\ \lambda_3^+ &= \lambda_3 t_{\text{ref}} = 0,195 \\ \lambda_4^+ &= \lambda_4 t_{\text{ref}} = 0,528 \\ \lambda_5^+ &= \lambda_5 t_{\text{ref}} = 2,377 \\ \lambda_6^+ &= \lambda_6 t_{\text{ref}} = 6,573\end{aligned}$$

A partir cálculos neutrónicos para este tipo de reactores es posible obtener un perfil de potencia en nodos equiespaciados en la longitud axial. Como el modelo que desarrollamos trabaja con nodos móviles, necesitamos un perfil continuo de potencia para calcular las potencias lineales medias en cada nodo con la ecuación (7.9). En la figura 7.7 mostramos un ajuste con un polinomio de cuarto orden de forma tal de que su integral en el intervalo $[0, 1]$ sea igual a la unidad.

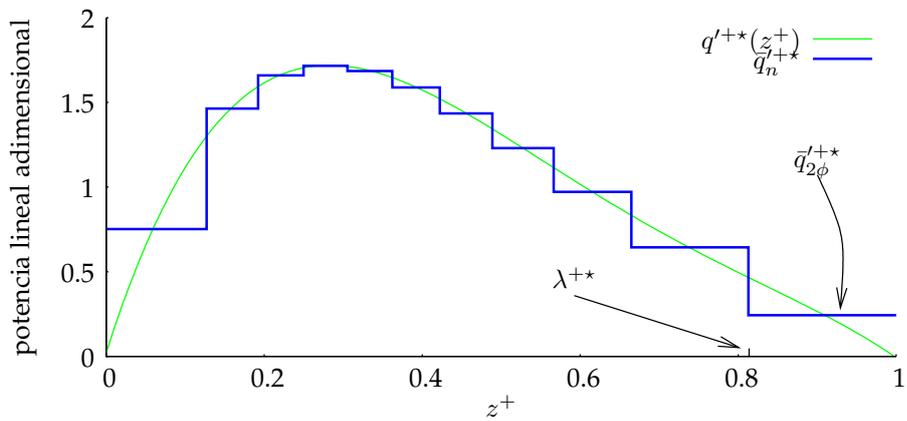
7.4.1. Estado estacionario

Comenzando el recorrido del circuito termohidráulico por el generador de vapor, obtenemos el perfil de entalpías que mostramos en la figura 7.8a partiendo de condiciones de saturación a la entrada y llegando a la entalpía de entrada al núcleo de estado estacionario $-N_{\text{sub}}/N_{\text{pch}}$, para 10 nodos. En la figura 7.8b mostramos la posición ℓ_n^+ de los nodos móviles en el núcleo y las potencias medias \bar{q}_n^{+*} en cada nodo que resultan de tomar la potencia lineal ajustada de la figura 7.7 para $N_{1\phi} = 10$. La posición del último nodo constituye la frontera de ebullición λ^{+*} que, debido a la distribución no homogénea de potencia, no es igual al cociente entre el número de subenfriamiento y el número de cambio de fase sino que sale como resultado de resolver las sucesivas ecuaciones implícitas 7.29.

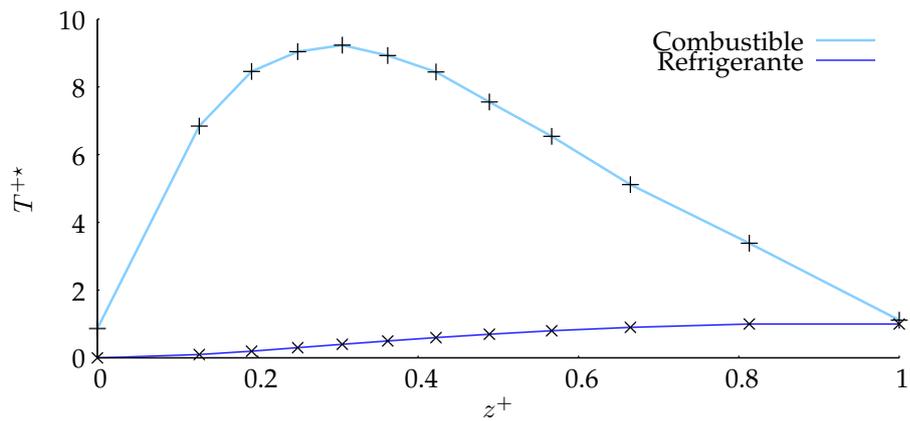
De la misma manera, en la figura 7.8c mostramos las distribuciones de temperaturas en el combustible y en refrigerante. Las últimas están fijas a partir de la definición de entalpías fijas en los puntos ℓ_n^+ , mientras que las primeras son tales que la potencia transferida desde el combustible al refrigerante debida al salto térmico sea igual a la potencia lineal media en cada nodo generada por fisión.



(a) Perfil de entalpías en el generador de vapor



(b) Posición y potencias lineales medias de los nodos del núcleo



(c) Perfil de temperaturas en el combustible y en refrigerante

Figura 7.8: Condiciones de estado estacionario

7.4.2. Transitorios

Mostramos a continuación la evolución temporal de algunas variables representativas del estado del reactor luego de una perturbación instantánea en alguna de las componentes de x a $t^+ = 0$ para diferentes condiciones de acople neutrónico. La perturbación que postulamos es modificar la entalpía adimensional del plenum y hacerla igual a un 90 % del valor estacionario $-N_{\text{sub}}/N_{\text{pch}}$, que es equivalente a simular —en forma ficticia— que el refrigerante entra al núcleo cuatro grados centígrados más caliente de lo que debería por diseño.

Para diez nodos en la zona de una fase del núcleo y otro diez nodos en el generador de vapor resulta que el vector de estado x tiene 41 componentes. Hemos elegido mostrar sólo la entalpía en el plenum —ya que es la variable perturbada—, la población neutrónica, la frontera de ebullición, la velocidad a la entrada del núcleo y la temperatura del combustible en el nodo 4 que, según la figura 7.8c, es la máxima.

Comenzamos analizando los resultados correspondientes al caso sin acople neutrónico con potencia constante. Luego introducimos un acople mediante coeficientes de realimentación, haciendo que el coeficiente de reactividad por fracción de vacío sea primero negativo y luego ligeramente positivo. Finalmente, aplicamos el método de acople utilizando la fórmula de perturbaciones a partir de la variación de las secciones eficaces en función de los parámetros termohidráulicos.

Sin acople neutrónico

Sin tener en cuenta los efectos de realimentación neutrónica, la evolución temporal del reactor para la perturbación postulada es la mostrada en la figura 7.9. Al ser éste el caso base con el cual comparar los resultados con acople neutrónico, las divisiones de los ejes de las ordenadas de todas las figuras son las mismas para variables correspondientes de forma tal de diferenciar la magnitud de las variaciones en cada caso.

Si bien la frecuencia característica depende de la nodalización elegida, la perturbación genera una oscilación que en las condiciones de trabajo del reactor, es amortiguada por el sistema. Las condiciones de estado estacionario son alcanzadas nuevamente aproximadamente en $t^+ = 100$.

Coefficiente de vacío negativo

Suponemos ahora que el reactor tiene dos coeficientes de realimentación significativos, uno debido a la temperatura del combustible y otro debido a la fracción de vacío —o equivalentemente a la densidad, recordando que tienen signos opuestos— del refrigerante. Postulando que los coeficientes son

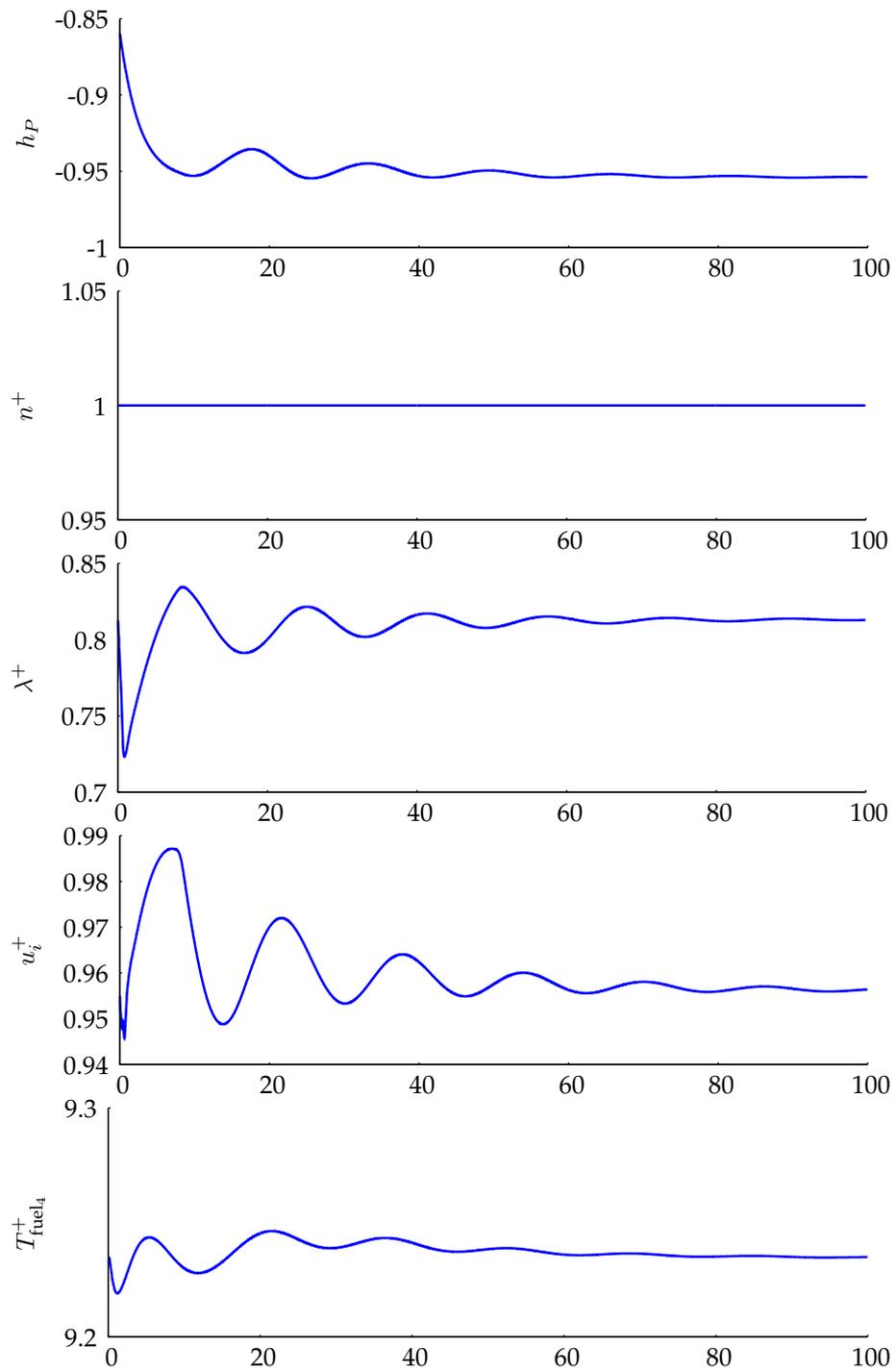


Figura 7.9: Transitorio resultante debido a una modificación del 10% en la entalpía del plenum sin realimentación neutrónica.

$$\begin{aligned}\alpha_{T_{\text{cool}}} &= 0 \\ \alpha_{T_{\text{fuel}}} &= -2,35 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \\ \alpha_v &= -1,15 \cdot 10^{-3} \%^{-1}\end{aligned}$$

en forma adimensional resultan

$$\begin{aligned}\alpha_{T_{\text{fuel}}}^+ &= \alpha_{T_{\text{fuel}}} \rho_f^* = -9,5 \cdot 10^{-4} \\ \alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+ &= \alpha_{\rho_{\text{cool}}} (T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i}^*) = 1,3 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

y dan lugar a la figura 7.10.

El ingreso de agua caliente al núcleo hace que la frontera de ebullición disminuya aumentando la fracción de vacío que tiende a disminuir la potencia. La perturbación es entonces rápidamente amortiguada y el reactor vuelve a las condiciones de estado estacionario prácticamente sin realizar oscilaciones.

Coefficiente de vacío positivo

Estudiemos ahora el comportamiento del reactor suponiendo que el coeficiente de vacío (densidad por refrigerante) es ligeramente positivo (negativo), manteniendo el coeficiente de reactividad por temperatura del combustible negativo e igual al caso anterior

$$\begin{aligned}\alpha_{T_{\text{cool}}} &= 0 \\ \alpha_{T_{\text{fuel}}} &= -2,35 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \\ \alpha_v &= +4,35 \cdot 10^{-4} \%^{-1}\end{aligned}$$

En forma adimensional

$$\begin{aligned}\alpha_{T_{\text{fuel}}}^+ &= \alpha_{T_{\text{fuel}}} \rho_f^* = -9,5 \cdot 10^{-4} \\ \alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+ &= \alpha_{\rho_{\text{cool}}} (T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i}^*) = -4,9 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

El resultado para la misma perturbación inicial es el mostrado en la figura 7.11. La potencia aumenta debido a la aparición de burbujas, pero luego

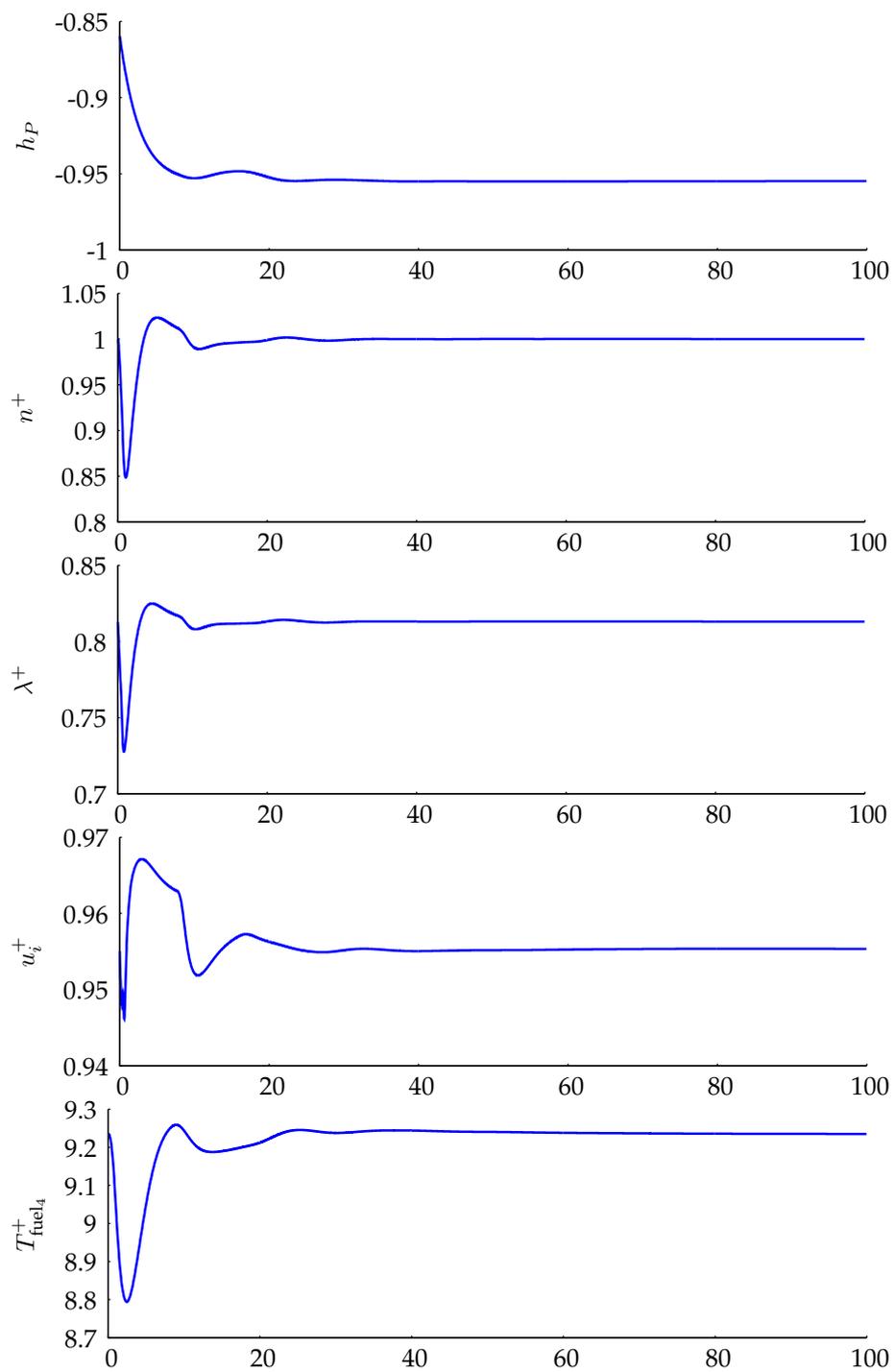


Figura 7.10: Transitorio resultante debido a una modificación del 10% en la entalpía del plenum con coeficientes de realimentación $\alpha_{T_{fuel}}^+ = -9,5 \cdot 10^{-4}$ y $\alpha_{\rho_{cool}}^+ = 1,3 \cdot 10^{-1}$.

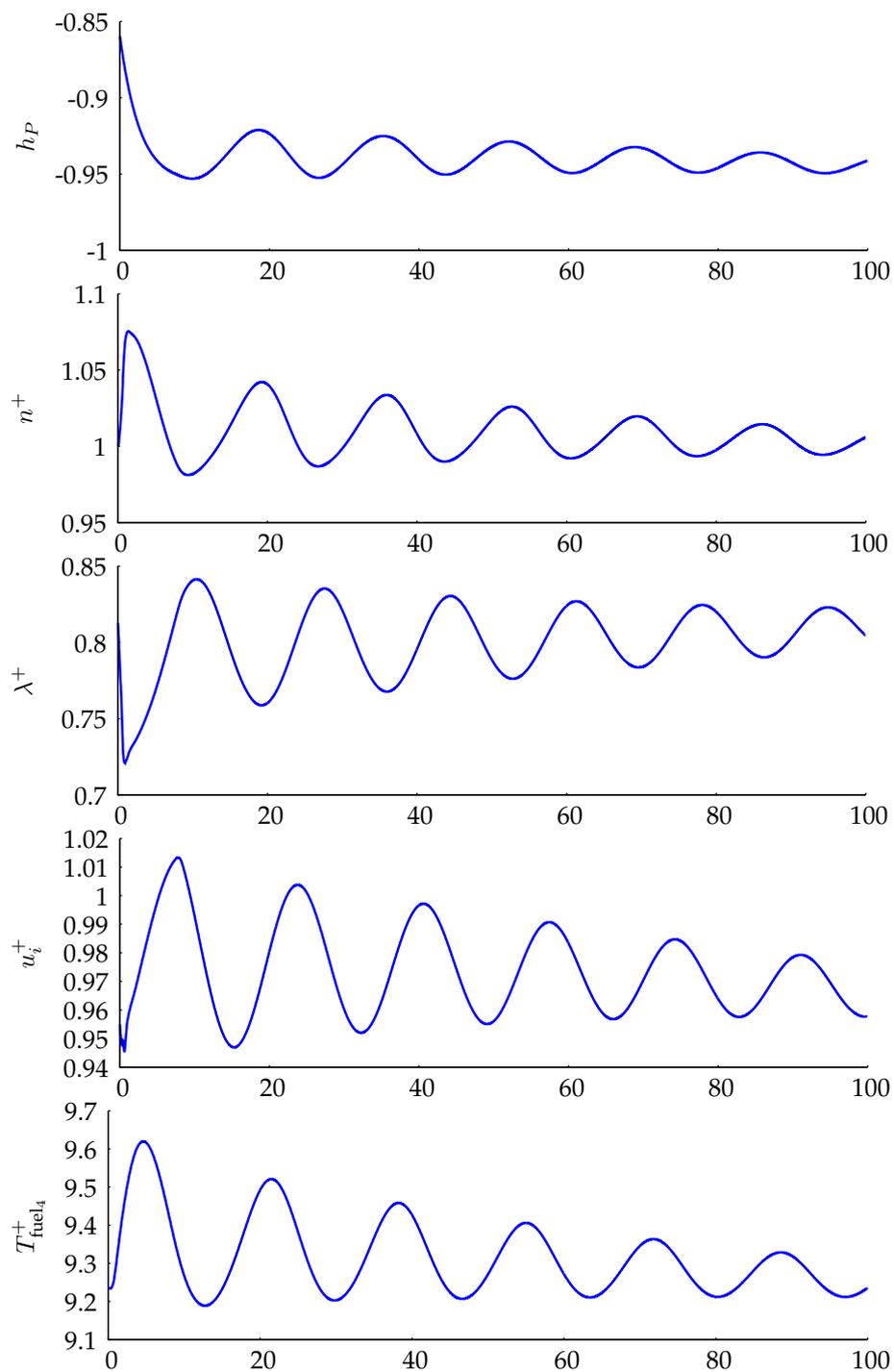


Figura 7.11: Transitorio resultante debido a una modificación del 10% en la entalpía del plenum con coeficientes de realimentación $\alpha_{T_{fuel}}^+ = -9,5 \cdot 10^{-4}$ y $\alpha_{P_{cool}}^+ = -4,9 \cdot 10^{-2}$.

vuelve a su valor de estado estacionario ya que el combustible se calienta con alguna constante de tiempo lo suficientemente rápida como para disminuir la excursión de potencia. De todas maneras, a $t^+ = 100$ todavía las variables continúan oscilando apreciablemente, por lo que intuimos que el margen de estabilidad es menor que en los dos casos anteriores como era de esperar.

En la mayoría de los reactores, el coeficiente de realimentación por temperatura del combustible es negativo debido principalmente al ensanchamiento Doppler de las resonancias en el ^{238}U , por lo que no hay mucho para decir sobre este parámetro y en los resultados que siguen mantenemos $\alpha_{T_{\text{fuel}}}^+$ constante e igual al valor correspondiente a las figuras 7.10 y 7.11. El coeficiente de vacío depende de las características neutrónicas y termohidráulicas del reactor, y puede ser eventualmente positivo en algunas condiciones. Es interesante estudiar un poco más detenidamente este caso en el que existen dos efectos opuestos, uno que tiende a desestabilizar y otro que hace que se opona a los cambios de potencia, ambos con tiempos característicos diferentes. Además de las inestabilidades puramente neutrónicas, en el capítulo 6 encontramos que la pérdidas de carga en la zona de dos fases tiende a inestabilizar el flujo, incluso para casos donde la potencia era constante. Identificamos entonces k_e y $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}$ como los dos parámetros más importantes que tienden a provocar inestabilidades en el problema acoplado termohidráulico-neutrónico.

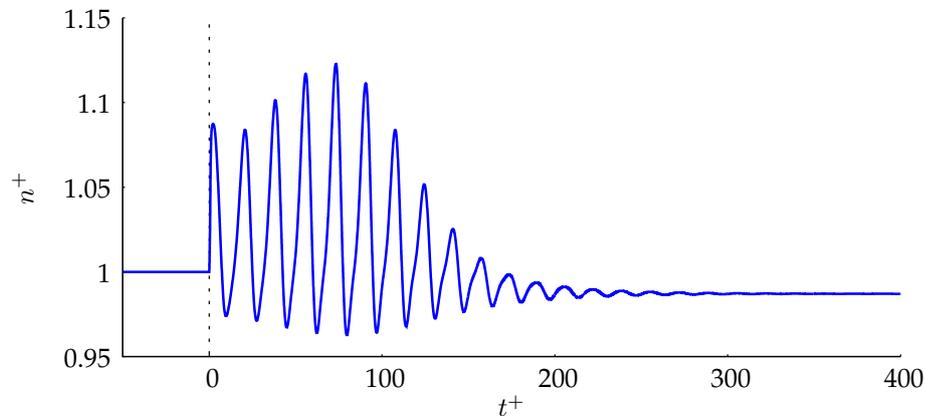


Figura 7.12: Evolución de la población neutrónica para la misma perturbación inicial con $k_e = 27,5$ y $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+ = -4,5 \cdot 10^{-2}$. Para tiempos grandes la potencia no vuelve a su valor original.

Todos estos efectos son altamente no lineales, por lo que la teoría lineal es de poca utilidad en el análisis de estos casos. En la figura 7.12 vemos que en un caso con bastante pérdida de carga a la salida del núcleo, la potencia neutrónica oscila transitoriamente de una forma que no se parece en nada a un seno como podría predecir una teoría lineal sino que el reactor no vuelve exactamente a la potencia inicial, tal como sucedía en el análisis no lineal que

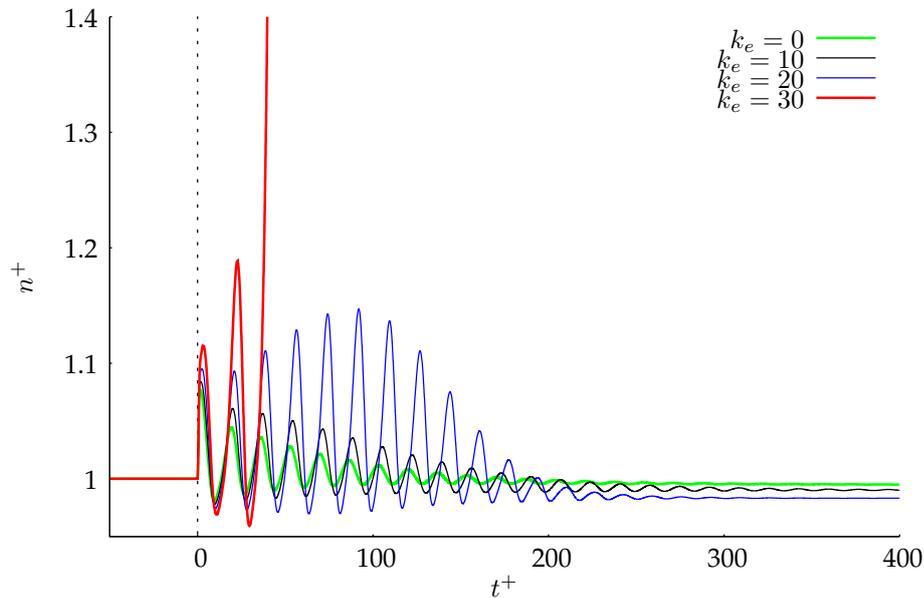


Figura 7.13: Efecto del coeficiente de pérdida de carga a la salida del núcleo para $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+ = -5 \cdot 10^{-2}$.

realizamos en la sección 5.3.

Manteniendo constante el coeficiente de realimentación por vacío, mostramos el efecto de las pérdidas de carga en la zona de dos fases en la figura 7.13. De la misma manera, ilustramos los diferentes comportamientos que se pueden dar según variamos $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}$ para k_e constante en la figura 7.14.

7.5. Estabilidad

Por más que al escribir el problema en forma adimensional de alguna manera estamos minimizando la cantidad de parámetros que intervienen en la dinámica del reactor, todavía la cantidad de parámetros libres que pueden influir significativamente en su estabilidad es elevado. A continuación mostramos dos mapas de estabilidad bidimensionales, uno para la geometría fija de la sección 7.4 y otro estudiando la influencia de la potencia térmica total y la longitud del riser.

7.5.1. Coeficiente de vacío vs. pérdida de carga

Teniendo en cuenta las figuras 7.13 y 7.14, hemos identificado que para una geometría fija los parámetros más importantes que determinan la estabilidad son las pérdidas de carga en la zona de dos fases y el coeficiente de reactividad por fracción de vacío.

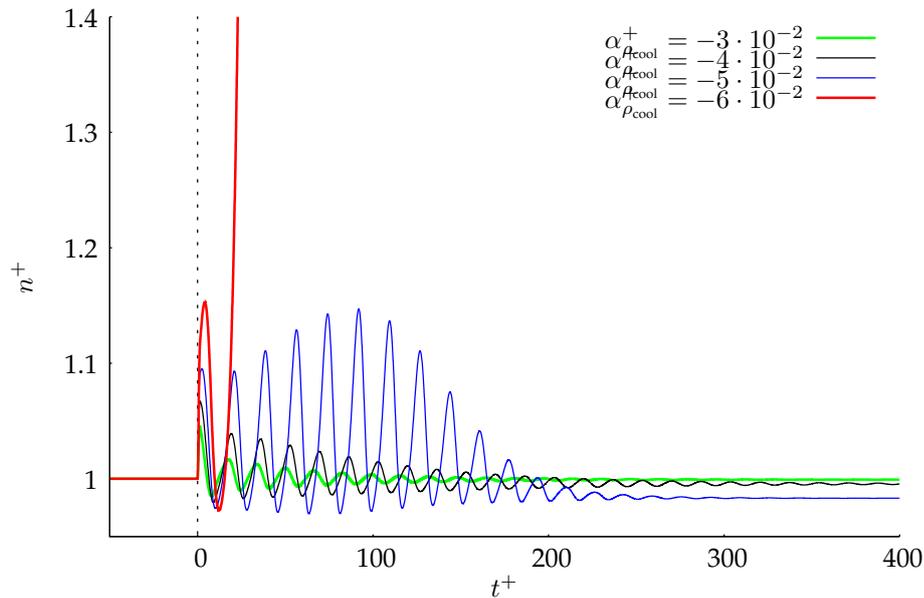


Figura 7.14: Efecto del coeficiente de reactividad por fracción de vacío para $k_e = 20$.

En la figura 7.15 mostramos un mapa de estabilidad en el plano de parámetros k_e vs. $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+$, construido con los mismos parámetros adimensionales de la sección anterior, tomando diferentes coeficientes de pérdidas a la salida del núcleo y ajustando el coeficiente k_i para lograr el caudal estacionario de diseño. Debido a la forma que hemos elegido para fijar la pérdida de carga y al mantener el resto de los parámetros constante, existe un valor máximo para el coeficiente k_e que hace que sea posible lograr el caudal de diseño, ya que si las pérdidas de carga a la salida son excesivamente grandes el caudal será menor que el deseado aún con $k_i = 0$. La perturbación inicial es la nuevamente la misma, una variación de un 10% en la entalpía del plenum inferior con respecto al valor de estado estacionario.

! Debemos recordar que el coeficiente de reactividad por vacío tiene el signo opuesto al coeficiente por densidad de refrigerante. Si bien en la jerga estamos más acostumbrados a trabajar con el primero, debido a la formulación adimensional del modelo, el coeficiente que caracteriza completamente el problema adimensional es $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+$. Es por eso que el eje de las ordenadas de la figura 7.15 tiene el signo opuesto al que uno espera en el sentido de que las inestabilidades aparecen al disminuir el coeficiente de reactividad y no al aumentar.

Observamos que efectivamente cuando el coeficiente de vacío es grande, el sistema tiende a ser excursivamente inestable debido al aumento exponencial de la potencia neutrónica. Los efectos de la realimentación positiva son más

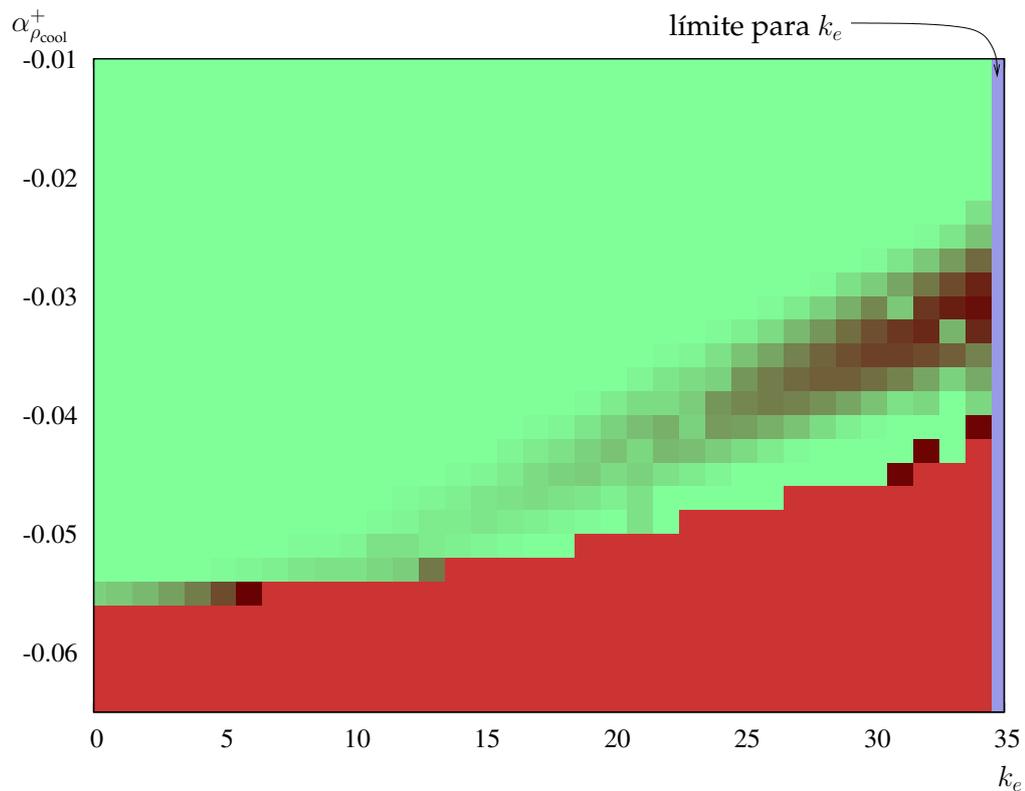


Figura 7.15: Mapa de estabilidad en el plano k_e vs. $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+$

importantes mientras mayores sean la pérdida de carga, y el reactor se hace inestable para coeficientes de vacío menores si k_e es grande. Pero también observamos en la figura 7.15 que en la zona de altas pérdidas de cargas y $\alpha_{\rho_{\text{cool}}}$ intermedios existen oscilaciones que si bien no aumentan su amplitud, se sostienen en el tiempo. El mapa de estabilidad fue construido adoptando que el transitorio inicial dura 300 unidades adimensionales de tiempo y analizando la dimensión fractal de las siguientes 100 unidades. La elección de estos valores obedece a requerir que un lado el tiempo de cálculo (principalmente utilizado en realizar la integración numérica del sistema más que en el cálculo de la dimensión fractal) de cada uno de los mapas de estabilidad insuma del orden de dos o tres decenas de horas. Teniendo en cuenta los resultados de las figuras 7.13 y 7.14, la dimensión cercana a uno que resulta en esta zona tiene que ver con que para grandes valores de k_e las oscilaciones se mantienen durante un gran tiempo, y en particular en el intervalo estudiado.

7.5.2. Potencia vs. longitud del riser

Además de estudiar lo que sucede una vez fijada la geometría, en etapas de ingeniería conceptual es importante conocer cómo dependen globalmente las propiedades de estabilidad en función de los parámetros fundamentales de diseño. Con el objetivo de construir un mapa bidimensional, analizamos el comportamiento del modelo en función de la potencia térmica total y de la longitud del riser, con coeficientes de realimentación constantes

$$\begin{aligned}\alpha_{T_{\text{cool}}}^+ &= 0 \\ \alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+ &= -4,2 \cdot 10^{-2} \\ \alpha_{T_{\text{fuel}}}^+ &= -1 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

y fijamos el coeficiente de pérdida de carga a la salida del núcleo $k_e = 25$.

En cada caso, tomamos que la longitud del generador de vapor es igual a la del riser y que el downcomer tiene la misma longitud que el núcleo, constantemente igual a $L = 1,4$ m. Por otro lado, al cambiar la potencia también cambiamos al mismo tiempo tanto el caudal de diseño como el salto térmico en el núcleo de estado estacionario, manteniendo la presión externa igual a la del caso particular discutido en la sección 7.4. Como el producto del caudal por el salto térmico en el núcleo es proporcional a la potencia total, entonces para cada potencia q^* fijamos como valores de diseño

$$\begin{aligned}T_{\text{cool}_i}^* &= T_{\text{sat}} - \sqrt{\frac{q^*}{q_{\text{ref}}^*}} \left(T_{\text{sat}} - T_{\text{cool}_i, \text{ref}} \right) \\ \dot{m}^* &= \sqrt{\frac{q^*}{q_{\text{ref}}^*}} \dot{m}_{\text{ref}}^*\end{aligned}$$

donde el subíndice “ref” indica los valores de la tabla 7.2. Tomando el resto de los parámetros iguales a los valores de referencia del caso particular estudiado en la sección 7.4, el mapa de estabilidad resultante es el mostrado en la figura 7.16.

El hecho de fijar las pérdidas de carga a la salida para todas las potencias en el mismo valor constante $k_e = 25$ hace que para potencias pequeñas o longitudes de risers cortas la pérdida de carga a la entrada del núcleo que es necesario agregar sea pequeña, lo que hace que el efecto relativo de las pérdidas de carga en la zona de dos fases con respecto a las de una fase sea mayor y el sistema tienda a inestabilizarse. Por otro lado, risers demasiado largos también tienden a inestabilizar el flujo. El mapa de estabilidad refleja las zonas del espacio

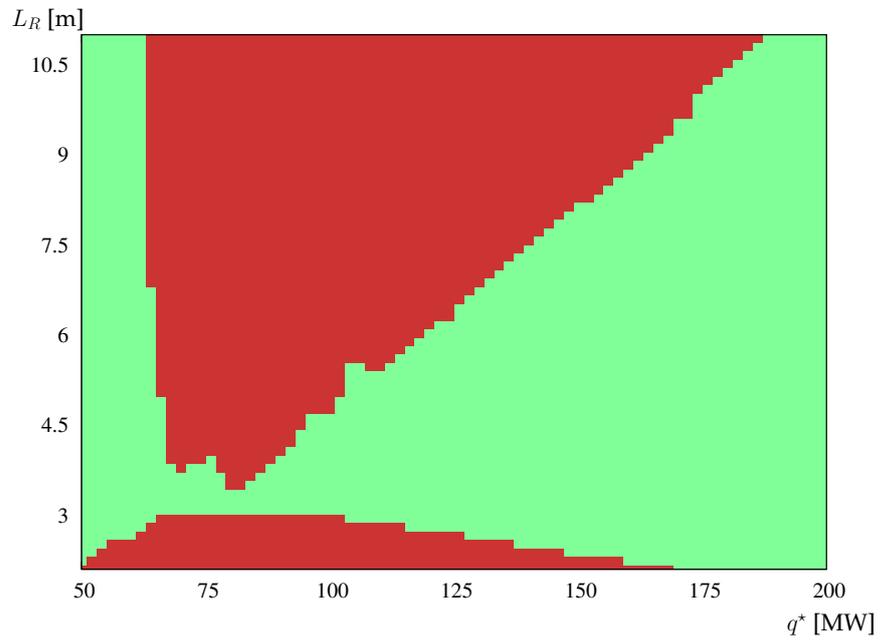


Figura 7.16: Mapa de estabilidad en el plano q^* vs. L_R para $k_e = 25$ y $\alpha_{\rho_{cool}}^+ = -0,0042$.

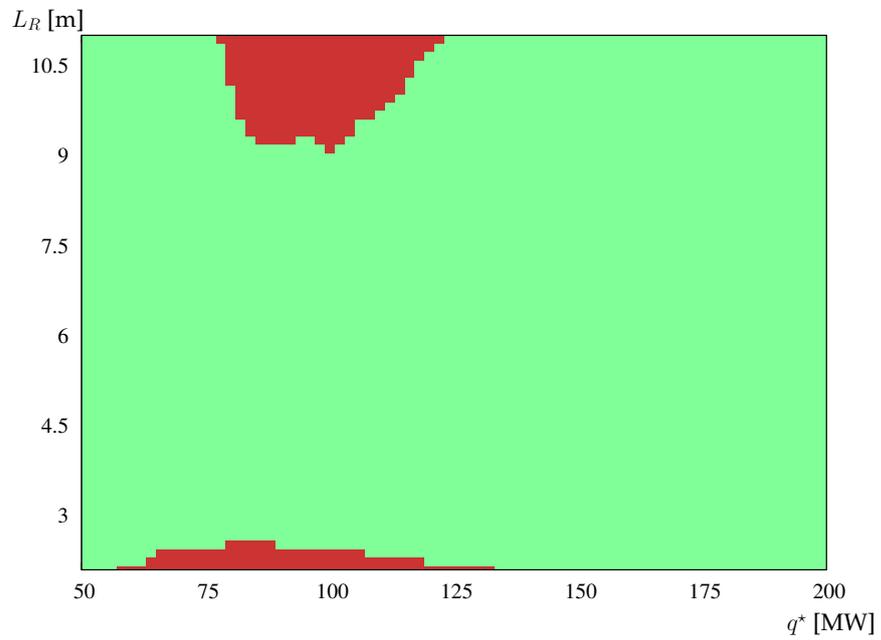


Figura 7.17: Mapa de estabilidad en el plano q^* vs. L_R para $k_e = 20$ y $\alpha_{\rho_{cool}}^+ = -0,0040$.

de parámetros donde dominan los efectos de estabilidad e inestabilidad en el espacio de parámetros..

Podemos investigar también como se relaciona la estabilidad en el plano k_e vs. q^* y los efectos de la fracción de vacío y de las pérdidas de carga contruyendo un nuevo mapa de estabilidad variando ligeramente estos parámetros. Tomando ahora

$$\begin{aligned}\alpha_{\rho_{\text{cool}}}^+ &= -4,0 \cdot 10^{-2} \\ k_e &= 20\end{aligned}$$

obtenemos el mapa de estabilidad de la figura 7.17. Vemos allí que logramos un subespacio estable significativamente más grande con respecto al de la figura 7.16 variando ligeramente los coeficientes de reactividad por vacío y la pérdida de carga en la zona de dos fases.

Notamos también que en los mapas de estabilidad k_e vs. q^* no observamos órbitas en el espacio de las fases que presenten un comportamiento oscilatorio en el intervalo de tiempo estudiado, incluso tomando una discretización del espacio de parámetros más fina que en el caso de la figura 7.15. Tampoco observamos oscilaciones aisladas como sí vemos en esa figura, tal vez debido a limitaciones en el modelo. Sin embargo, pensando que los mapas bidimensionales que construimos son subespacios de un hiperespacio de más dimensiones —tantas como parámetros independientes tenga el modelo— podríamos aventurar, sin ningún tipo de respaldo, que las “islas de oscilaciones” forman un conjunto que tiene una medida muy pequeña con respecto al espacio completo de parámetros.

Reactor nuclear de canales paralelos

It doesn't matter how beautiful your theory is,
it doesn't matter how smart you are.
If it doesn't agree with experiment, it's wrong.
Richard Feynman

En los reactores de agua pesada suele ser necesario separar físicamente el moderador del refrigerante para mantener más frío el primero, aumentar su capacidad de moderación y disminuir así las dimensiones del núcleo. Para ello se suele hacer circular el refrigerante a través de canales independientes vinculados a través de plenums o feeders. Estos canales atraviesan un recipiente que contiene el moderador, que suele ser un fluido —o incluso un sólido— independiente a su vez de los canales refrigerantes. Si bien estos reactores suelen ser de tipo agua presurizada donde no se espera un cambio de fase en operación normal, debido a las características del enriquecimiento utilizado muchas veces el coeficiente de vacío es ligeramente positivo. Interesa estudiar entonces, de ocurrir, el efecto que tiene la ebullición subenfriada del refrigerante sobre la dinámica del sistema.

En este capítulo desarrollamos un modelo muy simplificado de un reactor de canales paralelos verticales y estudiamos con especial atención la generación de ebullición subenfriada. Nuevamente, nos interesa analizar fundamentalmente la variación de la estabilidad con ciertos parámetros más que la estabilidad absoluta para obtener una idea mental de cómo influyen éstos es la dinámica de un reactor de este tipo.

8.1. Modelo matemático

Consideremos el problema planteado en la figura 8.1. Una bomba provee un caudal másico \dot{m} y fija una diferencia de presión Δp_{pump} entre dos plenums.

Existen M canales geoméricamente idénticos de longitud L y área transversal A por los que circula líquido de simple fase con una velocidad u_i que no depende de la posición axial. Los canales están dentro de un tanque que contiene un moderador líquido más frío que el refrigerante, que es recirculado y enfriado por un circuito independiente.

Asignamos a todos los canales mismo coeficiente de pérdida de carga distribuida f pero eventualmente diferentes coeficientes de pérdida de carga puntual k_i . Agrupamos las pérdidas en las cañerías comunes de área A y en los plenums dentro de un único coeficiente k_p . A lo largo de la longitud L , en algún punto ξ_j donde la temperatura de bulk alcanza una temperatura crítica de *detach* comienza la ebullición subenfriada. Suponemos en todo momento que el flujo es de simple fase y que la ebullición subenfriada no tiene influencia en la evaluación de las pérdidas de carga, por lo que el problema fluidodinámico está desacoplado del problema termodinámico. Consideramos además que el fluido entra al plenum inferior a una temperatura constante y suponemos conservativamente que la potencia disipada en cada canal puede eventualmente ser diferente pero en todos los casos es uniforme en la coordenada axial.

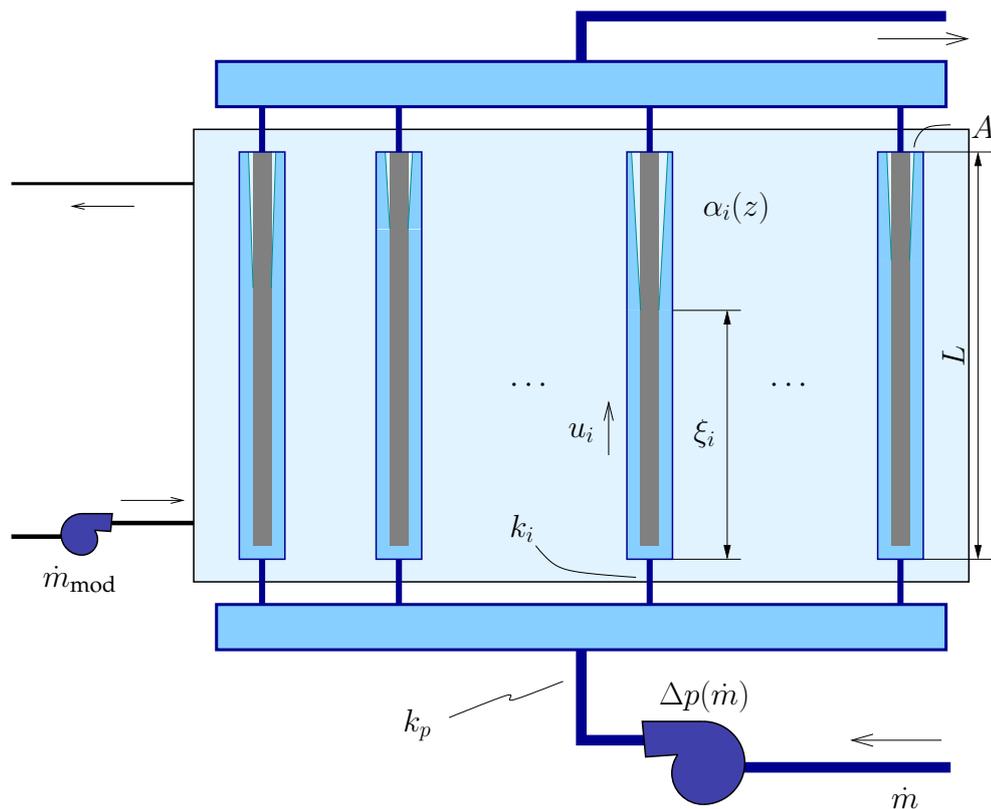


Figura 8.1: Esquema del problema del análisis de un reactor de canales paralelos

El problema consiste en estudiar si perturbaciones locales pueden llegar a generar fracciones de vacío suficientes como para desestabilizar la potencia neutrónica total. Para ello desarrollamos un modelo unidimensional en cada canal y obtenemos un perfil de temperaturas de refrigerante, y a partir de la correlación de Saha y Zuber (Clausse y Lahey, 1990) calculamos la temperatura a la cual las burbujas se desprenden de la pared de los combustibles y contribuyen con una fracción de vacío apreciable mediante el perfil de Levy (Lahey y Moody, 1977).

! Utilizar una correlación basada en una analogía entre transferencia de calor y de momento para calcular el punto donde comienza una distribución axial exponencial de fracción de vacío propuesta a partir de argumentos integrales de conservación en el estado estacionario es simplificar demasiado el análisis de un reactor nuclear de canales paralelos. De esta manera, como el principal efecto de interés ya está suficientemente simplificado no parece razonable lograr una descripción detallada de las demás variables que intervienen en efectos de segundo orden, por lo que para el resto de las variables que intervienen en el problema tomamos sólo valores medios a partir de parámetros concentrados.

! En el desarrollo que sigue, el subíndice i indica canal i -ésimo y no *inlet*. Simbolizamos la temperatura a la entrada de los canales como la correspondiente al plenum T_P . Si un símbolo no tiene subíndice, se refiere a las condiciones del refrigerante en el canal.

8.1.1. Fluidodinámica

Definimos la velocidad de referencia del problema como aquella que hace si el líquido viaja a esa velocidad en el canal más caliente llegue a saturación en el extremo $z = L$

$$u_{\text{ref}} = \frac{q_{\text{max}}^*}{\rho A c_p (T_{\text{sat}} - T_P)} \quad (8.1)$$

Por conservación de masa, el flujo másico total es la suma de los caudales másicos de todos los canales

$$\dot{m}_T = \sum_{j=1}^M \dot{m}_j \quad (8.2)$$

La velocidad u_P del fluido inmediatamente antes de entrar al plenum, donde suponemos que se concentran todas las pérdidas de carga del circuito externo, es

$$u_P = \frac{\dot{m}_T}{\rho A_P} \quad (8.3)$$

Dividiendo las ecuaciones (8.2) y (8.3) por $\rho A u_{\text{ref}}$ e igualando los caudales máscicos resulta

$$u_P^+ A_P^+ = \sum_{j=1}^M u_j^+ \quad (8.4)$$

Por otro lado, debido a la presencia de los plenums, en el estado estacionario la caída de presión en cada canal debe ser la misma. Suponiendo que instante a instante esta condición también se cumple, para los canales genéricos i y j , en forma adimensional debe ser

$$(k_i + \Lambda) u_i^{+2} = (k_j + \Lambda) u_j^{+2} \quad (8.5)$$

Escribiendo u_j^+ en función de u_i^+ a partir de la ecuación (8.5) podemos encontrar una relación entre la velocidad u_P^+ y la velocidad de algún canal i

$$\begin{aligned} u_P^+ &= \frac{1}{A_P^+} \sum_{j=1}^M \sqrt{\frac{k_i + \Lambda}{k_j + \Lambda}} u_i^+ \\ u_P^+ &= \frac{1}{A_P^+} \left[(k_i + \Lambda)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(k_j + \Lambda)^{1/2}} \right] u_i^+ \end{aligned} \quad (8.6)$$

En el estado estacionario, la diferencia de presión introducida por la bomba debe ser igual a la pérdida de carga de un canal individual, más la pérdida de carga en los plenums más la presión hidrostática del líquido

$$\Delta p_{\text{pump}}^{+*} = \frac{1}{\text{Fr}} + k_P u_P^{+*2} + (k_i + \Lambda) u_i^{+*2}$$

Supongamos que podemos describir matemáticamente la curva característica de la bomba como una parábola sin término lineal, a partir de la presión máxima a caudal cero y del caudal máscico máxima o diferencia de presión cero que la bomba puede proveer (figura 8.2). Entonces la velocidad u_p^{+*} de estado estacionario debe ser tal que

$$\Delta p_{\text{max}}^+ \left[1 - \left(\frac{A_P^+ u_P^{+*}}{\dot{m}_{\text{max}}^+} \right)^2 \right] = \left[k_P + A_P^{+2} \left(\sum_{j=1}^M \frac{1}{(k_j + \Lambda)^{1/2}} \right)^{-2} \right] u_P^{+*2}$$

con lo que resulta

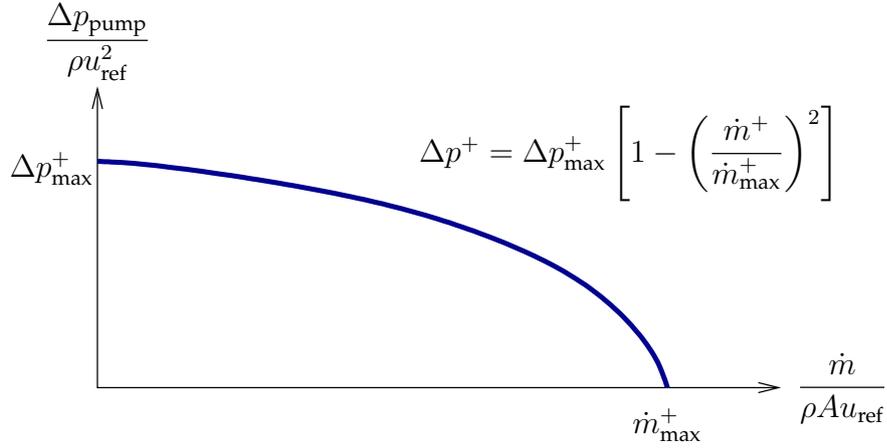


Figura 8.2: Curva característica de la bomba

$$u_P^{+\star} = \sqrt{\frac{\Delta p_{\text{max}}}{k_P + A_P^{+2} \left(\sum_{j=1}^M \frac{1}{(k_j + \Lambda)^{1/2}} \right)^{-2} + \Delta p_{\text{max}} \left(\frac{A_P^+}{\dot{m}_{\text{max}}^+} \right)^2}}$$

y a partir de la ecuación (8.6), las velocidades estacionarias de los canales resultan

$$u_i^{+\star} = \frac{A_P^+ u_P^{+\star}}{(k_i + \Lambda)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(k_j + \Lambda)^{1/2}}}$$

Para obtener las ecuaciones que describen el estado transitorio, consideremos la ecuación de momento integrada en la longitud L del canal i

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} [\rho u_i] dz + \int_0^L \frac{\partial}{\partial z} [\rho u_i^2] dz = -\rho g L - \left(k_i + \frac{fL}{D} \right) \rho u_i^2 + \Delta p_{\text{pump}} - k_p \rho u_P^2$$

Adimensionalizando, teniendo en cuenta que el fluido es incompresible y que la velocidad no depende de z y despreciando la inercia de la masa de refrigerante que está fuera del núcleo, resulta

$$\frac{du_i^+}{dt^+} = -\frac{1}{\text{Fr}} - (k_i + \Lambda) u_i^{+2} + \Delta p_{\text{max}}^+ \left[1 - \left(\frac{A_P^+ u_P^+}{\dot{m}_{\text{max}}^+} \right)^2 \right] - k_p u_P^{+2} \quad (8.7)$$

Podemos calcular la velocidad u_P^+ instante a instante a partir de la ecuación (8.4), que implica conservación de masa. Como la velocidad en el ple-

num depende de la suma de las velocidades u_j^+ de todos los canales, entonces las M ecuaciones (8.7) están acopladas entre sí pero en principio forman un sistema dinámico autónomo e independiente de los aspectos térmicos del problema. Por más que debido a la dependencia monótonamente decreciente de Δp_{pump} con el caudal de la figura 8.2 este subsistema sea siempre estable, los tiempos característicos de retorno al punto fijo a partir de una perturbación pueden ser lo suficientemente grandes como para que el problema neutrónico-termohidráulico presente excursiones de potencia y el conjunto completo sea Lyapunov-inestable.

8.1.2. Termodinámica

Las eventuales inestabilidades que el sistema de la figura 8.1 puede llegar a presentar tienen que ver básicamente con la dinámica de la potencia neutrónica. Sin intervención de los sistemas de control, el ritmo de fisiones está relacionado con la distribución de temperaturas del refrigerante, del combustible y del moderador. Como ya mencionamos, este tipo de reactores suele tener un coeficiente de realimentación por vacío positivo y el fenómeno que interesa estudiar en este caso es el efecto de la ebullición subenfriada en la neutrónica. Para ello, a partir de la distribución axial de temperaturas en cada canal estimamos una fracción de vacío mediante la correlación de Saha y Zuber y el perfil de Levy, y podemos así acoplar el problema termohidráulico con las ecuaciones de cinética puntual bien con coeficientes de realimentación o mediante la fórmula de perturbaciones (5.14).

Refrigerante

Dado que no esperamos que el refrigerante experimente un cambio de fase en el canal, es conveniente trabajar con temperaturas en lugar de entalpías como hicimos en los capítulos 6 y 7. La ecuación de energía unidimensional para el canal i es

$$\rho c A \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \eta_{\text{fuel}} P_{\text{fuel}} (T_{\text{fuel}_i} - T_i) - \eta_{\text{mod}} P_{\text{mod}} (T_i - T_{\text{mod}})$$

Para adimensionalizar esta ecuación definimos

$$\begin{aligned}
t^+ &= \frac{t}{t_{\text{ref}}} = \frac{t}{\frac{\rho c A L (T_{\text{sat}} - T_P)}{q_{\text{max}}^*}} \\
z^+ &= \frac{z}{L} \\
u^+ &= \frac{u}{u_{\text{ref}}} = \frac{u}{\frac{q_{\text{max}}^*}{\rho c A (T_{\text{sat}} - T_P)}} \\
T^+ &= \frac{T - T_P}{T_{\text{sat}} - T_P}
\end{aligned}$$

donde q_{max}^* es la potencia total de estado estacionario disipada en el canal más caliente. Con estas definiciones, la ecuación de energía adimensional queda

$$\frac{\partial T_i^+}{\partial t^+} + u_i^+ \frac{\partial T_i^+}{\partial z^+} = \text{Nu}_{\text{fuel}} \kappa_{\text{fuel}} (T_{\text{fuel}_i}^+ - T_i^+) - \text{Nu}_{\text{mod}} \kappa_{\text{mod}} (T_i^+ - T_{\text{mod}}^+) \quad (8.8)$$

con

$$\kappa_x = \frac{k}{\rho c} \frac{P_x L}{AD} \frac{1}{u_{\text{ref}}}$$

! El números de Nusselt del combustible en la ecuación (8.8) no es directamente el que provee la correlación de Dittus-Boelter (7.2) sino que debe tener en cuenta la caída de temperatura por conductividad según discutimos en la sección 7.1.2 e ilustramos en la figura 7.4. Por otro lado, no tomamos el Nusselt correspondiente al moderador como dato sino que lo calculamos a partir de la potencia intercambiada en el circuito de refrigeración del moderador en el estado estacionario, parámetro que suponemos conocido.

En este momento podríamos intentar resolver la ecuación (8.8) con algún método numérico para ecuaciones en derivadas parciales basado en diferencias finitas tal como hicimos en el capítulo 4 o bien realizar una aproximación tipo Galerkin y obtener un sistema de ecuaciones ordinarias como en los últimos dos capítulos. Debido a que más adelante describimos la potencia total a través de las ecuaciones de cinética puntual, conviene tener formulado el problema completo como un conjunto de ODE's para poder elegir un paso temporal —constante para que se apliquen las herramientas desarrolladas en el capítulo 3—lo suficientemente pequeño como para tener en cuenta los efectos de los neutrones instantáneos independientemente de condiciones sobre el número de Courant en el transporte de energía.

Dividimos entonces la longitud L en $N_{1\phi}^1$ para nodos *fijos* y equiespaciados e integramos la ecuación (8.8) en el nodo n suponiendo un perfil lineal de

¹El símbolo 1ϕ es sólo para mantener la notación. A menos de efectos de ebullición subenfriada, en todo momento el fluido se mantiene en una fase.

temperaturas para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^+} \left[\frac{1}{2N_{1\phi}} (T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+) \right] + u_i^+ (T_{i_n} - T_{i_{n-1}}) = & - \text{Nu}_{\text{fuel}} \frac{\kappa_{\text{fuel}}}{2N_{1\phi}} (T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+) \\ & + \text{Nu}_{\text{fuel}} \frac{\kappa_{\text{fuel}}}{N_{1\phi}} T_{\text{fuel}_i}^+ \\ & - \text{Nu}_{\text{mod}} \frac{\kappa_{\text{mod}}}{2N_{1\phi}} (T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+) \\ & + \text{Nu}_{\text{mod}} \frac{\kappa_{\text{mod}}}{N_{1\phi}} T_{\text{mod}}^+ \end{aligned}$$

donde supusimos que tanto el combustible del canal i como el moderador tienen una única temperatura característica. Podemos despejar entonces una expresión explícita para la derivada de la temperatura en el nodo n

$$\begin{aligned} \frac{dT_{i_n}^+}{dt^+} = & 2 \text{Nu}_{\text{fuel}} \kappa_{\text{fuel}} T_{\text{fuel}_i}^+ - \text{Nu}_{\text{fuel}} \kappa_{\text{fuel}} (T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+) \\ & + 2 \text{Nu}_{\text{mod}} \kappa_{\text{mod}} T_{\text{mod}}^+ - \text{Nu}_{\text{mod}} \kappa_{\text{mod}} (T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+) \\ & - 2u_i^+ N_{1\phi} (T_{i_n}^+ - T_{i_{n-1}}^+) - \frac{dT_{i_{n-1}}^+}{dt^+} \end{aligned}$$

Combustible

Para evitar una descripción detallada de un efecto de segundo orden, tomamos un modelo de parámetros concentrados para el combustible y representamos su estado con una temperatura media T_{fuel_i} tal que

$$m_{\text{fuel}} c_{\text{fuel}} \frac{dT_{\text{fuel}_i}}{dt} = q_{\text{fuel}_i} - \mathfrak{h}_{\text{fuel}} P_{\text{fuel}} \int_0^L (T_{\text{fuel}_i} - T_{\text{cool}_i}) dz$$

Dividiendo ambos miembros por $u_{\text{ref}} m_{\text{fuel}} c_{\text{fuel}} \Delta T_{\text{ref}} / L$

$$\frac{dT_{\text{fuel}_i}^+}{dt^+} = n^+ q_i^{+*} \gamma_{\text{fuel}} - \mathfrak{N}_{\text{fuel}} \left(T_{\text{fuel}_i}^+ - \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} \frac{T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+}{2N_{1\phi}} \right)$$

siendo n^+ la población neutrónica adimensional con respecto al estado estacionario, q_i^{+*} la relación entre la potencia total de estado estacionario del canal i con respecto a la del canal más caliente y

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{fuel}} &= \frac{q_{\text{max}}^*}{m_{\text{fuel}} c_{\text{fuel}} \Delta T_{\text{ref}}} \frac{L}{u_{\text{ref}}} \\ \mathfrak{N}_{\text{fuel}} &= \frac{\text{Nu}_{\text{fuel}} k_f P_{\text{fuel}} L}{m_{\text{fuel}} c_{\text{fuel}} D} \frac{L}{u_{\text{ref}}} \end{aligned}$$

Moderador

Suponemos que podemos describir completamente el estado del moderador describiendo sólo una temperatura media T_{mod} y que el sistema de refrigeración inyecta líquido moderador a una temperatura constante $T_{\text{mod,in}}$ a un caudal másico constante \dot{m}_{mod} . Si la densidad y la capacidad calorífica del moderador es la misma que la del refrigerante entonces podemos escribir

$$\rho V_{\text{mod}} c \frac{dT_{\text{mod}}}{dt} = \dot{m}_{\text{mod}} c (T_{\text{mod,in}} - T_{\text{mod,out}}) + \sum_{i=1}^M \int_0^L h_{\text{mod}} P_{\text{mod}} (T_i - T_{\text{mod}}) dz$$

o en forma adimensional

$$\frac{dT_{\text{mod}}^+}{dt^+} = \frac{\dot{m}_{\text{mod}}^+}{V_{\text{mod}}^+} (T_{\text{mod,in}}^+ - T_{\text{mod,out}}^+) + \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} \frac{\text{Nu}_{\text{mod}} \kappa_{\text{mod}}}{N_{1\phi}} \left(\frac{T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+}{2} - T_{\text{mod}}^+ \right)$$

donde el caudal másico de refrigeración está adimensionalizado con respecto al caudal de referencia $\rho A u_{\text{ref}}$ y el volumen ocupado por el moderador está tomado con respecto al volumen de refrigerante en un canal individual AL .

Si tomamos que la temperatura T_{mod}^+ representativa del moderador es el promedio aritmético entre las temperaturas de entrada y de salida, entonces

$$T_{\text{mod,out}}^+ = 2T_{\text{mod}}^+ - T_{\text{mod,in}}^+$$

y la ecuación para el moderador queda finalmente

$$\frac{dT_{\text{mod}}^+}{dt^+} = \frac{2\dot{m}_{\text{mod}}^+}{V_{\text{mod}}^+} (T_{\text{mod,in}}^+ - T_{\text{mod}}^+) + \frac{\text{Nu}_{\text{mod}} \kappa_{\text{mod}}}{2N_{1\phi}} \left[\sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} (T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+) - M T_{\text{mod}}^+ \right] \quad (8.9)$$

Ebullición subenfriada

Aunque el seno del fluido se mantenga constantemente subenfriado, la distribución radial de temperaturas dentro del canal puede ser tal que se alcance la condición de saturación en alguna pequeña región cercana a la superficie calefactora. Ilustramos la situación en la figura 8.3, donde la pared del tubo está calefaccionada con una potencia uniforme. Cuando la temperatura de mezcla del fluido alcanza un valor T_n , la temperatura en la cercanía de la pared es tal que comienzan a generarse pequeñas burbujas, pero que al moverse hacia el seno del fluido colapsan debido a que éste está más frío. Sin embargo, a partir de una temperatura T_d de *detach*, las condiciones son tales que las burbujas

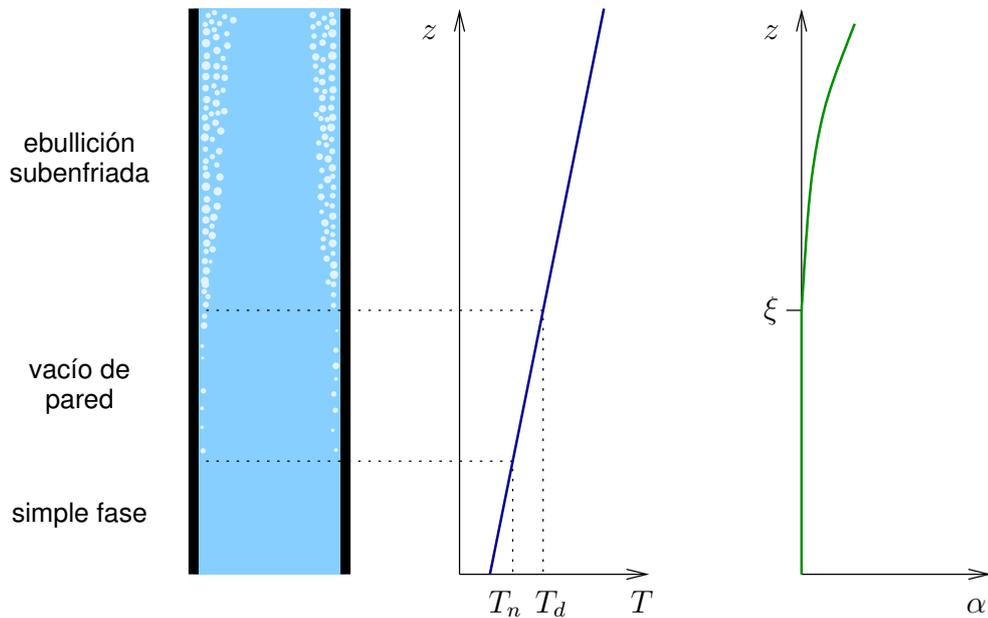


Figura 8.3: Ebullición subenfriada en un canal uniformemente calefaccionado. En la zona de vacío de pared las burbujas generadas colapsan y no producen una contribución significativa. En la zona de ebullición subenfriada las burbujas se desprenden de la pared y viajan hacia el seno del fluido, generando una pequeña fracción de vacío.

pueden desprenderse de la superficie. La fracción de vacío involucrada en el tramo de vacío de pared es despreciable, y podemos asumir que sólo recién en la zona de ebullición subenfriada propiamente dicha existe una contribución significativa.

Citados por Clause y Lahey, Saha y Zuber definen que el mecanismo de migración desde la pared hacia el seno del fluido subenfriado está caracterizado por el número de Peclet

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{\dot{m} D c_{pf}}{A k_f} \quad (8.10)$$

Para $Pe < 7 \cdot 10^4$ el proceso está controlado térmicamente y la ebullición subenfriada aparece cuando la temperatura es suficiente como para que un número significativo de burbujas pueda moverse hacia el seno del fluido sin condensarse. En este caso, la temperatura de bulk T_d en la cual se da la generación neta de vapor es tal que el número de Nusselt alcanza el valor crítico

$$Nu_d = \frac{q'' D}{k_f (T_{sat} - T_d)} = 455 \quad \text{para } Pe < 70000 \quad (8.11)$$

Por otro lado, si el número de Peclet es mayor que 70000, el proceso está controlado hidrodinámicamente y las burbujas generadas en la pared calefac-

tora son llevadas rápidamente hacia el seno del fluido antes de que puedan condensarse. Utilizando la analogía de Colburn entre transferencia de calor y de momento, Saha y Zuber derivaron un valor crítico para el número de Stanton a partir de cual existe una ebullición subenfriada significativa

$$St_d = \frac{A q''}{c_{pf} \dot{m} (T_{\text{sat}} - T_d)} = 0,0065 \quad \text{para } Pe > 70000 \quad (8.12)$$

Estas correlaciones necesitan que el flujo sea estacionario y esté completamente desarrollado, y que el flujo de calor sea uniforme y constante. La única de estas condiciones que se cumple en el problema es la de flujo hidrodinámicamente desarrollado. De todas maneras, debido a la simplicidad de la formulación y teniendo en cuenta que estamos realizando grandes aproximaciones en la descripción de un reactor de canales paralelos, utilizamos las correlaciones de Saha y Zuber para calcular la temperatura de desprendimiento T_d en cada canal.

En el caso de reactores nucleares de canales paralelos, el número de Peclet es del orden de 10^6 por lo que la migración está hidrodinámicamente controlado y la temperatura de detach en el canal i es

$$T_{d_i} = T_{\text{sat}} - \frac{154 q''_i}{c_p \rho u_i}$$

Adimensionalizando y teniendo en cuenta el resto de los parámetros adimensionales del modelo, resulta

$$T_{d_i}^+ = 1 - \frac{154 A}{P_{\text{fuel}} L} \text{Nu}_{\text{fuel}} \kappa_{\text{fuel}} \left[T_{\text{fuel}_i}^+ - \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} \frac{T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+}{2N_{1\phi}} \right]$$

A partir de la temperatura T_{d_i} , calculamos el título medio de utilizando el perfil de Levy (Lahey y Moody, 1977)

$$x = \frac{h - h_f}{h_{fg}} + \frac{h_f - h_d}{h_{fg}} \exp\left(-\frac{h - h_d}{h_f - h_d}\right) \quad (8.13)$$

En cada nodo donde $T > T_d$, escribimos el título a partir de la temperatura adimensional del refrigerante como

$$x_{i_n} = \frac{c_{pf} (T_{\text{sat}} - T_P)}{h_{fg}} \left[(T_{i_n}^+ - 1) + (1 - T_{d_i}^+) \exp\left(-\frac{T_{i_n}^+ - T_{d_i}^+}{1 - T_{d_i}^+}\right) \right]$$

lo que implica una fracción de vacío

$$\alpha_{i_n} = \frac{x_{i_n}}{x_{i_n} + \frac{\rho_g}{\rho_l} (1 - x_{i_n})} \quad (8.14)$$

! El título que aparece en la ecuación (8.13) es el título de flujo, mientras que la fracción de vacío (8.14) es la fracción de vacío de flujo suponiendo modelo homogéneo. Por otro lado, la fracción de vacío que interesa desde el punto de vista neutrónico es la fracción de vacío estática, que no tiene en cuenta la distribución radial de velocidades para calcular valores medios. En este desarrollo suponemos que todos los títulos y fracciones de vacío son iguales entre sí.

Estado estacionario

En el estado estacionario deben cumplirse simultáneamente las siguientes condiciones

$$T_{i_n}^{+*} = \frac{1}{\text{Nu}_{\text{fuel}}\kappa_{\text{fuel}} + \text{Nu}_{\text{mod}}\kappa_{\text{mod}} + 2u_i^{+*}N_{1\phi}} \left[2\text{Nu}_{\text{fuel}}\kappa_{\text{fuel}}T_{\text{fuel}_i}^{+*} + 2\text{Nu}_{\text{mod}}\kappa_{\text{mod}}T_{\text{mod}}^{+*} - T_{i_{n-1}}^{+*} (\text{Nu}_{\text{fuel}}\kappa_{\text{fuel}} + \text{Nu}_{\text{mod}}\kappa_{\text{mod}} - 2u_i^{+*}N_{1\phi}) \right]$$

$$T_{\text{fuel}_i}^* = q_i^{+*} \frac{\gamma_{\text{fuel}}}{\aleph_{\text{fuel}}} + \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} \frac{T_{i_{n-1}}^{+*} + T_{i_n}^{+*}}{2N_{1\phi}}$$

$$T_{\text{mod}}^{+*} = \frac{2\frac{\dot{m}_{\text{mod}}^+}{V_{\text{mod}}^+}T_{\text{mod}_{\text{in}}}^+ + \frac{\text{Nu}_{\text{mod}}\kappa_{\text{mod}}}{2N_{1\phi}} \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} (T_{i_{n-1}}^{+*} + T_{i_n}^{+*})}{\frac{2\dot{m}_{\text{mod}}^+}{V_{\text{mod}}^+} + \frac{\text{Nu}_{\text{mod}}\kappa_{\text{mod}}}{2N_{1\phi}}M}$$

Fijados todos los parámetros, las temperaturas de estado estacionario salen de resolver un sistema de ecuaciones lineal. Sin embargo, no todos los parámetros son conocidos *a priori*. Por ejemplo, no es sencillo estimar el número de Nusselt entre el refrigerante y el moderador. Lo que hacemos es fijar la temperatura del moderador midiendo cuánta potencia intercambia el circuito de refrigeración del moderador y calcular el número de Nusselt que hace que se logren las condiciones de estado estacionario. Esta situación transforma el sistema lineal en un problema no lineal que podemos resolver utilizando técnicas iterativas de cálculo de raíces.

8.1.3. Neutrónica

Al igual que en el capítulo 7 modelamos la dinámica neutrónica con las ecuaciones de cinética puntual a seis grupos

$$\frac{dn^+}{dt^+} = \frac{\rho_{\text{fiss}} - \beta}{\Lambda_{\text{fiss}}^+} n^+ + \sum_{j=1}^I \lambda_{\text{fiss}_j}^+ c_j^+ \quad (8.15)$$

$$\frac{dc_i^+}{dt^+} = \frac{\beta_i}{\Lambda_{\text{fiss}}^+} n^+ - \lambda_{\text{fiss}_i}^+ c_i^+ \quad (8.16)$$

con

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{fiss}}^+ &= \frac{\Lambda_{\text{fiss}}}{t_{\text{ref}}} \\ \lambda_{\text{fiss}_i}^+ &= \lambda_{\text{fiss}_i} t_{\text{ref}} \end{aligned}$$

De la misma manera, podemos calcular la reactividad ρ_{fiss} utilizando coeficientes de reactividad o bien mediante la dependencia de las secciones eficaces con la temperatura del refrigerante, del moderador, del combustible y con la fracción de vacío. Como queremos estudiar la influencia relativa de la fracción de vacío en la estabilidad, elegimos acoplar el problema mediante coeficientes de reactividad para tomarlos como parámetros variables en la construcción de mapas de estabilidad.

Si α_a^+ es el coeficiente adimensional de reactividad debido a la variación de la variable a^+ , entonces la reactividad ρ_{fiss} es

$$\begin{aligned} \rho_{\text{fiss}} &= \alpha_{\alpha}^+ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} \frac{(\alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}) - (\alpha_{i_{n-1}}^* + \alpha_{i_n}^*)}{2} \\ &+ \alpha_T^+ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^{N_{1\phi}} \frac{(T_{i_{n-1}}^+ + T_{i_n}^+) - (T_{i_{n-1}}^{+*} + T_{i_n}^{+*})}{2} \\ &+ \alpha_{T_{\text{fuel}}}^+ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (T_{\text{fuel}_i}^+ - T_{\text{fuel}_i}^{+*}) + \alpha_{T_{\text{mod}}}^+ (T_{\text{mod}_i}^+ - T_{\text{mod}_i}^{+*}) \end{aligned} \quad (8.17)$$

8.2. Canales iguales

Consideremos el caso en el que todos los canales son idénticos, es decir, tanto las potencias relativas q_i^+ como los coeficientes de pérdidas concentradas k_i son iguales para todos los canales. En particular, tomamos un reactor de $M = 250$ canales paralelos, cada uno disipando 5 MW y con los parámetros indicados en la tabla 8.1. Esto arroja la distribución de temperaturas de estado estacionario indicada en la figura 8.4 para $N_{1\phi} = 10$. Las condiciones fluidodinámicas

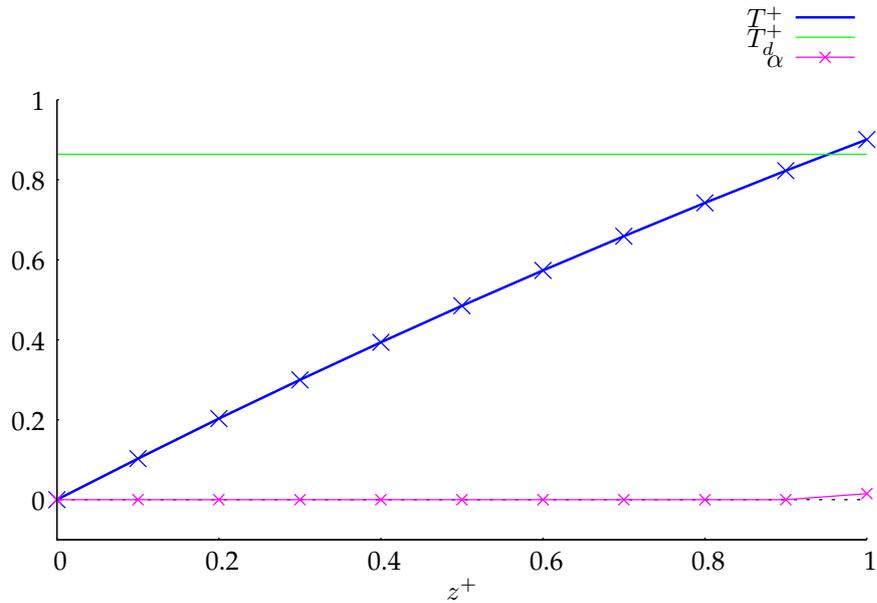


Figura 8.4: Distribución de temperaturas y de fracción de vacío de estado estacionario para $M = 250$

son tales que el caudal de estado estacionario es ligeramente mayor que el necesario para que no haya cambio de fase. Es por ello que existe una pequeña fracción de vacío en el último nodo de cada canal.

En los transitorios estudiados, suponemos que existe algún sistema de control que hace que el reactor esté crítico para tiempos negativos independientemente de la distribución de temperaturas y de las fracciones de vacío de estado estacionario. Sin embargo, una vez aplicada la perturbación, analizamos el comportamiento sin la intervención ulterior de las barras de control.

q_{\max}^*	5 MW	k_p	100	T_{mod}^*	205 °C
A	$5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$	A_p^+	250	κ_{mod}	$1 \cdot 10^{-3}$
L	5 m	k_i	50	\dot{m}_{mod}^+	1
D	$1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	Δp_{\max}^+	200	Nu_{fuel}	100
T_{sat}	320 °C	\dot{m}_{\max}^+	2500	κ_{fuel}	$3 \cdot 10^{-3}$
T_P	260 °C	V_{mod}^+	3750	γ_{fuel}	1,85
Λ	8	$T_{\text{mod,in}}$	200 °C	\aleph_{fuel}	0,6

Tabla 8.1: Parámetros para un reactor de 250 canales idénticos

Si bien el problema fluidodinámico está desacoplado del problema termodinámico, los tiempos característicos del primero influyen en el segundo ya que las modificaciones en el caudal inciden en la distribución de temperatu-

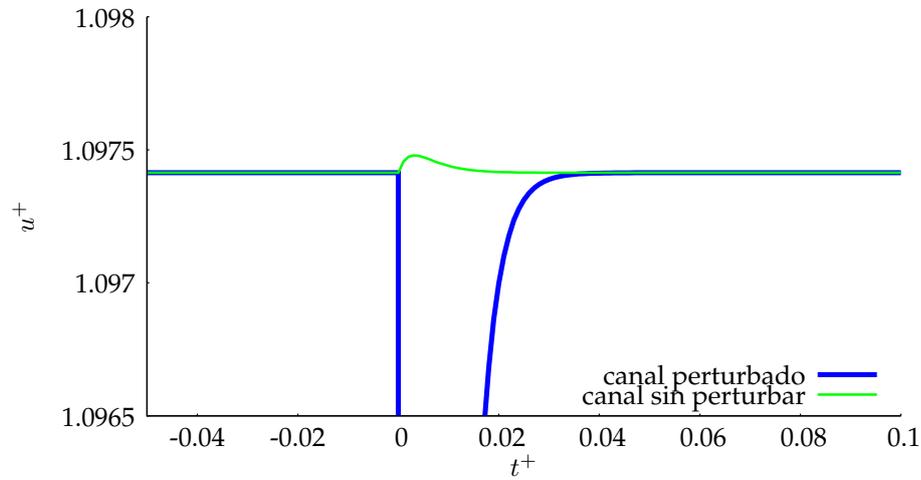


Figura 8.5: Influencia de la perturbación de la velocidad de un canal en los demás

ras del refrigerante, que su vez inducen cambios en la potencia neutrónica. Como ya dijimos, debido a la curva característica de la bomba 8.2, cualquier perturbación en los caudales es automáticamente estabilizada. En la figura 8.5 mostramos la evolución temporal de la velocidad en un canal que perturbamos en $t^+ = 0$ y la influencia en las velocidades del resto de los canales, que son todas iguales. Dado que tenemos 250 canales, una gran perturbación apenas si modifica la velocidad del resto. De la misma manera, la fracción de vacío permanecerá esencialmente constante en el resto de los canales y el efecto de una perturbación en un canal individual sobre la potencia será menor mientras más canales haya.

Efectivamente, en la figura 8.6 mostramos la evolución temporal de la potencia con los coeficientes de realimentación

$$\begin{aligned}
 \alpha_{T_{\text{fuel}}} &= -1 \text{pcm} \cdot \text{K}^{-1} \\
 \alpha_{T_{\text{mod}}} &= -30 \text{pcm} \cdot \text{K}^{-1} \\
 \alpha_v &= +50 \text{pcm} \cdot \%^{-1} \\
 \alpha_{T_{\text{cool}}} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8.18}$$

para una perturbación ($u_i^+ = 0,9u_i^{+*}$ a $t^+ = 0$) en un canal individual por un lado y en todos los canales al mismo tiempo por otro. Está claro que los efectos de la inestabilidad debido al coeficiente de vacío positivo se hacen visibles más rápidamente al cambiar el caudal en forma global ya que de esta manera estamos introduciendo instantáneamente una mayor cantidad de vacío, que corresponde a una reactividad positiva mayor.

Según vemos en la figura 8.6 y en la figura 8.7 donde mostramos un caso

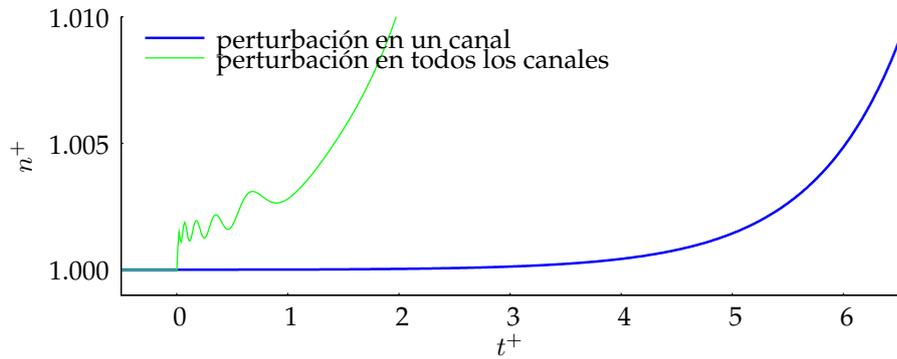


Figura 8.6: Evolución temporal en un caso inestable para una perturbación del 10% en el caudal de un solo canal y en el de todos los canales, para $\alpha_v = +50 \text{ pcm} \cdot \%^{-1}$

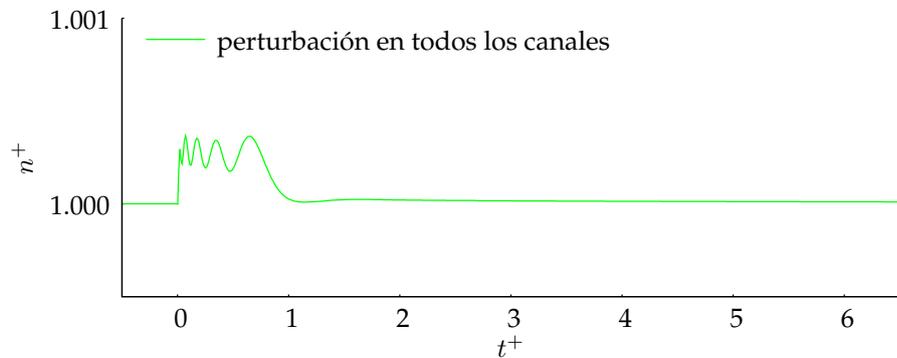


Figura 8.7: Evolución temporal en un caso estable para una perturbación del 10% en el caudal de un solo canal y en el de todos los canales, para $\alpha_v = +10 \text{ pcm} \cdot \%^{-1}$

estable, el efecto de una perturbación en el caudal hace que la potencia neutróica tenga un corto transitorio y luego o bien comience a aumentar exponencialmente o bien vuelva a la potencia de estado estacionario correspondiente a $n^+ = 1$. Con esto en mente, en la figura 8.8 construimos un mapa de estabilidad tal como hicimos en el capítulo 5. En este caso calculamos la población neutróica que resulta en un tiempo $t^+ = 5$, al disminuir instantáneamente en un 5% el caudal provisto por la bomba para todos los canales por igual en $t^+ = 0$.

El mapa de estabilidad de la figura 8.8 fue contruido manteniendo todos los parámetros de la tabla 8.1 y los coeficientes de temperatura (8.18). Al tomar una la potencia por canal constante, los puntos que están en diferentes abscisas corresponden a diferentes potencias totales. Por otro lado, en todos los casos utilizamos la misma curva característica para la bomba y hemos mantenido constante el área A_p^+ , resultando en el hecho de que para $M = 220$ la temperatura de salida es $T^{+*} = 0,83$, que es menor que la temperatura de detach

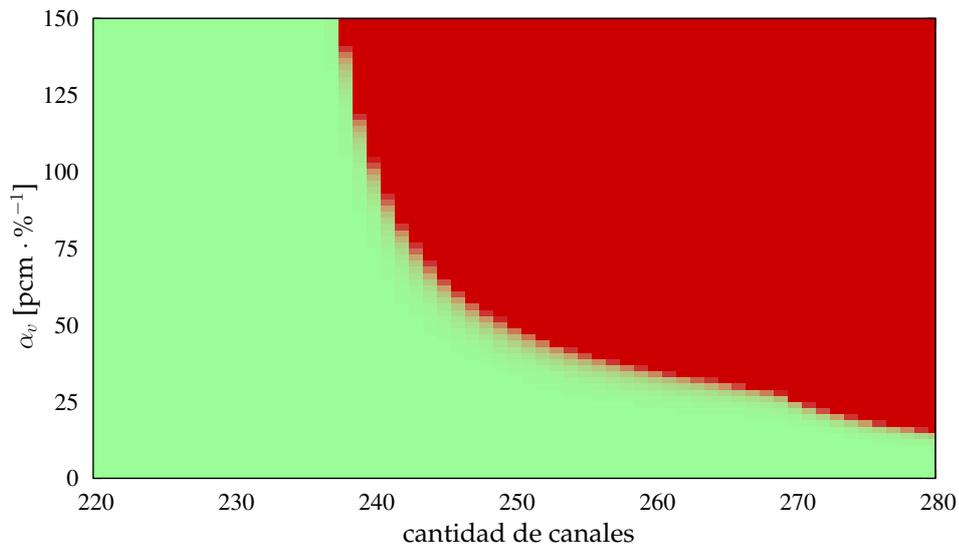


Figura 8.8: Mapa de estabilidad para canales idénticos, variando la cantidad de canales y el coeficiente de vacío, manteniendo la potencia por canal constante y el resto de los parámetros fijos.

dada por la correlación (8.12) por lo que en ningún momento aparece vacío y la estabilidad no depende de α_v . Para el caso de 280 canales las condiciones fluidodinámicas son tales que la temperatura adimensional de salida es de estado estacionario $T^{+*} = 0,97$, lo que está justo en el límite de la validez de la suposición de que el flujo se mantiene subenfriado en todo momento. Si el punto estudiado es inestable, un ligero aumento de la potencia hace que el modelo deje de valer.

8.3. Canales diferentes

Debido a la distribución radial de potencia que existe en un reactor de potencia, los canales que se encuentran en la periferia disipan menos potencia que los centrales. Para lograr que el refrigerante llegue al plenum superior aproximadamente con la misma temperatura en todos los canales, se agrega pérdida de carga *ad hoc* para que la velocidad sea menor. A continuación estudiamos cómo varía la estabilidad al utilizar canales diferentes con respecto al caso estudiado en la sección anterior con canales idénticos.

8.3.1. Potencia homogénea

Consideremos primero el caso en el que la potencia es la misma en todos los canales pero éstos presentan una pérdida de carga diferente. Si suponemos que

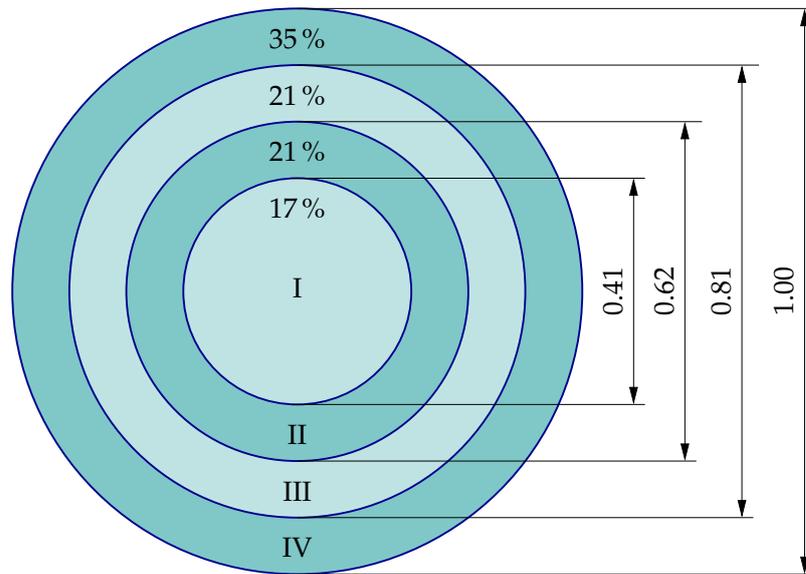


Figura 8.9: División en cuatro grupos de los M canales.

los canales están arreglados de forma tal de formar un círculo de radio unidad, dividimos a los M canales en cuatro grupos según indicamos en la figura 8.9. Los radios de corte elegidos —cuya explicación damos en la sección 8.3.2— hacen que la cantidad de canales que corresponde a cada grupo sean los porcentajes de M mostrados en la figura. Asignamos a los canales de cada grupo los siguientes coeficientes de pérdidas locales

$$k_I = 55$$

$$k_{II} = 50$$

$$k_{III} = 45$$

$$k_{IV} = 40$$

resultando en los perfiles de temperaturas de estado estacionario mostrados en la figura 8.10 para $M = 250$.

Con las pérdidas de cargas elegidas, los canales centrales tienen una mayor fracción de vacío de estado estacionario que el resto. Esto hace que al disminuir la cantidad de canales, aunque los tres grupos de la periferia estén completamente subenfriados, todavía haya una pequeña fracción de vacío en los canales centrales y la estabilidad del reactor dependa del coeficiente α_v para M menores que en el caso de canales idénticos, como vemos en la figura 8.11.

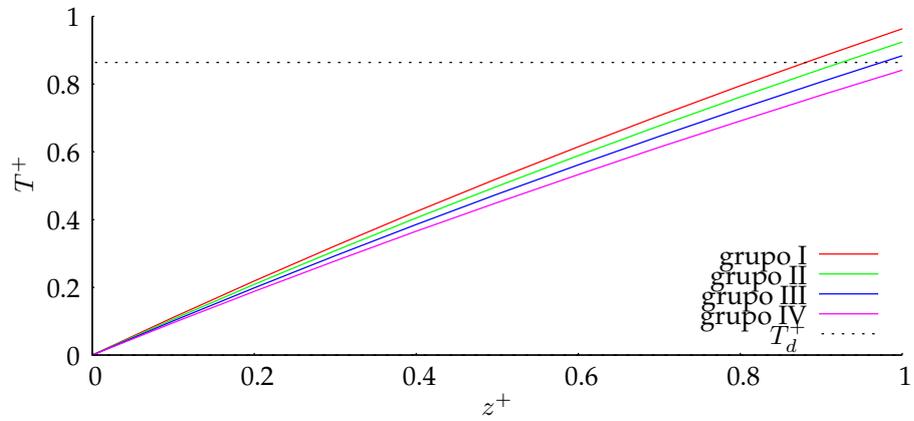


Figura 8.10: Perfiles de temperaturas en cada uno de los canales correspondientes a los grupos de la figura 8.9 para el caso de potencia homogénea y $M = 250$.

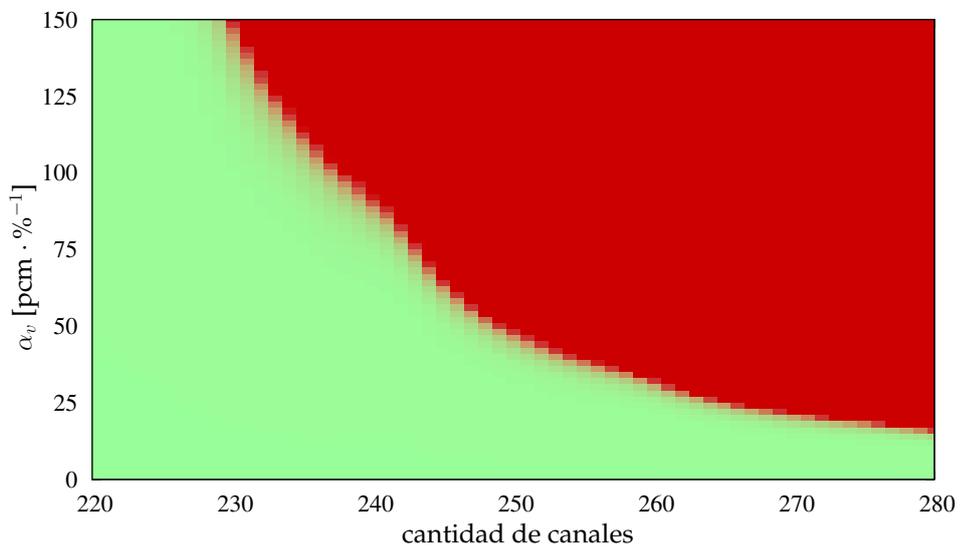


Figura 8.11: Mapa de estabilidad para canales con diferente pérdida de carga pero potencia homogénea.

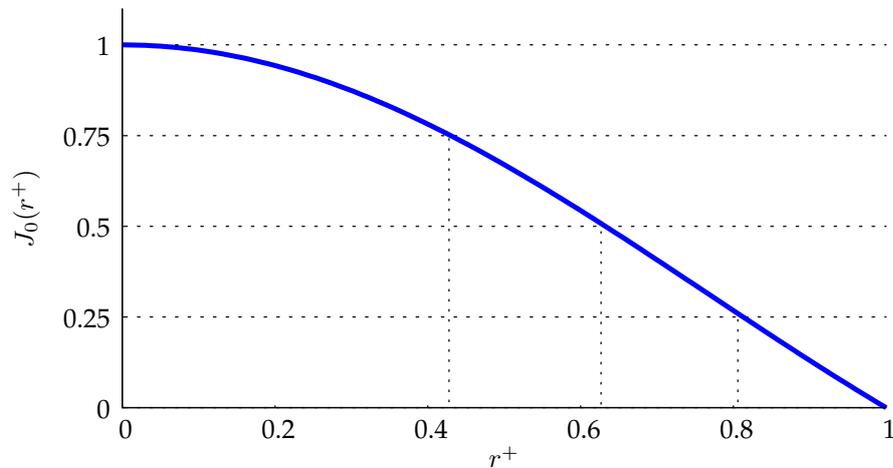


Figura 8.12: Los radios de división en grupos de la figura 8.9 son tales que la función de Bessel de orden cero vale 0.75, 0.5, 0.25 y 0 respectivamente.

8.3.2. Distribución radial de potencia

La física de reactores predice que un reactor homogéneo cilíndrico tiene un flujo neutrónico cuya distribución radial es una función de Bessel tipo J de orden cero que se anula en la superficie exterior. En la figura 8.12 graficamos la función $J_0(r^+)$ y dividimos el intervalo $[0, 1]$ de las ordenadas en cuatro subintervalos iguales. Los radios a los que corresponden estos cuatro niveles de potencia son aproximadamente los radios de corte elegidos en la figura 8.9, que en cantidad de canales —es decir en área— representan las fracciones mostradas.

Asignamos entonces a cada grupo las potencias relativas adimensionales

$$\begin{aligned}
 q_I^+ &= 1,00 \\
 q_{II}^+ &= 0,75 \\
 q_{III}^+ &= 0,50 \\
 q_{IV}^+ &= 0,25
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la fracción del total de canales que representa cada grupo y las potencias relativas involucradas, la potencia dispada en el canal más caliente debe ser

$$q_{\max}^* = 9,1 \text{ MW}$$

para que la potencia total sea la misma que en los casos anteriores con 250 canales.

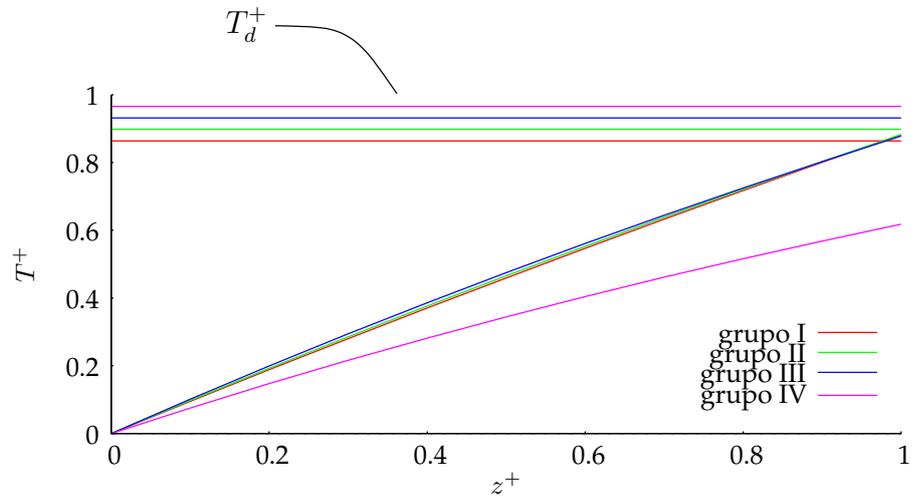


Figura 8.13: Perfiles de temperaturas de estado estacionario en cada uno de los canales correspondientes a los grupos de la figura 8.9 para el caso de una distribución radial de potencia y $M = 250$.

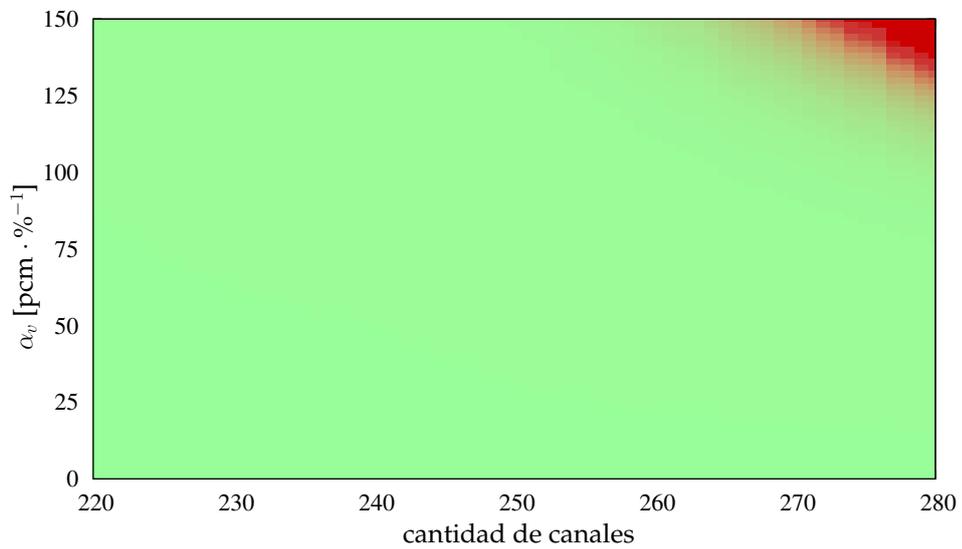


Figura 8.14: Mapa de estabilidad para canales con diferente pérdida de carga y una distribución radial de potencia.

Para obtener perfiles de temperaturas similares en todos los grupos, fijamos los coeficientes de pérdida de carga como

$$k_I^+ = 120$$

$$k_{II}^+ = 220$$

$$k_{III}^+ = 500$$

$$k_{IV}^+ = 1000$$

lo que da como resultado las distribuciones de temperaturas mostradas en la figura 8.13. A pesar de asignar una pérdida de carga extremadamente grande en los canales periféricos, la temperatura es menor que en el resto. De todas maneras, los perfiles prácticamente coinciden en los grupos centrales y coinciden aproximadamente a su vez con los casos anteriores. Sin embargo, debido a que la temperatura de detach es mayor para potencias menores, sólo el grupo central presenta ebullición subenfriada en el estado estacionario.

El mapa de estabilidad en el plano M vs. α_v para los mismos intervalos que en los casos anteriores es el que mostramos en la figura 8.14. Como la distribución de temperaturas de estado estacionario de los grupos II, III y IV es tal que no se alcanza la temperatura de detach, entonces una pequeña perturbación en el caudal hace que si eventualmente aparece ebullición subenfriada en estos canales, la fracción de vacío inducida es mucho menor que en los casos con potencia constante. Dado que la temperatura del combustible y del moderador aumentan aproximadamente de la misma manera que antes ya que éstas no dependen de las condiciones de detach, el reactor tiende a volver a la potencia de diseño en un rango mayor del espacio de parámetros, y sólo se encuentran comportamientos inestables en una pequeña zona que implica un coeficiente de vacío α_v excesivamente grandes comparado con los valores normalmente encontrados en reactores de canales paralelos.

Conclusiones

El todo es más que la suma de las partes.
Aristóteles, siglo III a. C.

Hoy en día, la disponibilidad de recursos computacionales —en particular de una capacidad de almacenamiento de información en una memoria de alta velocidad de acceso— hace que actualmente sea posible ejecutar algoritmos que no eran factibles hace algunos años. Es por eso que la implementación de un método de análisis de estabilidad basado en el cómputo de la dimensión fractal de una órbita en un espacio de las fases tridimensional no presenta mayores inconvenientes. Además, al utilizar un algoritmo basado en el cálculo de distancias asistido por cajas arregladas en un vector multidimensional logramos reducir sensiblemente el tiempo de cómputo de la dimensión, lo que permite barrer sistemáticamente un subespacio del espacio de parámetros de un sistema dinámico y construir mapas de estabilidad capaces de distinguir no sólo casos estables de inestables sino también diferenciar entre ciclos límites y comportamientos caóticos no periódicos. De todas maneras, a pesar de la potencia de cálculo y la capacidad de memoria a la que podemos acceder actualmente, no es posible lograr una estimación numérica satisfactoria de la dimensión de cajas, tal como sucedía hace veinticinco años atrás (Greenside et al., 1982).

De esta manera hemos podido caracterizar el sistema de Lorenz, identificando además de una bifurcación subcrítica, zonas de caos y zonas de periodicidad (figuras 3.12 y 3.13). Mostramos que aplicando ciertas aproximaciones es posible escribir las ecuaciones de conservación de un loop toroidal de convección natural como un caso particular del sistema de Lorenz. Sin embargo, el análisis de la dimensión fractal de las órbitas embebidas en un espacio de dimensión tres que resultan a partir de la integración numéricas de las ecuaciones en derivadas parciales originales arrojan ciclos límites que no son predichos por el sistema de Lorenz (figura 4.7). Aún así, a partir de esta formulación

fue posible diseñar un controlador difuso capaz de lograr un caudal de circulación estable aún utilizando una aproximación de primer orden del vector de estado (figura 4.14).

En el capítulo 5 estudiamos las ecuaciones de cinética puntual desde el punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos y analizamos su estabilidad tanto utilizando técnicas de control lineal como ideas de estabilidad no lineal. Mostramos que, sin efectos de realimentación, el sistema posee un subespacio completo del espacio de las fases de puntos fijos que resultan ser inestables BIBO pero estables Lyapunov. Estudiamos la influencia relativa entre el coeficiente de realimentación por temperatura del combustible y del refrigerante en un reactor de investigación (figura 5.6), y cómo cambian los mapas de estabilidad con el orden de magnitud del caudal de refrigeración y de las inercias térmicas del combustible y del refrigerante (figuras 5.7 y 5.8).

Analizamos el problema de un canal en ebullición utilizando el modelo homogéneo, tanto en el estado estacionario como en los transitorios. Construimos mapas de estabilidad en función del número de subenfriamiento y el de cambio de fase e identificamos las zonas donde se producen inestabilidades de Ledinegg y por ondas de densidad, comparando nuestros resultados con otros métodos de análisis de estabilidad (figura 6.9). Encontramos que efectivamente este sistema puede presentar ciclos límites estables. Estudiamos el problema de dos canales paralelos iguales y obtuvimos oscilaciones en fase, en contrafase y con una fase arbitraria (figuras 6.11–6.14). Concluimos el estudio de inestabilidades termohidráulicas analizando el acople de un riser adiabático al canal, desarrollando para ello un modelo basado en retrasos no constantes. Si bien el comportamiento encontrado en este caso fue más complejo que los anteriores, no hemos encontrado casos de caos sostenido en el tiempo.

En el capítulo 7 desarrollamos un sistema dinámico que describe el comportamiento aproximado de un reactor nuclear integrado de convección natural, cuya estabilidad estudiamos con el método de análisis de la dimensión fractal. Identificamos que los parámetros que más influyen en la estabilidad del sistema son el coeficiente de reactividad por vacío y las pérdidas de carga en la zona de dos fases. Construimos un mapa de estabilidad en el plano α vs. k_e para una geometría fija (figura 7.15) y estudiamos la influencia de la potencia y de la longitud del riser, y cómo cambian estos resultados con el coeficiente de vacío y k_e (figuras 7.16 y 7.17). Encontramos que si bien existen algunas oscilaciones, la zona del espacio de las fases donde éstas ocurren en tiempos grandes es muy pequeña.

Finalmente, propusimos un modelo para estudiar la influencia de la ebullición subenfriada en un reactor de canales paralelos verticales. Dado que en este caso no encontramos oscilaciones, estudiamos la estabilidad del sistema dinámico propuesto calculando la potencia en un tiempo fijo luego de la per-

turbación. Construimos mapas de estabilidad en función del coeficiente de vacío y de la cantidad de canales involucrados, tanto para canales iguales (figura 8.8) como diferentes para el caso de potencia uniforme (figura 8.11) y con una distribución radial de potencia (figura 8.14).

En la mayoría de los mapas de estabilidad construidos, los límites de estabilidad presentan geometrías que bastante complejas, lo que pone de manifiesto la complejidad y la no linealidad de los sistemas involucrados. Si bien es posible linealizar las ecuaciones y aplicar técnicas estándar de análisis de estabilidad lineal para estudiar sistemas complejos, en este trabajo mostramos que es posible caracterizar completamente la estabilidad de sistemas dinámicos —en particular del problema acoplado termohidráulico-neutrónico— desde el dominio temporal sin perder las características propias de la dinámica no lineal.

9.1. Trabajos futuros

Han quedado abiertas algunas cuestiones que sería interesante estudiar en trabajos futuros. Como discutimos en la introducción, un observador humano podría diferenciar un comportamiento oscilatorio de uno caótico. Con esta idea en mente, una propuesta para el estudio de estabilidad de sistemas no lineales es analizar series temporales con redes neuronales entrenadas para reconocer diferentes comportamientos.

Si bien el sistema de Lorenz tiene una ruta al caos a través de una bifurcación de Hopf subcrítica, el loop toroidal no parece seguir esta misma ruta. Sería interesante realizar un estudio de una posible cascada de bifurcaciones de período, tanto sea teórica como experimentalmente. Además, el sistema estudiado en el capítulo 4 provee un entorno especialmente útil para poner a prueba el método de análisis de estabilidad, ya que de todos los modelos estudiados en este trabajo, el loop toroidal es el más sencillo de implementar experimentalmente. Sería interesante observar el comportamiento de un loop real y comprobar que para valores de σ mayores —que podrían obtenerse cambiando la geometría o el fluido de trabajo— las inestabilidades aparecen para potencias mayores y validar así la topología de estabilidad predicha por el método propuesto.

En este trabajo estudiamos básicamente la respuesta intrínseca de modelos de reactores nucleares sin la intervención de los sistemas de control. Si bien es deseable que un reactor sea intrínsecamente estable, a veces interesa estudiar lo que sucede cuando actúan los sistemas de control para saber si éstos son capaces de manejar situaciones que en otras condiciones serían inestables. Estos casos resultan más complejos aún y agregan muchas dimensiones tanto al espacio de fases dentro del cual puede moverse el vector de estado como al

espacio de parámetros cuya influencia en la estabilidad queremos estudiar, pero su estudio es importante para comprender la fenomenología que gobierna la dinámica de un reactor con un lazo de control. En particular, un problema interesante sería agregarle al modelo de parámetros concentrados del capítulo 5 un sistema de control, por ejemplo a través de una barra que inserta una reactividad conocida en función de su posición.

Una de las características más importantes de los reactores integrados es la autopresurización, efecto que no hemos tenido en cuenta en el desarrollo del modelo. Sería interesante reformular el problema para modelar esta característica y estudiar su influencia sobre la estabilidad. De la misma manera, las condiciones usualmente encontradas en este tipo de reactores hace que la validez del modelo homogéneo en equilibrio termodinámico sea altamente cuestionable ya que en el riser las velocidades involucradas son pequeñas y además las fases no están en equilibrio, debido principalmente a la variación de la presión con la altura. La utilización de un modelo de drift-flux y la aplicación de una corrección por altura hidrostática podría acercar el modelo a la realidad.

Concluimos el trabajo notando que en esta tesis realizamos básicamente el trabajo futuro más importante que dejamos abierto en el Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear (Theler, 2007): estudiar los problemas de inestabilidades termofluidodinámicas asociadas a la convección natural en geometrías reales de reactores nucleares.

Derivación del estado estacionario de un boiling channel

As far as the laws of mathematics refer to reality,
they are not certain,
and as far as they are certain,
they do not refer to reality.
Albert Einstein

En este apéndice mostramos la adimensionalización propuesta para el problema de un canal en ebullición introducido por primera vez en el capítulo 6 y resolvemos los perfiles de entalpía, densidad, velocidad de estado estacionario. Durante el desarrollo introducimos los números adimensionales que caracterizan completamente el problema, mostramos la relación que existe entre el número de cambio de fase y el número de Euler e ilustramos cómo obtener uno a partir de otro en forma gráfica.

A.1. El problema

El problema a resolver consiste en encontrar los perfiles de entalpía, velocidad y densidad estacionarios en un canal vertical calefaccionado por un flujo de calor uniforme sujeto a una diferencia de presión constante, según ilustramos en la figura A.1. El fluido ingresa al canal subenfriado —en condiciones de entalpía constante— por la parte inferior y el seno del fluido alcanza la condición de saturación en alguna posición axial λ dentro del canal. Si bien en principio, tanto la frontera de ebullición como las velocidades de entrada y de salida pueden depender del tiempo, el objetivo de este apéndice es calcular la solución estacionaria sin prestar atención a la estabilidad de la misma. En la tabla A.1 listamos la nomenclatura de las variables utilizadas en el desarrollo que sigue.

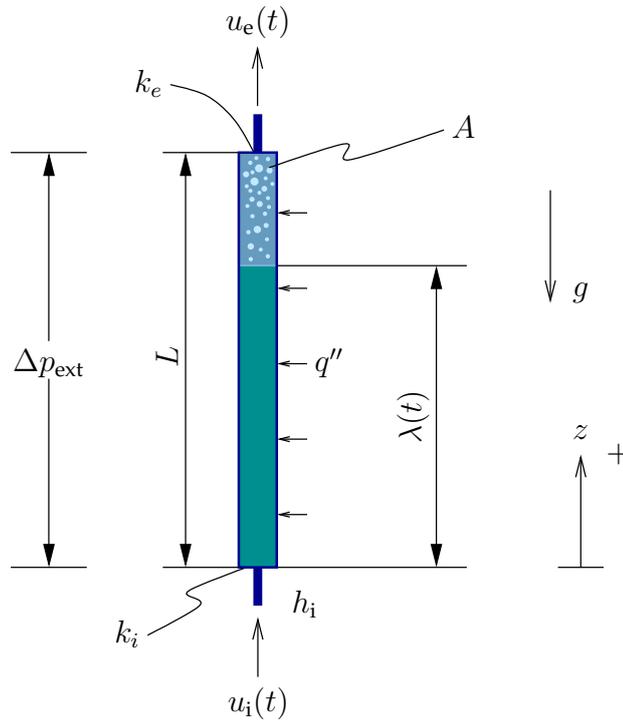


Figura A.1: Boiling channel vertical uniformemente calentado sujeto a una diferencia de presión externa fija. Tanto la velocidad de entrada del fluido como la posición de la frontera de ebullición en principio pueden depender del tiempo.

Variables		Subíndices	
t	tiempo	ref	referencia
z	coordenada axial	ext	externo
ρ	densidad	0	estacionario
u	velocidad	H	hidráulico
h	entalpía	f	líquido saturado
q	potencia total	g	vapor saturado
q''	flujo de calor	fg	diferencia vapor-líquido
A	área transversal del canal	i	entrada
L	longitud del canal	e	salida
D	diámetro hidráulico	Supraíndices	
λ	frontera de ebullición	+	adimensional
p	presión		
f	coeficiente de fricción de Darcy		
k	coeficiente de pérdidas puntuales		
g	aceleración de la gravedad		
δ	distribución delta de Dirac		

Tabla A.1: Descripción de las variables del problema

A.2. Solución

La solución que proponemos, basada en el modelo homogéneo, asume que valen las siguientes suposiciones:

- flujo unidimensional
- equilibrio termodinámico entre las dos fases (ebullición subenfriada despreciable)
- presión externa constante ($\Delta p_{\text{ext}} \ll p \Rightarrow h_{fg}, v_{fg}$, etc. constantes)
- entalpía de entrada constante
- flujo de calor axialmente uniforme y constante en el tiempo
- energía potencial y cinética despreciables frente a los cambios de entalpías que sufre el fluido

Bajo estas condiciones, las ecuaciones de conservación de masa, energía y momento lineal son respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u h) = \frac{q}{AL} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u^2) = - \left(\frac{1}{2} \frac{f}{D_H} + \sum k_j \delta(z - z_j) \right) \rho u^2 - \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

Además, el modelo homogéneo con equilibrio termodinámico entre las fases (HEM) propone como ecuación de estado para el pseudo-fluido homogéneo

$$\rho = \begin{cases} \rho_f & \text{si } h < h_f \\ \frac{1}{v_l + \frac{v_{fg}}{h_{fg}}(h - h_f)} & \text{si } h > h_f \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.2.1. Adimensionalización

Adimensionalizamos las variables del problema dividiendo cada una de ellas por valores de referencia

$$\begin{aligned} t^+ &= \frac{t}{t_{\text{ref}}} \\ z^+ &= \frac{z}{z_{\text{ref}}} \\ \rho^+ &= \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}} \\ u^+ &= \frac{u}{u_{\text{ref}}} \\ h^+ &= \frac{(h - h_f)}{h_{\text{ref}}} \\ p^+ &= \frac{p}{p_{\text{ref}}} \end{aligned}$$

definiendo

$$\begin{aligned} t_{\text{ref}} &= \nu = \frac{\rho_f AL}{q} (h_f - h_i) \\ z_{\text{ref}} &= L \\ \rho_{\text{ref}} &= \rho_f \\ u_{\text{ref}} &= \frac{L}{\nu} = \frac{q}{\rho_f A (h_f - h_i)} \\ h_{\text{ref}} &= \frac{q}{\rho_f A u_0} \\ p_{\text{ref}} &= \rho_f u_{\text{ref}}^2 \end{aligned}$$

El tiempo de referencia es el denominado *tiempo de residencia* —denotado en la literatura con el símbolo ν — que es el tiempo que le toma a una partícula de líquido subenfriado que entra al canal llegar a las condiciones de saturación (Lahey y Moody, 1977). El hecho de definir la velocidad de referencia como el cociente entre L y ν implica que u_{ref} es la velocidad de entrada que hace que el fluido alcance el estado de saturación exactamente al final de la longitud del canal. La velocidad u_0 que aparece en la entalpía de referencia —que en general es diferente a la velocidad de referencia— es la velocidad de entrada al canal del estado estacionario del problema, es decir, la velocidad de entrada que satisface la ecuación de conservación de momento. De esta manera, al ser h_{ref} el cociente entre la potencia total y el flujo másico del estado estacionario, es el salto de entalpía que sufre el fluido entre los extremos del canal en el estado estacionario.

Dividiendo la ecuación de estado (A.4) del modelo homogéneo en equilibrio termodinámico por la densidad del fluido obtenemos la ecuación de estado adimensional. Prestando atención al caso de saturación, tenemos

$$\rho^+ = \left[1 + \frac{\rho_f v_{fg}}{h_{fg}} h_{\text{ref}} h^+ \right]^{-1}$$

Definimos ahora el número de cambio de fase como

$$N_{\text{pch}} = \frac{h_{\text{ref}} v_{fg}}{h_{fg} v_f} = \frac{q}{\rho_f A u_0} \frac{v_{fg}}{h_{fg} v_f} \quad (\text{A.5})$$

con lo que podemos escribir

$$\rho^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } h^+ < 0 \\ \frac{1}{1 + N_{\text{pch}} h^+} & \text{si } h^+ > 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Reescribiendo la ecuación de conservación de masa (A.1) en función de las variables adimensionales y de las cantidades de referencia, teniendo en cuenta la regla del producto para las derivadas parciales y notando que $t_{\text{ref}} = L/u_{\text{ref}}$ obtenemos la ecuación de continuidad adimensional

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{t_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+) + \frac{\rho_f u_{\text{ref}}}{L} \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+) + \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Análogamente, en la ecuación de energía (A.2) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f h_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+ h^+) + \frac{\rho_f h_{\text{ref}} u_{\text{ref}}}{L} \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+ h^+) &= \frac{q}{AL} \\ \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+ h^+) + \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+ h^+) &= \frac{q}{\rho_f A u_{\text{ref}} h_{\text{ref}}} \\ \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+ h^+) + \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+ h^+) &= \frac{u_0}{u_{\text{ref}}} \end{aligned}$$

Es útil introducir el número de subenfriamiento

$$N_{\text{sub}} = \frac{h_f - h_i}{h_{fg}} \cdot \frac{v_{fg}}{v_f} \quad (\text{A.8})$$

proporcional al subenfriamiento del fluido a la entrada del canal. Teniendo en cuenta la definición de la velocidad de referencia, el cociente entre el número de subenfriamiento y el número de cambio de fase es

$$\frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} = \frac{(h_f - h_i) v_{fg}}{h_{fg} v_f} \cdot \frac{\rho_f A u_0 h_{fg} v_f}{q v_{fg}} = \frac{u_0}{u_{\text{ref}}} \quad (\text{A.9})$$

con lo que podemos escribir la ecuación adimensional de energía como

$$\frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+ h^+) + \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^+ h^+) = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, la ecuación de flujo de momento lineal adimensional es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^+ u^+) + \frac{\partial}{\partial z^+} (\rho^+ u^{+2}) = & - \left(\Lambda + \frac{1}{2} \sum k_j \delta(z^+ - z_j^+) \right) \rho^+ u^{+2} \\ & - \frac{\rho^+}{\text{Fr}} - \frac{\partial p_{\text{ext}}^+}{\partial z^+} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde hemos introducido el número de fricción distribuida

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{fL}{D_H}$$

siendo f el factor de fricción de Darcy —que depende del número de Reynolds y de la rugosidad de la pared del canal según el diagrama de Moody— y el número de Froude

$$\text{Fr} = \frac{u_{\text{ref}}^2}{gL}$$

En ciertas ocasiones es conveniente trabajar con la ecuación de momento integrada a lo largo de la longitud del canal

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^+} \left[\int_0^1 \rho^+ u^+ dz^+ \right] + (\rho_e^+ u_e^{+2} - \rho_i^+ u_i^{+2}) = \\ -\Lambda \int_0^1 \rho^+ u^{+2} dz^+ + \sum_j k_j \rho^+ u^{+2} - \frac{1}{\text{Fr}} \int_0^1 \rho^+ dz^+ + \text{Eu} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde el número de Euler

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p_{\text{ext}}}{\rho_f u_{\text{ref}}^2}$$

proviene de integrar el gradiente de presión externo. Resumimos las ecuaciones adimensionalizadas de conservación (A.7), (A.10) y (A.12), la ecuación de estado (A.6) y los números adimensionales que caracterizan el problema en la tabla A.2.

Ecuaciones adimensionales

$$\frac{\partial}{\partial t^+}(\rho^+) + \frac{\partial}{\partial z^+}(\rho^+ u^+) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t^+}(\rho^+ h^+) + \frac{\partial}{\partial z^+}(\rho^+ u^+ h^+) = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^+} \left[\int_0^1 \rho^+ u^+ dz^+ \right] + (\rho_e^+ u_e^{+2} - \rho_i^+ u_i^{+2}) = \\ -\Lambda \int_0^1 \rho^+ u^{+2} dz^+ - \sum_j k_j \rho^+ u^{+2} - \frac{1}{\text{Fr}} \int_0^1 \rho^+ dz^+ + \text{Eu} \end{aligned}$$

$$\rho^+ = \begin{cases} 1 & \text{para } h^+ < 0 \\ [1 + N_{\text{pch}} h^+]^{-1} & \text{para } h^+ > 0 \end{cases}$$

Números adimensionales

$$N_{\text{pch}} = \frac{q}{\rho_f A u_0} \frac{v_{fg}}{h_{fg} v_f} \quad \text{Número de cambio de fase}$$

$$N_{\text{sub}} = \frac{h_f - h_i}{h_{fg}} \frac{v_{fg}}{v_f} \quad \text{Número de subenfriamiento}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{fL}{D_H} \quad \text{Número de fricción distribuida}$$

$$\text{Fr} = \frac{u_{\text{ref}}^2}{gL} \quad \text{Número de Froude}$$

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p_{\text{ext}}}{\rho_f u_{\text{ref}}^2} \quad \text{Número de Euler}$$

Tabla A.2: Formulación adimensional del problema del canal de ebullición vertical

A.2.2. Estado estacionario

En el estado estacionario todas las derivadas con respecto al tiempo se anulan. La zona de una fase se extiende desde $z^+ = 0$ hasta $z^+ = \lambda^+$ que definimos como la coordenada axial —adimensional— donde el fluido alcanza las condiciones de saturación. En esta zona

$$\begin{aligned}\rho^+ &= 1 \\ u^+ &= u_0^+\end{aligned}$$

El valor de estado estacionario de la velocidad de entrada es por definición el cociente entre la velocidad de estado estacionario u_0 y la velocidad de referencia u_{ref} . Debido a la ecuación (A.9) resulta

$$u_0^+ = \frac{u_0}{u_{\text{ref}}} = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}}$$

entonces la ecuación de energía queda

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^+} (u_0^+ h^+) &= \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \\ \frac{\partial h^+}{\partial z^+} &= 1\end{aligned}$$

por lo que, con la condición de contorno $h^+(0) = h_{\text{in}}^+$ el perfil de entalpías en la zona de una fase es

$$h^+(z^+) = h_{\text{in}}^+ + z^+$$

A partir de este perfil podemos calcular el valor estacionario de la posición de la frontera de posición λ^+ haciendo $h^+(\lambda^+) = 0$

$$\lambda^+ = -h_{\text{in}}^+ = \frac{h_f - h_i}{h_{\text{ref}}} = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \quad (\text{A.13})$$

! Para que el fluido llegue a ebullición dentro de la longitud del canal, debe ser $\lambda^+ < 1$ o en forma equivalente $N_{\text{pch}} > N_{\text{sub}}$. El número de subenfriamiento (A.8) depende sólo de las condiciones del fluido a la entrada del canal y queda directamente fijado por las condiciones de presión externa y por la entalpía de entrada. Por otro lado, el número de cambio de fase (A.5) depende de la velocidad de estado estacionario, por lo que su valor depende indirectamente del resto de los parámetros, incluido el propio N_{sub} . Luego, si bien el resultado (A.13) parece sencillo en su formulación, la dificultad de la solución

radica en la determinación de N_{pch} , como quedará claro más adelante en este apéndice.

Prestemos atención ahora a la ecuación de energía en la zona de dos fases, y para mantener la generalidad del resultado que sigue dejemos que la derivada temporal pueda no anularse

$$\frac{\partial}{\partial t^+}(\rho^+ h^+) + \frac{\partial}{\partial z^+}(\rho^+ u^+ h^+) = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \quad (\text{A.10})$$

A partir de la ecuación de estado (A.6) podemos escribir

$$\rho^+ h^+ = \frac{1 - \rho}{N_{\text{pch}}}$$

y reemplazando en la ecuación (A.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^+} \left(\frac{1 - \rho^+}{N_{\text{pch}}} \right) + \frac{\partial}{\partial z^+} \left(\frac{1 - \rho^+}{N_{\text{pch}}} u^+ \right) &= \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \\ -\frac{\partial}{\partial t^+}(\rho^+) + \frac{\partial}{\partial z^+}(u^+ - \rho^+ u^+) &= N_{\text{sub}} \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación de continuidad (A.7), queda

$$\frac{\partial u^+}{\partial z^+} = N_{\text{sub}} \quad (\text{A.14})$$

por lo que el perfil de velocidad en la zona de dos fases es

$$\begin{aligned} u^+(z^+) &= u_0^+ + N_{\text{sub}}(z^+ - \lambda^+) \\ u^+(z^+) &= \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} + N_{\text{sub}} \left(z^+ - \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

! Notar que si bien el perfil de velocidades lineal obtenido es el del estado estacionario, la ecuación (A.14) vale aún en el caso general dependiente del tiempo.

Volviendo una vez más a la ecuación de energía estacionaria en la zona de dos fases,

$$\frac{\partial}{\partial z^+}(\rho^+ u^+ h^+) = \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \quad (\text{A.16})$$

definimos la variable muda

$$\xi^+ = z^+ - \lambda^+ \quad (\text{A.17})$$

para simplificar la notación, y reemplazamos el perfil de velocidades (A.15) y la ecuación de estado (A.6) en (A.16)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi^+} \left[h^+ \frac{\frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} + N_{\text{sub}} \xi^+}{1 + N_{\text{pch}} h^+} \right] &= \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^+} \left[h^+ \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \frac{1 + N_{\text{pch}} \xi^+}{1 + N_{\text{pch}} h^+} \right] &= \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^+} \left[h^+(\xi^+) \frac{1 + N_{\text{pch}} \xi^+}{1 + N_{\text{pch}} h^+(\xi^+)} \right] &= 1\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

La ecuación (A.18) es una ecuación diferencial ordinaria con variable independiente ξ^+ y variable dependiente h^+ , que en principio debería ser integrada para obtener la dependencia de la entalpía con la posición axial. Sin embargo, dado que esta ecuación tiene solución única y notando que si $h^+(\xi^+) = \xi^+$ la igualdad (A.18) se satisface, entonces debe ser necesariamente

$$h^+(\xi^+) = \xi^+$$

con la condición inicial $h^+(\lambda^+) = 0$. Volviendo a la variable z^+ el resultado es un perfil lineal de entalpías adimensionales en todo el canal con pendiente igual a la unidad

$$h^+(z^+) = z^+ - \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}}\quad (\text{A.19})$$

Finalmente, a partir de esta solución podemos calcular el perfil de densidades como

$$\rho^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } z^+ < \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \\ \frac{1}{1 + N_{\text{pch}} \left(z^+ - \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \right)} & \text{si } z^+ > \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}}\end{cases}\quad (\text{A.20})$$

En la figura A.2 mostramos los perfiles de estado estacionario del problema. En principio parecería que está todo resuelto a partir de fijar los números de cambio de fase y de subenfriamiento. Sin embargo, N_{pch} depende de la velocidad u_0 de estado estacionario, que hasta el momento apareció sólo tautológicamente en función de estos números adimensionales. Para cerrar el problema y darle sentido a los perfiles de la figura A.2 en función de las variables que definen el problema (figura A.1) debemos resolver la ecuación de momento para poner el número de cambio de fase en función de los números de Euler y de Froude, del número de fricción Λ y de los coeficientes de pérdidas puntuales k .

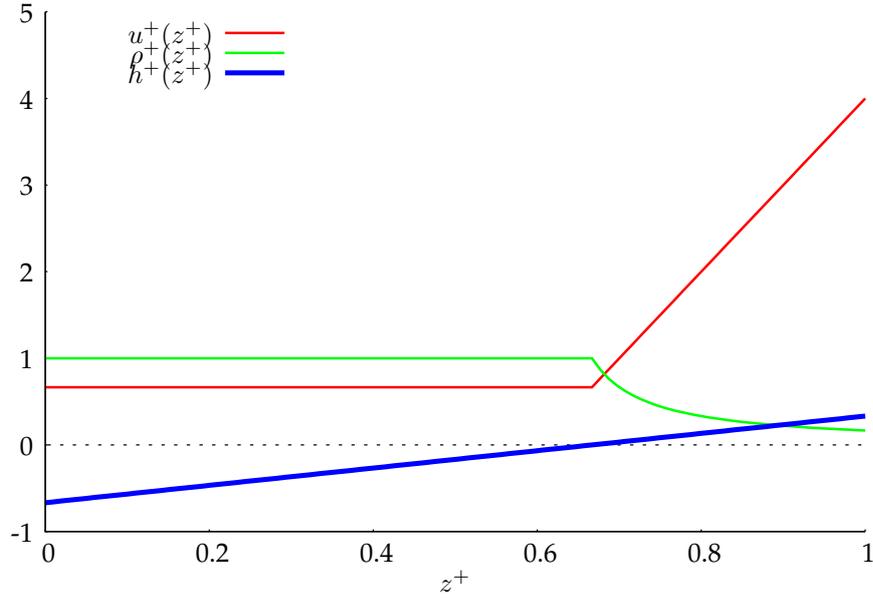


Figura A.2: Perfiles de velocidad, densidad y entalpía para $N_{\text{pch}} = 15$ y $N_{\text{sub}} = 10$ en el estado estacionario.

Para ello, utilizamos los perfiles adimensionales de la figura A.2 en la ecuación de momento integrada (A.12)

$$\begin{aligned}
 \rho_e^+ u_e^{+2} - \rho_i^+ u_i^{+2} &= -\Lambda \int_0^1 \rho^+ u^{+2} dz^+ \\
 &\quad + \sum_j k_j \rho^+ u^{+2} - \frac{1}{\text{Fr}} \int_0^1 \rho^+ dz^+ + \text{Eu} \\
 \frac{[u_0^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]^2}{1 + N_{\text{pch}}(1 - \lambda^+)} - u_0^{+2} &= -\Lambda \int_0^{\lambda^+} u_0^{+2} dz^+ \\
 &\quad - \Lambda \int_{\lambda^+}^1 \frac{[u_0^+ + N_{\text{sub}}(z^+ - \lambda^+)]^2}{1 + N_{\text{pch}}(z^+ - \lambda^+)} dz^+ \\
 &\quad - k_i u_0^{+2} - k_e \frac{[u_0^+ + N_{\text{sub}}(1 - \lambda^+)]^2}{1 + N_{\text{pch}}(1 - \lambda^+)} \\
 &\quad - \frac{1}{\text{Fr}} \left[\int_0^{\lambda^+} dz^+ + \int_{\lambda^+}^1 \frac{dz^+}{1 + N_{\text{pch}}(z^+ - \lambda)} \right] \\
 &\quad + \text{Eu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{N_{\text{sub}}^2}{N_{\text{pch}}^2} (N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}}) &= -\Lambda \frac{N_{\text{sub}}^3}{N_{\text{pch}}^3} - \Lambda \frac{N_{\text{sub}}^2}{N_{\text{pch}}^2} \left(1 - \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} + \frac{1}{2} N_{\text{pch}} \right. \\
&\quad \left. - N_{\text{sub}} + \frac{1}{2} \frac{N_{\text{sub}}^2}{N_{\text{pch}}} \right) \\
&\quad - k_i \frac{N_{\text{sub}}^2}{N_{\text{pch}}^2} - k_e \frac{N_{\text{sub}}^2}{N_{\text{pch}}^2} \left(1 + N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{\text{Fr}} \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} \left[1 + \frac{\ln(1 + N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}})}{N_{\text{sub}}} \right] \\
&\quad + \text{Eu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}} (N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}}) &= -\Lambda N_{\text{sub}}^3 - \Lambda N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}} \left(1 - \frac{N_{\text{sub}}}{N_{\text{pch}}} + \frac{1}{2} N_{\text{pch}} \right. \\
&\quad \left. - N_{\text{sub}} + \frac{1}{2} \frac{N_{\text{sub}}^2}{N_{\text{pch}}} \right) \\
&\quad - k_i N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}} - k_e N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}} \left(1 + N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}} \right) \\
&\quad - \frac{N_{\text{sub}} N_{\text{pch}}^2}{\text{Fr}} \left[1 + \frac{\ln(1 + N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}})}{N_{\text{sub}}} \right] \\
&\quad + \text{Eu} N_{\text{pch}}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}}^2 - N_{\text{sub}}^3 N_{\text{pch}} &= -\Lambda \left(N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}} + \frac{1}{2} N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}}^2 - N_{\text{sub}}^3 N_{\text{pch}} + \frac{1}{2} N_{\text{sub}}^4 \right) \\
&\quad - k_i N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}} - k_e \left(N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}} + N_{\text{sub}}^2 N_{\text{pch}}^2 - N_{\text{sub}}^3 N_{\text{pch}} \right) \\
&\quad - \frac{N_{\text{sub}} N_{\text{pch}}^2}{\text{Fr}} \left[1 + \frac{\ln(1 + N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}})}{N_{\text{sub}}} \right] + \text{Eu} N_{\text{pch}}^3
\end{aligned}$$

Podemos poner esta expresión como una relación implícita entre el número de cambio de fase N_{pch} y el resto de los parámetros

$$\begin{aligned}
&N_{\text{pch}}^3 (-\text{Eu}) + N_{\text{pch}}^2 \left(N_{\text{sub}}^2 + \frac{1}{2} \Lambda N_{\text{sub}}^2 + k_e N_{\text{sub}}^2 \right) \\
&+ N_{\text{pch}} \left(-N_{\text{sub}}^3 + \Lambda N_{\text{sub}}^2 - \Lambda N_{\text{sub}}^3 + k_i N_{\text{sub}}^2 + k_e N_{\text{sub}}^2 - k_e N_{\text{sub}}^3 \right) \\
&+ N_{\text{pch}}^2 \frac{N_{\text{sub}}}{\text{Fr}} \left[1 + \frac{\ln(1 + N_{\text{pch}} - N_{\text{sub}})}{N_{\text{sub}}} \right] + \frac{1}{2} \Lambda N_{\text{sub}}^4 = 0 \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

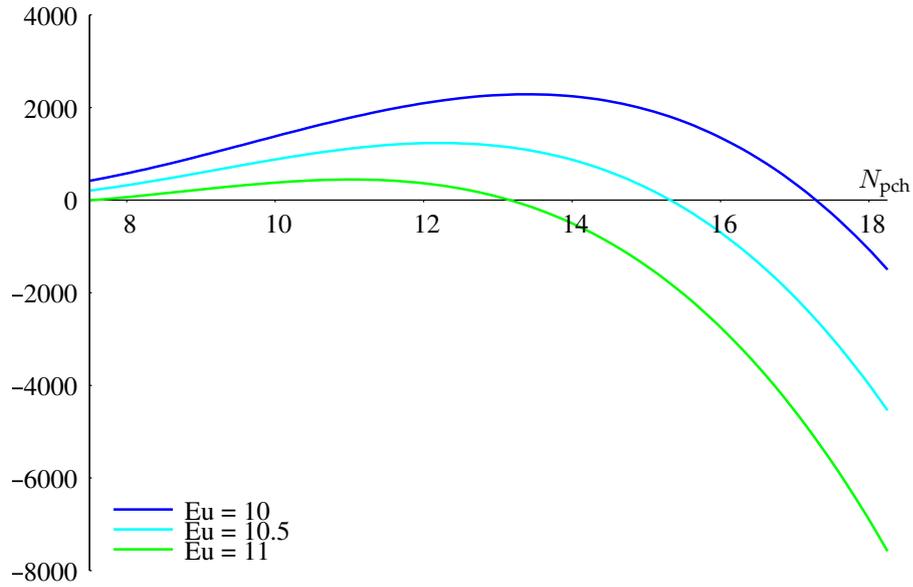


Figura A.3: Miembro izquierdo de la ecuación (A.21) en función del número de subenfriamiento para tres valores del número de Euler con $Fr = 5$, $\Lambda = 3$, $k_i = 6$, $k_e = 2$ y $N_{sub} = 8$.

de donde es posible calcular el número de cambio de fase N_{pch} como función de Eu , Fr , Λ , k_i , k_e y N_{sub} . En la figura A.3 graficamos el miembro izquierdo de esta relación implícita. Notar que para que valga la solución desarrollada sólo tienen sentido los cruces por cero que dan $N_{pch} > N_{sub}$, ya que de otra forma el fluido se mantendría en una fase a lo largo de todo el canal y no valdría la forma en que hemos evaluado la pérdida de carga puntual a la salida del canal. Por otro lado, debemos corroborar que la entalpía a la salida sea menor que la entalpía de vapor saturado h_v , ya que nuevamente deja de valer la ecuación de estado propuesta por el modelo homogéneo.

! En este desarrollo hemos supuesto que el número de fricción Λ es el mismo para la zona de simple fase y para la zona de dos fases. Si las condiciones de fricción distribuida fuesen diferentes en los dos tramos y asignamos los números $\Lambda_{1\phi}$ y $\Lambda_{2\phi}$ respectivamente, entonces debemos sumar el término $N_{sub}^3 (\Lambda_{2\phi} - \Lambda_{1\phi})$ al miembro izquierdo de la ecuación (A.21).

El software MELON

Be thankful you are not my student.
You would not get a high grade for such a design :-)
Andrew Tanenbaum to Linus Torvalds, comp.os.minux, 1992.

En el Proyecto Integrador que precede a esta Tesis de Maestría (Theler, 2007) comenzamos el desarrollo de un software de control basado en lógica difusa. Durante este trabajo continuamos el desarrollo mejorando las características de I/O y agregando soporte para hardware de adquisición genérico a través de la biblioteca COMEDI. En este apéndice describimos el estado actual del software y comentamos brevemente algunos aspectos de su utilización e implementación. Una descripción completa de la sintaxis de los códigos fuzzy y del protocolo de red utilizado junto con ejemplos de aplicación puede encontrarse en el manual que acompaña la distribución del software, que puede descargarse de

<http://ib.cnea.gov.ar/~thelerg/melon>.

B.1. Controladores basados en lógica difusa

El software MELON fue originalmente diseñado para trabajar con lógica difusa, teniendo una estructura interna como la ilustrada en la figura B.1. Estos controladores se basan en reglas lingüísticas de causa y efecto, y a partir de un vector de entrada real operan matemáticamente teniendo en cuenta esta base de conocimiento para obtener una acción de control satisfactoria. La matemática involucrada detrás de la lógica difusa y la forma de operar con conceptos lingüísticos puede encontrarse en los capítulos 2 y 3 del Proyecto Integrador.

Existen también otro tipo de controladores difusos que puede implementar el software, que son los denominados controladores de Takagi y Sugeno (Theler, 2007, capítulo 6), y que es el tipo de control que realizamos sobre el problema del capítulo 4 en este trabajo. Por otro lado, actualmente el programa

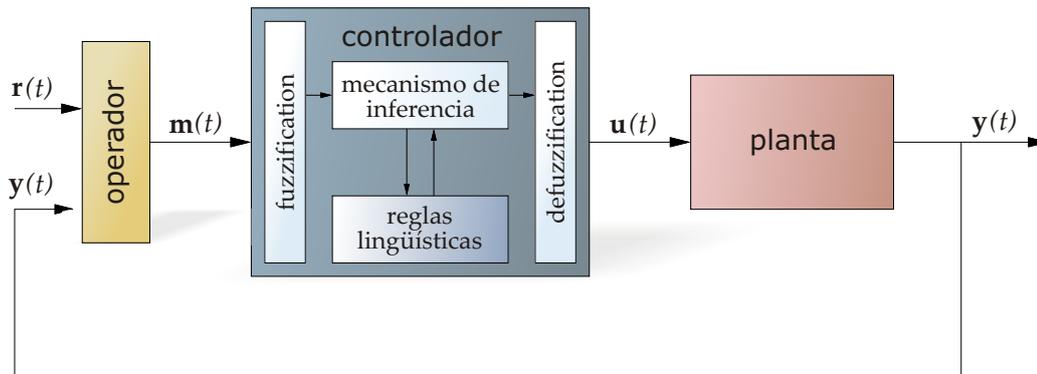


Figura B.1: Estructura interna de un controlador lingüístico difuso

capaz de implementar un control PID tradicional o incluso ser utilizado sólo como software de adquisición de datos, por lo que los detalles de cómo se calcula la acción de control a partir del vector de estado no son relevantes para este trabajo sino que lo que interesa describir son las capacidades de I/O y los casos de aplicabilidad del software.

B.2. Esquema de I/O

El programa lee un archivo de texto —que denominamos *fuzzy code* por razones históricas, pero que no necesariamente implica un controlador de lógica difusa— que contiene palabras clave que definen las variables que intervienen en el proceso de control, cómo se relacionan entre sí e información sobre donde leer el vector de estado y donde escribir la acción de control. Si el control es difuso, también deben proveerse los conjuntos difusos asociados a las variables y las reglas lingüísticas o de Takagi-Sugeno que forman la base de conocimiento.

En la figura B.2 esquematizamos los posibles mecanismos de entrada/salida que pueden ser utilizados con MELON. El programa es capaz de controlar una planta real a través de hardware de adquisición y control, o intercambiar información con otros procesos tanto locales como remotos en tiempo real o en modo offline. A través de recursos de memoria compartida o incluso archivos regulares, el software puede controlar una simulación numérica de una planta o alimentar con información un programa de graficación online. Si la tarea llevada a cabo es de tal naturaleza que resulta necesario distribuir la capacidad de procesamiento en varias computadoras, la información puede ser intercambiada a través de una red bien sea utilizando recursos de NFS o directamente mediante conexiones TCP dedicadas. Es posible recorrer el diagrama de la figura B.2 siguiendo las flechas en cualquier sentido, por ejemplo obteniendo

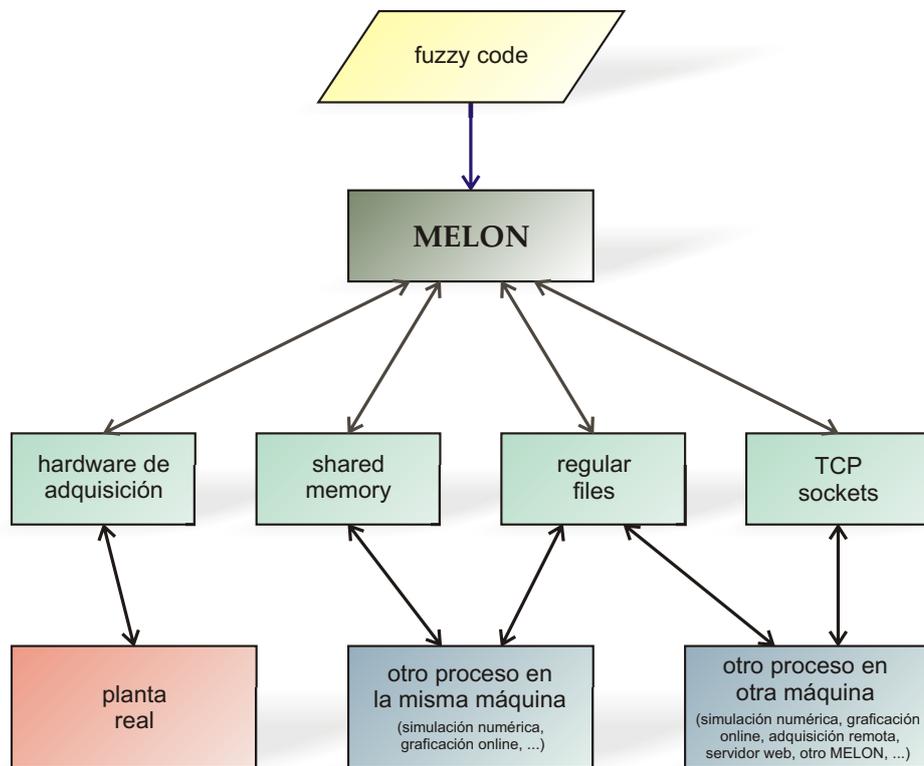


Figura B.2: Esquema de I/O del software

información de una planta con placa de adquisición, enviándola a través de un recurso de red a una máquina remota corriendo otra instancia de MELON, que a su vez le pasa la información por memoria compartida a un proceso de graficación en tiempo real.

El código fuzzy debe definir las variables y vectores que va a utilizar. Las variables pueden ser reales o booleanas, y su valor instantáneo puede provenir de algún recurso de entrada o ser calculado a partir del resto de las variables tanto a través de una operación difusa como algebraica. Incluso pueden definirse relaciones integrales y diferenciales. Por ejemplo

```

VAR x
VAR setpoint
VAR error ALGEBRA x - setpoint
VAR error_int INTEGRAL error
VAR error_dif DERIVATIVE error
VAR control

```

El observable x puede provenir por ejemplo de una simulación numérica y estar disponible en una zona de recurso compartido, y el setpoint está definido como el contenido de un archivo de texto ASCII. La variable control será calculada a partir de la definición de conjuntos difusos y reglas lingüísticas del estilo

```
IF error_int IS positivo THEN control IS negativo
```

y escrita en otro recursos de memoria compartida para que la simulación numérica pueda llevar a cabo su trabajo

```
READ x SHARED_MEMORY POSIX estado  
READ setpoint FILE ASCII setpoint  
WRITE control SHARED_MEMORY POSIX control
```

Para recibir valores de variables a través de recursos de red, es posible poner a escuchar al programa en un puerto TCP determinado

```
TCP_LISTEN 3560
```

en el cual es posible escribir los valores instantáneos de las variables de entrada con un protocolo de texto plano. Por ejemplo, para definir que la variable x vale 1.25 se debe enviar la cadena

```
x=1.25
```

Como el socket es bidireccional, es posible preguntar por el mismo medio el resultado de la acción de control enviando

```
control?
```

resultando en una respuesta por parte de MELON

```
control=5.256034e-01
```

Para enviar el contenido de una variable sin necesidad de ser interrogado, se debe definir un servidor y asignar un WRITE de tipo TCP

```
TCP_WRITE otromelon 192.168.0.6 3290 5  
WRITE x TCP otromelon
```

donde el último argumento de la primer línea es un tiempo de retry en segundos, en caso de que el servidor 192.168.0.6 no esté aceptando conexiones en el puerto 3290. Este servidor puede ser bien un proceso independiente o bien otra instancia de MELON corriendo un código fuzzy con un `TCP_LISTEN 3290`.

Además de funcionar online, el software es capaz de sincronizarse con procesos de simulación numérica a través de semáforos, del file system o mediante conexiones de red. En este caso, el sistema trabaja a la máxima velocidad posible asegurando que en cada paso de integración MELON le provea al proceso de simulación numérica —que puede estar corriendo en la misma computadora o en otra— una acción de control adecuada.

B.3. Implementación

El software fue programado en el sistema operativo Linux, y si bien en un principio la idea era poder portarlo a sistemas Windows, el programa fue adquiriendo algunas características propias de sistemas Unix que han hecho que la migración sea difícil. De todas maneras, el protocolo de red utilizado para intercambiar información está basado en texto ASCII puro por lo que no hay restricciones sobre el tipo de sistema operativo que puede estar conectado en el otro extremo de los sockets TCP.

Mostramos en la figura B.3 un diagrama de flujo simplificado que representa la implementación del controlador MELON. Luego de procesar la línea de comandos, el programa lee el fuzzy code. Si el controlador implica la utilización de sockets, se lanzan threads que mantienen abiertas las conexiones de red y atienden a los clientes (sección B.3.2) y luego el programa entra en el bucle principal. Si el fuzzy code provee un mecanismo de sincronización (sección B.3.1), entonces el software se queda esperando hasta que el vector de estado esté disponible, y se procede a leer todos los recursos definidos como entradas. Inmediatamente después se calcula la acción de control correspondiente y se escriben los resultados donde corresponda. Si el control es en tiempo real, el proceso se pone a dormir durante un tiempo que depende de la frecuencia de muestreo elegida y del tiempo de procesamiento requerido para realizar las lecturas y la acción de control. Por otro lado, si el programa está funcionando en modo offline se lanza el mecanismo de sincronización correspondiente de forma tal de avisarle al proceso asociado que la acción de control está disponible para ser leída. En modo online, es posible dar un tiempo de ejecución tanto desde el código fuzzy como desde la línea de comando, mientras que en modo offline es posible asignarle un timeout al mecanismo de sincronización de forma tal de que si ningún proceso provee un vector de estado luego de un tiempo finito el software MELON. En cualquier caso, el programa puede ser interrumpido, liberando todos los recursos y cerrando las conexiones

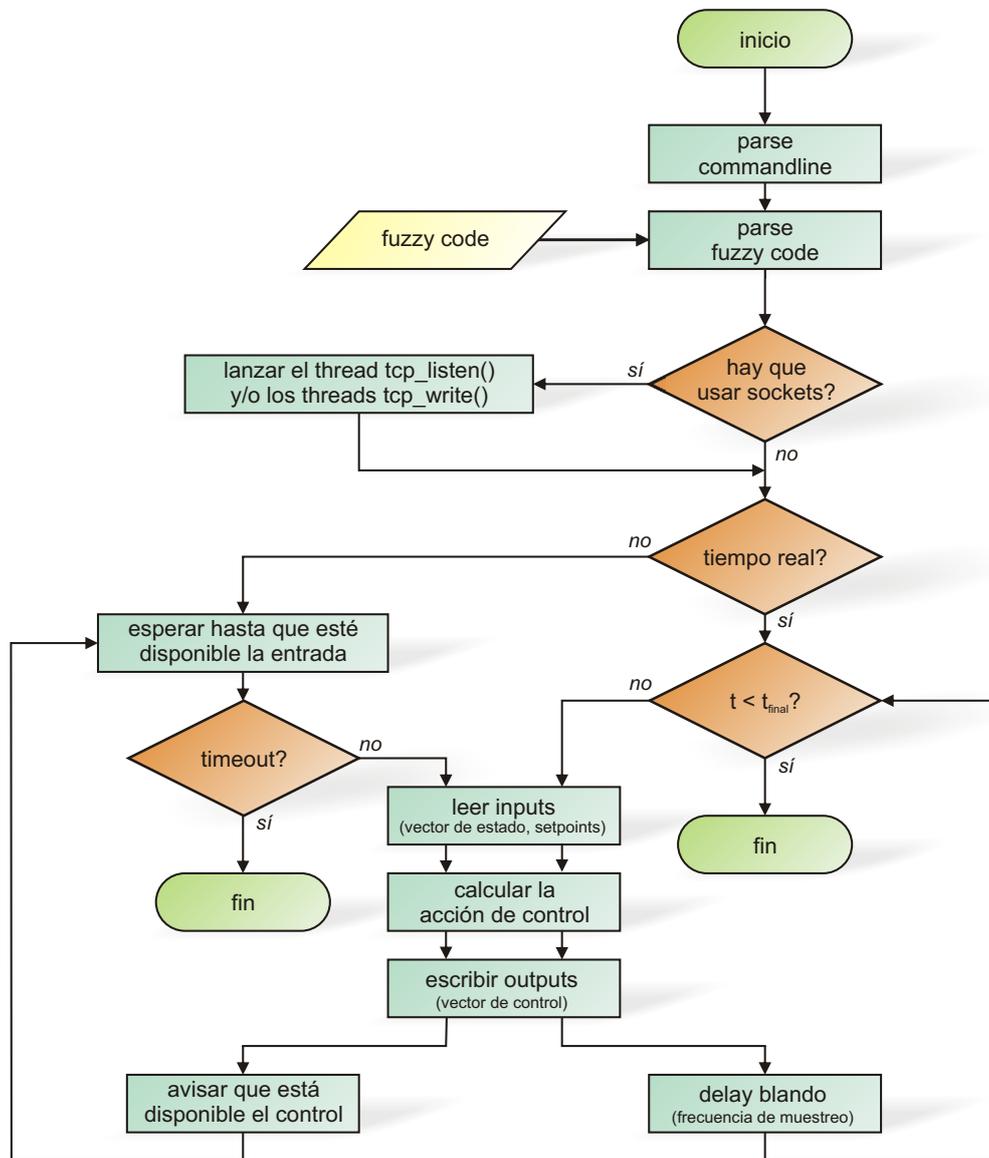


Figura B.3: Diagrama de flujo simplificado de la implementación del controlador

de red correctamente, a través del envío de una señal SIGTERM o SIGINT (o equivalentemente un Ctrl-C desde la consola de donde fue llamado).

B.3.1. Mecanismos de sincronización

Para hacer que el software funcione en modo offline debe utilizarse la palabra clave SYNC. La línea

```
SYNC SEMAPHORE sync TIMEOUT 5
```

hace que se creen —si es que no existen— dos semáforos POSIX llamados `/sync-state` y `/sync-control` inicializados en cero. Cuando el vector de estado esté disponible para ser leído, el proceso de simulación debe hacer un `sem_post()` sobre el primer semáforo y ponerse a esperar con `sem_wait()` sobre el segundo antes de leer la acción de control. Si transcurren cinco segundos y no se prende el semáforo de estado, MELON termina.

La sincronización a través de sockets

```
SYNC SOCKET 1234
```

pone al software a escuchar conexiones en el puerto TCP 1234. El loop principal comienza cuando un cliente se conecta y envía un byte señalando que el vector de estado está disponible. Por su parte, MELON envía un byte por el mismo socket cuando es posible leer la acción de control. El proceso finaliza cuando el cliente cierra el socket.

Finalmente, la sincronización mediante archivos debe utilizarse sólo cuando no sea posible implementar ninguno de los dos mecanismos de sincronización anteriores

```
SYNC FILE sync TIMEOUT 5
```

En este caso, el proceso de simulación debe crear un archivo de mudo llamado `sync-state` cuando el vector de estado esté disponible. MELON lo borrará y creará uno llamado `sync-control` cuando termine de calcular la acción de control. Si transcurre el timeout especificado y no aparece el archivo mudo el bucle termina.

! La espera por el archivo de estado se hace en forma activa consumiendo fuertemente recursos del sistema, a diferencia de las esperas anteriores que se hacen mediante operaciones bloqueantes.

Si no se provee un mecanismo de sincronización, el programa funciona en tiempo real y necesita que se defina una frecuencia de muestreo

```
SAMPLING FREQUENCY 10
```

En modo offline la frecuencia es opcional, pero si se utilizan variables tipo integral o derivada, es obligatoria ya que en su cálculo interviene el período entre muestreos.

B.3.2. Esquema multi-threading

Las conexiones de red se implementan mediante threads independientes del proceso principal. Si es necesario atender conexiones entrantes, se lanza un thread que se pone a escuchar en el puerto determinado por TCP_LISTEN. Cuando un cliente se conecta, se lanza otro thread que se dedica a atender cliente (figura B.4) aceptando valores de variables o vectores y respondiendo a las consultas terminadas en el signo ? con el valor instantáneo de la variable o vector pedido. Cuando el cliente cierra la conexión, el thread termina.

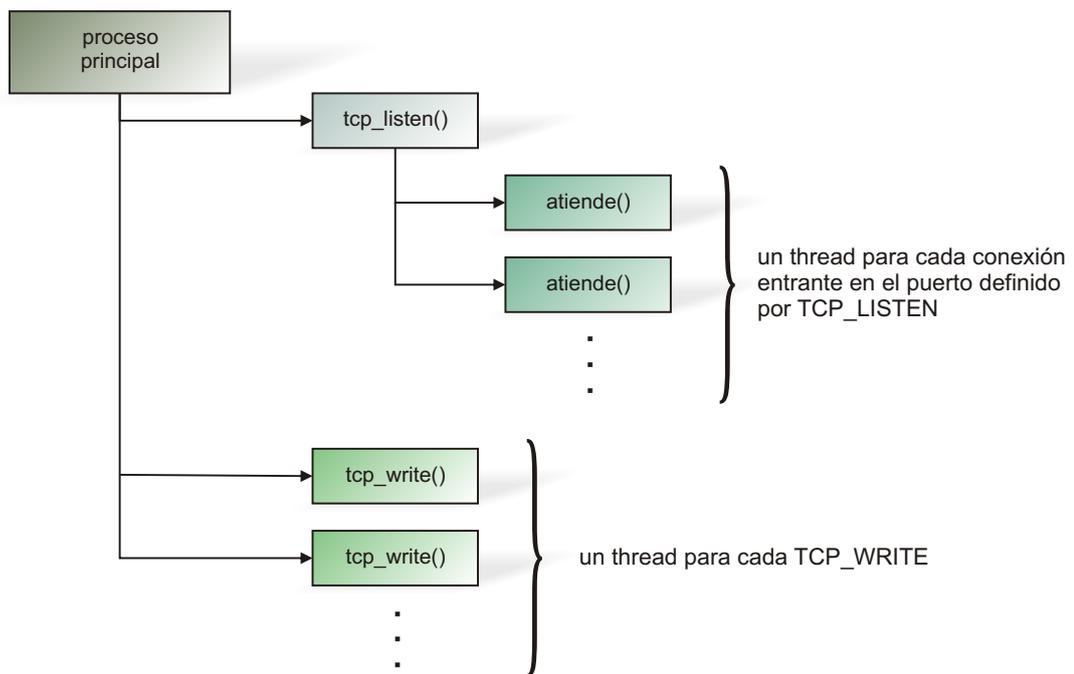


Figura B.4: Esquema de threads para atender las conexiones TCP tanto entrantes como salientes

Por otro lado, para cada keyword TCP_WRITE definida se lanza un thread que intenta conectarse al servidor en el puerto dado. Si la conexión es rehusada, el thread se pone a dormir por el timeout especificado e intenta conectarse nuevamente. Una vez lograda la conexión se duerme otra vez, despertándose a intervalos regulares para verificar que la conexión continúe abierta. En caso de que el servidor la haya cerrado, intenta conectarse otra vez y vuelve a dormirse.

B.4. Ejemplos de códigos fuzzy

Para ilustrar la utilidad del software MELON mostramos a continuación dos ejemplos de aplicación. El primero consiste en la implementación de un controlador difuso para estabilizar un sistema caótico, mientras que el segundo implica un sistema de adquisición de datos accesible en forma remota a través de recursos de red.

B.4.1. Controlador difuso por shared memory

El código fuzzy que sigue controla una simulación numérica —en tiempo real ya que el proceso incluye una interfaz gráfica que muestra la evolución temporal y la posición instantánea del sistema— de la rueda caótica de Lorenz (Theler, 2007, capítulo 4).

```

SAMPLING FREQUENCY 10

VAR position
VAR speed          DERIVATIVE position
VAR acceleration DERIVATIVE speed
VAR flow          REAL GET_INIT GAIN      5e-4

LIMIT flow RATE ABSOLUTE 5e-4

READ position SHARED_MEMORY POSIX wheel-theta
WRITE flow SHARED_MEMORY POSIX wheel-control

FUZZY_SET neg_big      speed LINEAR_SATURATED_LEFT -1.5 1.5
FUZZY_SET neg_small   speed TRIANGULAR -0.5 0.5
FUZZY_SET zero        speed TRIANGULAR 0 1
FUZZY_SET pos_very_small speed TRIANGULAR 1 1
FUZZY_SET pos_small   speed TRIANGULAR 2.5 1
FUZZY_SET ok          speed TRIANGULAR 3.5 1
FUZZY_SET pos_big     speed LINEAR_SATURATED_RIGHT 4.5 1

FUZZY_SET negative acceleration LINEAR_SATURATED_LEFT -2 2
FUZZY_SET zero        acceleration TRIANGULAR 0 2

```

FUZZY_SET positive acceleration **LINEAR_SATURATED_RIGHT** 2 2

FUZZY_SET tiny flow **TRIANGULAR** 0.1 0.2

FUZZY_SET small flow **TRIANGULAR** 0.35 0.2

FUZZY_SET more_or_less flow **TRIANGULAR** 0.5 0.1

FUZZY_SET ok flow **TRIANGULAR** 0.6 0.1

FUZZY_SET big flow **TRIANGULAR** 0.7 0.1

FUZZY_SET giant flow **TRIANGULAR** 1 0.2

IF speed **IS** neg_big **AND** acceleration **IS** negative **THEN** flow **IS**
tiny

IF speed **IS** neg_big **AND** acceleration **IS** zero **THEN** flow **IS** small

IF speed **IS** neg_big **AND** acceleration **IS** positive **THEN** flow **IS**
more_or_less

IF speed **IS** neg_small **AND** acceleration **IS** negative **THEN** flow
IS small

IF speed **IS** neg_small **AND** acceleration **IS** zero **THEN** flow **IS**
small

IF speed **IS** neg_small **AND** acceleration **IS** positive **THEN** flow
IS tiny

IF speed **IS** zero **AND** acceleration **IS** negative **THEN** flow **IS** tiny

IF speed **IS** zero **AND** acceleration **IS** zero **THEN** flow **IS** small

IF speed **IS** zero **AND** acceleration **IS** positive **THEN** flow **IS** big

IF speed **IS** pos_very_small **AND** acceleration **IS** negative **THEN**
flow **IS** small

IF speed **IS** pos_very_small **AND** acceleration **IS** zero **THEN** flow
IS small

IF speed **IS** pos_very_small **AND** acceleration **IS** positive **THEN**
flow **IS** tiny

IF speed **IS** pos_small **AND** acceleration **IS** negative **THEN** flow
IS more_or_less

IF speed **IS** pos_small **AND** acceleration **IS** zero **THEN** flow **IS** ok

IF speed **IS** pos_small **AND** acceleration **IS** positive **THEN** flow
IS big

IF speed **IS** ok **AND** acceleration **IS** negative **THEN** flow **IS**
more_or_less

IF speed **IS** ok **AND** acceleration **IS** zero **THEN** flow **IS** ok

IF speed **IS** ok **AND** acceleration **IS** positive **THEN** flow **IS** big

IF speed **IS** pos_big **AND** acceleration **IS** negative **THEN** flow **IS** ok

IF speed **IS** pos_big **AND** acceleration **IS** zero **THEN** flow **IS** big

IF speed **IS** pos_big **AND** acceleration **IS** positive **THEN** flow **IS**
giant

B.4.2. Sistema de adquisición remota

Supongamos disponemos de un sistema de adquisición en una computadora dedicada y deseamos enviar los datos hacia otra máquina accesible a través de la red. En la máquina de adquisición corremos MELON con el siguiente código fuzzy

```
SAMPLING PERIOD 0.5

TCP_WRITE otromelon 192.168.0.6 3560 5

VAR temp
READ temp COMEDI /dev/comedi0 0 0 4 -320 +320
WRITE temp TCP otromelon
```

mientras que en el servidor corremos

```
SAMPLING PERIOD 0.25

TCP_LISTEN 3560

VAR temp
WRITE temp SHARED_MEMORY POSIX temp
```

lo que deja disponible en el recurso de memoria compartida /temp el valor instantáneo de una temperatura adquirida en un sistema remoto para que pueda ser graficado en tiempo real.

Drivers de hardware de adquisición para Linux

Do you pine for the days when men were men
and wrote their own device drivers?
*Linus Torvalds, Just for Fun:
The Story of an Accidental Revolutionary, 2001.*

Como parte del diseño de la cadena de adquisición de datos y control de experimentos fluidodinámicos planeados bajo el proyecto PICT-2006:2481, hemos desarrollado drivers para utilizar dos dispositivos de diseño y fabricación nacional en sistema operativo GNU/Linux, ya que el fabricante no provee soporte oficial para sistemas que no tengan una arquitectura tipo Windows. Además de ser completamente gratuito —ni necesitar licencias para utilizar las herramientas de desarrollo— los sistemas basados en el kernel de Linux proveen acceso al código fuente del 100 % de la implementación, por lo que resultan un entorno extremadamente fructífero para realizar desarrollos tecnológicos sin instaurar ninguna clase de dependencia con estándares o protocolos comerciales poco convenientes.

Más aún, es posible correr este sistema operativo en computadoras con escasos recursos computacionales sin inconvenientes, lo que permite asignar recursos computacionales que no serían aptas para aplicaciones tipo desktop a tareas de adquisición de datos y procesar la información en forma remota a través de recursos de red. Por ejemplo, no es posible ejecutar las modernas versiones de los sistemas Windows en arquitecturas tipo Intel 486 mientras que incluso los últimos desarrollos de Linux corren sin inconvenientes en esta plataforma, haciendo posible mediante una topología de computadoras en paralelo realizar trabajos de laboratorio con mínimos recursos de hardware.

Los drivers fueron implementados como módulos para el kernel y actualmente forman parte de la distribución del proyecto abierto COMEDI [1]. Esta

iniciativa es un desarrollo conjunto de programadores de todo el mundo que en forma gratuita y abierta provee por un lado drivers no oficiales para unos cuatrocientos dispositivos de adquisición de datos y por otro un API de alto nivel que unifica el acceso a los diferentes dispositivos a través de una biblioteca de funciones para el lenguaje C.

Los dispositivos de adquisición cuyos drivers implementamos son fabricados por la empresa argentina Microaxial [2]. El primero consiste en una placa ISA que provee un conversor ADC con una resolución de 12 bits y el segundo es un módulo externo que se comunica a través del puerto serie utilizando el protocolo RS-232. Este último driver fue desarrollado tomando como base un módulo de 16 bits adquirido por el Laboratorio de Cavitación y Biotecnología del Centro Atómico Bariloche pero está diseñado para poder manejar toda la familia de módulos externos de Microaxial.

C.1. Placa interna de adquisición ADQ12B

La placa de adquisición ADQ12B es una tarjeta interna ISA que cuenta con un conversor analógico–digital de 12 bits con un fondo de escala seleccionable por software a través de un amplificador de ganancia programable. Aunque todavía es posible comprarla, su fabricación está discontinuada y la empresa recomienda utilizar los módulos externos en nuevos diseños. De todas maneras, las placas internas suelen proveer una mayor velocidad de transferencia de datos que los dispositivos externos y, si bien la ADQ12B no tiene la posibilidad de transferencia por DMA, puede llegar a trabajar a una frecuencia de muestreo del orden de algunos kHz.

El dispositivo dispone de un conector DB-37 a través del cual provee

- 16 canales analógicos de entrada en modo *single-ended* u 8 canales en modo diferencial
- 8 canales digitales de salida
- 5 canales digitales de entrada
- 1 contador de 16 bits con clock interno o externo
- 1 pacer de 32 bits con período seleccionable por software

a través del pinout mostrado en la figura C.1a o C.1b según la disposición sea *single-ended* o diferencial [3]. Esta selección se realiza al momento de instalar la placa, mediante los jumpers JCHA y JCHB (figura C.2a).

La placa también permite seleccionar entre modo unipolar o bipolar. En el primer caso, el conversor utiliza los 12 bits para realizar la conversión analógica digital pero sólo acepta tensiones de entrada positivas mientras que en el

Pin Función		Pin Función	
1	C7+	20	C6+
2	C5+	21	C4+
3	C3+	22	C2+
4	C1+	23	C0+
5	C7-	24	C6-
6	C5-	25	C4-
7	C3-	26	C2-
8	C1-	27	C0-
9	AGND	28	-12V
10	+12V	29	IN4
11	IN3	30	IN1
12	IN2	31	IN0
13	G2	32	OUT2
14	CLK2	33	OUTB7
15	OUTB6	34	OUTB4
16	OUTB5	35	OUTB3
17	OUTB2	36	OUTB1
18	+VREF	37	PDGND
19	+5V		

(a) Single-ended

Pin Función		Pin Función	
1	C15	20	C14
2	C13	21	C12
3	C11	22	C10
4	C9	23	C8
5	C7	24	C6
6	C5	25	C4
7	C3	26	C2
8	C1	27	C0
9	AGND	28	-12V
10	+12V	29	IN4
11	IN3	30	IN1
12	IN2	31	IN0
13	G2	32	OUT2
14	CLK2	33	OUTB7
15	OUTB6	34	OUTB4
16	OUTB5	35	OUTB3
17	OUTB2	36	OUTB1
18	+VREF	37	PDGND
19	+5V		

(b) Diferencial

Figura C.1: Pin-out del conector DB37 de la placa ADQ12B [2]

segundo, utiliza un bit para fijar el signo de la señal por lo que sólo quedan 11 bits de resolución disponibles.

La comunicación entre el CPU y la placa se realiza mediante 16 puertos físicos. Por defecto, la placa viene configurada para trabajar en el rango de direcciones 0x300–0x310. Si estos puertos no están disponibles, debe seleccionarse otro rango de direcciones de trabajo. La posición del jumper JADR (figura C.2c) configura la dirección base del rango de trabajo.

C.1.1. Módulo adq12b

Para utilizar la placa ADQ12B con la biblioteca COMEDI, es necesario cargar el módulo `adq12b` y luego configurarlo. El primer paso es estándar y puede cargarse el módulo bajo demanda con comando `modprobe`

```
# modprobe adq12b
```

o bien agregando la el nombre del módulo a la lista de `/etc/modules`. La configuración se realiza mediante el comando `comedi_config`. En esta etapa de configuración es necesario pasarle al módulo la posición de los jumpers de selección ya que no es posible conocer su estado por software. La sintaxis de la configuración es (en una sola línea)

```
# comedi_config /dev/comedi0 adq12b <direccion>,  
<unipolar>,<diferencial>
```

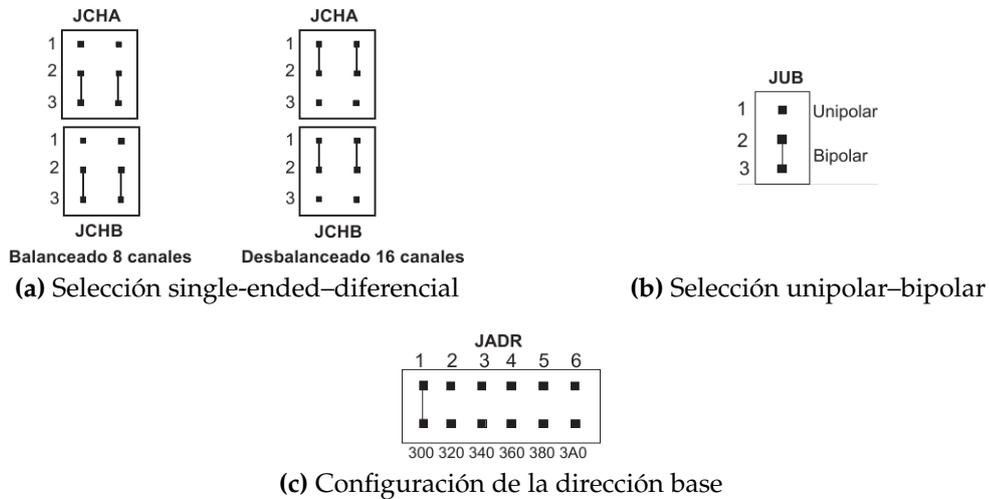


Figura C.2: Jumpers de configuración de la placa ADQ12B [2]

Este comando instala en el dispositivo `/dev/comedi01` la placa ADQ12B. El primer parámetro provee la dirección base en la cual está instalada la placa, con el prefijo `0x` para especificar un número hexadecimal. El segundo parámetro es cero si la placa está en modo bipolar y uno si es unipolar. El último debe ser cero si se seleccionó modo single-ended y uno para diferencial. Si no se especifica ningún parámetro, los valores por defecto son

```
# comedi_config /dev/comedi0 adq12b 0x300,0,0
```

El driver reporta a través del log del sistema los parámetros con los que fue cargado

```
# comedi_config /dev/comedi0 adq12b 0x300,0,1
# tail /var/log/messages
[...]
May 21 22:55:52 artemis kernel: comedi0: adq12b called
with options base=0x300, bipolar and differential
May 21 22:55:52 artemis kernel: comedi0: adq12b: 0x0300
attached
```

La distribución de subdevices es

- subdevice 0: 8/16 canales de analog input
- subdevice 1: 5 canales de digital input

¹Si se dispone de más de un dispositivo COMEDI puede elegirse un número diferente de cero.

- subdevice 2: 8 canales de digital output

y puede obtenerse más información con el comando `board_info` que forma parte de la distribución de COMEDI-LIB

```
# ./board_info
overall info:
  version code: 0x00074c
  driver name: adq12b
  board name: adq12b
  number of subdevices: 3
subdevice 0:
  type: 1 (analog input)
  flags: 0x00110000
  number of channels: 16
  max data value: 4095
  ranges:
    all chans: [-5,5] [-2,2] [-1,1] [-0.5,0.5]
  command:
    not supported
subdevice 1:
  type: 3 (digital input)
  flags: 0x00010000
  number of channels: 5
  max data value: 1
  ranges:
    all chans: [0,5]
  command:
    not supported
subdevice 2:
  type: 4 (digital output)
  flags: 0x00020000
  number of channels: 8
  max data value: 1
  ranges:
    all chans: [0,5]
  command:
    not supported
```

C.1.2. Detalles de la implementación

La comunicación con la placa interna se realiza escribiendo y leyendo desde ciertos registros que provee el hardware y que el kernel mapea a puertos internos, accesibles a través de las funciones `inb()` y `outb()`. El driver guarda en una zona de memoria privada el último rango seleccionado de forma tal de modificar la posición del multiplexor que da provee la tensión de referencia al conversor DAC sólo cuando se requiere cambiar de escala. Si éste fuera el caso, el driver espera 50 microsegundos para evitar los efectos de una entrada tipo escalón hace sobre el conversor.

Durante la etapa de prueba del driver, el registro STRIN de la placa del laboratorio resultó dañado debido a un cortocircuito involuntario en la ficha DB-37 de salida². Si bien la placa continúa funcionando, el bit correspondiente al *end-of-conversion* se mantiene constantemente encendido, por lo que no cumple la función de avisar cuando efectivamente es posible leer la muestra del registro correspondiente. Por ello, desarrollamos una versión modificada del driver que luego de pedir la conversión A/D hace un delay duro de 10 microsegundos antes de leer el valor digital obtenido. Esto disminuye la máxima frecuencia de muestreo alcanzable, pero sin embargo hace que una placa parcialmente dañada pueda continuar siendo utilizada, situación que sería imposible utilizando drivers propietarios cerrados.

C.2. Módulos externos RIAC

MicroAxial dispone de una serie de módulos externos que realizan tareas de adquisición y control y que se comunican con una computadora mediante comandos en texto ASCII a través del protocolo RS-232, y que pueden trabajar sobre el puerto serie estándar o utilizando un conversor USB-serie. Aunque la performance en velocidad de muestreo es muy inferior con respecto a las placas de adquisición internas, este tipo de hardware de adquisición presenta ventajas en el diseño de sistemas de mediciones de campo en aplicaciones industriales.

Si bien existen diferentes modelos que proveen características de entradas y salidas distintas (tabla C.1), todos los módulos trabajan con los mismos protocolos de comunicación, tanto de alto como de bajo nivel. Por sobre el protocolo RS-232 —ó RS-485— los módulos aceptan comandos y envían respuestas en texto ASCII según el lenguaje de comunicación denominado AXICOM-A [3]. Si se dispone de más de un módulo RIAC es posible implementar un bus de datos y conectar hasta ocho módulos en una misma línea RS-485. Por ello cada módulo tiene un número de identificador que puede ser seteado por el usuario.

Los comandos enviados por el puerto serie tienen la forma

```
#n CM p1 p2 p3<CR>
```

donde *n* es un número que identifica el módulo al cual se está haciendo referencia, *CM* es un comando de dos letras mayúsculas, *p_x* son los parámetros que toma el comando y <CR> indica el carácter ASCII de retorno de carro 0x0d. Las respuestas tienen la sintaxis

²Señores diseñadores de hardware de adquisición: no es una buena idea ubicar la señal de +12V de referencia en el pin adyacente al de la señal -12V de referencia

Modelos	Entradas analógicas	Entradas digitales	Salidas digitales	Entrada/salidas digitales (bidirec.)	Salidas analógicas	Contador 16 bits
QFA1000	Ocho P0.0 - P0.7	Ocho P1.0 - P1.7		Cuatro P2.0 - P2.3		Uno P2.0
QFD1000	Ocho P0.0 - P0.7		Ocho P1.0 - P1.7	Cuatro P2.0 - P2.3		Uno P2.0
QFB		Ocho P1.0 - P1.7	Ocho P0.0 - P0.7	Cuatro P2.0 - P2.3		Uno P2.0
QFC		Diez y seis P0.0 - P0.7 P1.0 - P1.7		Cuatro P2.0 - P2.3		Uno P2.0
QFE			Diez y seis P0.0 - P0.7 P1.0 - P1.7	Cuatro P2.0 - P2.3		Uno P2.0
QFA1600	Ocho P0.0 - P0.7	Ocho P1.0 - P1.7		Cuatro P2.0 - P2.3		Uno P2.0
QFD1600	Ocho P0.0 - P0.7		Ocho P1.0 - P1.7	Cuatro P2.0 - P2.3		Uno P2.0
QFA1600-DA	Seis P0.0 - P0.5	Ocho P1.0 - P1.7		Cuatro P2.0 - P2.3	Dos P0.6 - P0.7	Uno P2.0
QFD1600-DA	Seis P0.0 - P0.5		Ocho P1.0 - P1.7	Cuatro P2.0 - P2.3	Dos P0.6 - P0.7	Uno P2.0

Tabla C.1: Modelos de la familia de módulos RIAC [3]

$n, r < CR >$

siendo r la respuesta buscada.

La comunicación serie debe realizarse utilizando 1 bit de start, 7 bits de datos, 1 bit de paridad par y 1 bit de stop. La velocidad de conexión puede seleccionarse entre los valores estándar 1200, 2400, 4800, 9600, 19200, 38400, 57600 y 115200 bien mediante dip switches instalados sobre el circuito impreso de los módulos (figura C.3) o bien por software a través de un comando particular. La selección del número de identificación del módulo también se puede realizar ajustando la posición de las llaves o por software. Estos datos se guardan en una memoria EEPROM por lo que no es necesario reconfigurar el hardware cuando se interrumpe la alimentación externa.

Selección velocidad



Selección dirección



Figura C.3: Selección de ID y velocidad por dip switches

La selección de la característica unipolar o bipolar de los canales analógicos se realiza mediante el jumper J2 de la misma manera que en el caso de la placa ADQ12-B. Por otro lado, la elección sobre el comportamiento tipo single-ended

o diferencial está dada por una combinación entre la forma de conexión de los terminales y los comandos de lectura involucrados. Para el caso single-ended el canal c corresponde a la diferencia de potencial entre el puerto c y la masa de referencia, y para el caso diferencial debe seguirse la tabla C.2. Sin embargo, debido a cuestiones de implementación sobre el entorno COMEDI, la actual versión del driver no es capaz de manejar canales diferenciales, por lo que no es posible utilizar el módulo donde sea indispensable este tipo de conexión, como por ejemplo para medir sobre puentes.

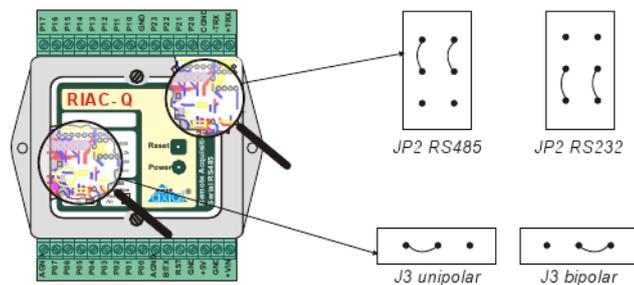


Figura C.4: Selección de comportamiento unipolar/bipolar de los canales analógicos

	$+C_n$	$-C_n$	Comandos
Altern 1	P0.0	P0.4	VB 0
	P0.1	P0.5	VB 1
	P0.2	P0.6	VB 2
	P0.3	P0.7	VB 3
Altern 2	P0.0	P0.1	VB 4
	P0.2	P0.3	VB 5
	P0.4	P0.5	VB 6
	P0.6	P0.7	VB 7

Tabla C.2: Esquema de conexiones para canales diferenciales. El driver no es capaz de manejar señales diferenciales.

C.2.1. Módulo qfserial

El módulo que proveen driver para la familia de módulos RIAC puede trabajar sobre el puerto serie estándar `/dev/ttySx` o sobre el dispositivo `/dev/ttyUSBx` que se crea al conectar un convertor USB-serie a cualquiera de los puertos USB. En cualquier caso, el módulo se carga con el comando

```
# modprobe qfserial
```

Para asignar el dispositivo `/dev/comedi0` —o algún otro número— se debe configurar el dispositivo

```
# comedi_config /dev/comedi0 <modelo> <puerto>,<usb>,  
<velocidad>,<número>,<unipolar>
```

donde

<code><modelo></code>	es <code>qfa</code> , <code>qfd</code> , <code>qfa16</code> ó <code>qfd16</code> , que son los modelos actualmente soportados
<code><puerto></code>	es el número de puerto donde está instalado el módulo, es decir, la <code>x</code> de <code>/dev/ttySx</code> o <code>/dev/ttyUSBx</code> (default 0)
<code><usb></code>	debe ser 0 si se utiliza el puerto serie <code>dev/ttySx</code> y 1 si se utiliza el puerto USB <code>/dev/ttyUSBx</code> (default 0)
<code><speed></code>	es la velocidad de comunicación en BPS (default 9600)
<code><número></code>	es el número de identificación configurado en el módulo (default 1)
<code><unipolar></code>	debe ser 1 si el jumper J3 está seleccionado para trabajar en modo unipolar y 0 de modo contrario (default 0)

Por ejemplo

```
# comedi_config /dev/comedi0 qfd16 0,0,38400,1,0  
# tail /var/log/messages  
[...]  
Jun 11 01:48:14 artemis kernel: comedi: version 0.7.76 - David  
Schleef <ds@schleef.org>  
Jun 11 01:49:55 artemis kernel: comedi0: qfserial: attached  
RIAC #1 to /dev/ttyS0 at 38400 bps, bipolar.
```

Una vez configurado, el driver provee

- subdevice 0: analog input
- subdevice 1: digital input
- subdevice 2: digital output
- subdevice 2: digital input/output
- subdevice 2: analog output (no implementado aún)

con la cantidad de canales dependiente del modelo que está siendo configurado y la tabla C.1. Para el caso del módulo QFD-16 la salida del comando `board_info` es

```

# ./board_info
overall info:
  version code: 0x00074c
  driver name: qfserial
  board name: qfd16
  number of subdevices: 5
subdevice 0:
  type: 1 (analog input)
  flags: 0x00110000
  number of channels: 8
  max data value: 65535
  ranges:
    all chans: [-5.12,5.12] [-2.56,2.56] [-1.28,1.28]
               [-0.64,0.64] [-0.32,0.32] [-0.16,0.16] [-0.08,0.08]
               [-0.04,0.04]
  command:
    not supported
subdevice 1:
  type: 3 (digital input)
  flags: 0x00010000
  number of channels: 0
  max data value: 0
  ranges:
    all chans:
  command:
    not supported
subdevice 2:
  type: 4 (digital output)
  flags: 0x00020000
  number of channels: 8
  max data value: 1
  ranges:
    all chans: [0,5]
  command:
    not supported
subdevice 3:
  type: 5 (digital I/O)
  flags: 0x00030000
  number of channels: 4
  max data value: 1
  ranges:
    all chans: [0,5]
  command:
    not supported
subdevice 4:
  type: 2 (analog output)
  flags: 0x00020000
  number of channels: 0
  max data value: 0
  ranges:
    all chans:

```

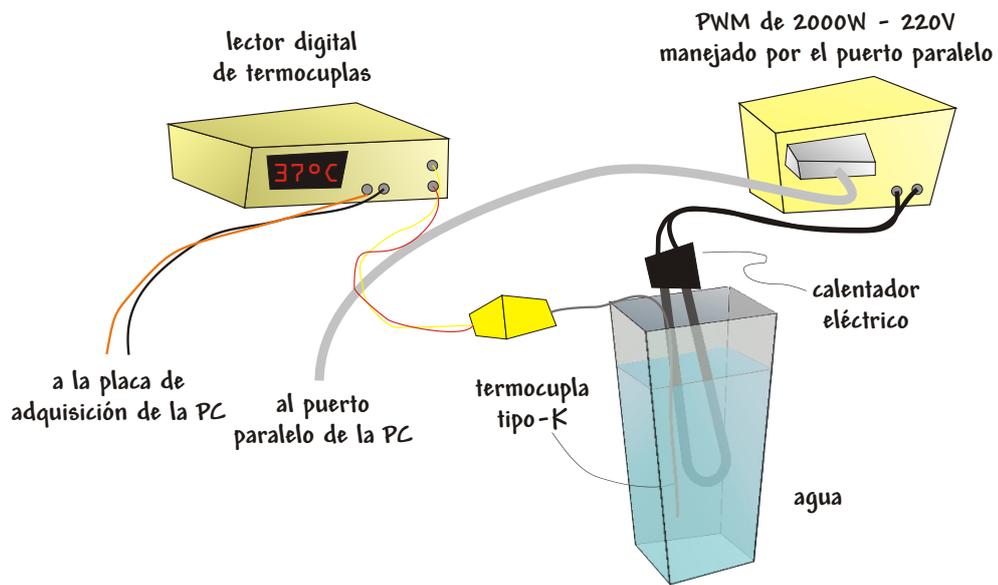


Figura C.5: Disposición experimental para controlar la temperatura de un recipiente con agua

```
command:
  not supported
```

C.2.2. Detalles de la implementación

El driver se comunica con el puerto serie a través del dispositivo especial `/dev/ttySx`. Pero como desde el kernel space no están disponibles los systems calls que realizan tareas de I/O sobre files con los buffers que corresponde, el driver accede a través de las operaciones `filp_*` que no tienen los buffers estándar. Si bien no existen mayores inconvenientes en el caso del puerto serie, al utilizar un conversor USB-RS232 existen algunos retrasos en el flujo de la información que hacen que sea necesario insertar delays duros entre las operaciones de escritura y lectura. Es por eso que si se utiliza la versión USB del driver, la frecuencia de muestreo máxima alcanzable es sólo de unos pocos Hertz.

C.3. Ejemplo: control difuso de temperatura

Como ejemplo de la utilización conjunta de los drivers de adquisición y el software de control MELON, mostramos a continuación los resultados de un lazo cerrado de control para obtener agua caliente a una temperatura dada. En la figura C.5 mostramos la disposición experimental utilizada. Un PWM de po-

```

SAMPLING PERIOD 2      # segundos

VAR temp
VAR setpoint
VAR error ALGEBRA temp - setpoint
VAR potencia

READ temp COMEDI /dev/comedi0  0 9 3    0 +500
READ setpoint FILE ASCII setpoint
# duty cycle
# el DAC usa solo 6 bits , asi que 8 bits are 400%
WRITE error PARALLEL_PORT 0x378      0 4

FUZZY_SET muy_fria      error LINEAR_SATURATED_LEFT -10  10
FUZZY_SET fria         error TRIANGULAR           -5    5
FUZZY_SET ok           error TRIANGULAR           0    2.5
FUZZY_SET caliente     error LINEAR_SATURATED_RIGHT +2.5  2.5

FUZZY_SET cero         power TRIANGULAR           0    0.25
FUZZY_SET poco        power TRIANGULAR           0.01 0.01
FUZZY_SET maso        power TRIANGULAR           0.75 0.25
FUZZY_SET mucho       power TRIANGULAR           1    0.25

IF error IS muy_fria THEN potencia IS mucho
IF error IS fria THEN potencia IS maso
IF error IS ok THEN potencia IS poco
IF error IS caliente THEN potencia IS cero

```

Código C.1: Código fuzzy para controlar temperatura

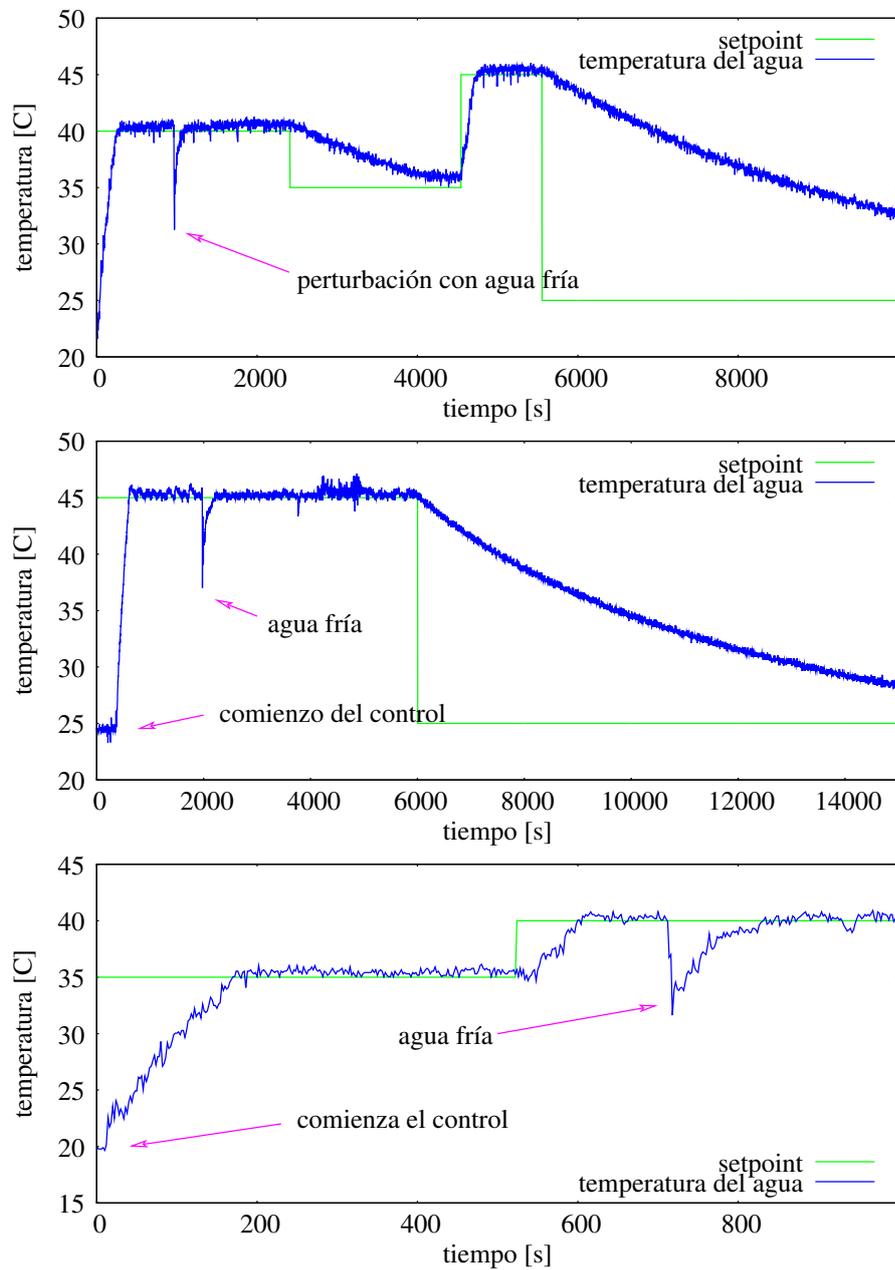


Figura C.6: Resultados del control difuso de la temperatura de un recipiente de agua

tencia cuyo duty cycle está definido por seis bits de un puerto paralelo controla la potencia disipada por un heater eléctrico comercial estándar inmerso en un recipiente de acrílico que contiene agua. Tomamos la temperatura en un punto con una termocupla tipo K, cuya señal procesa un termómetro digital con una punta fría electrónica que provee una señal analógica cuya amplitud en miliVolts es numéricamente igual a la temperatura medida en grados centígrados. La lectura del termómetro es leída por la placa ADQ12B y el PWM está comandado por el puerto paralelo estándar.

El experimento fue realizado utilizando el código fuzzy utilizado para realizar el control basado en lógica difusa es el mostrado en el listado C.1, con el software MELON corriendo en una computadora con un procesador Intel Pentium I de 200Mhz y 128 Mb de RAM. El controlador lee el setpoint de temperatura de un archivo de texto ASCII ubicado en un recurso remoto de NFS, por lo que desde cualquier computadora de la red puede modificarse la temperatura deseada haciendo

```
$ echo 50 > setpoint
```

con los permisos adecuados³.

! Notar que el sistema operativo sobre el que realizamos el experimento es una versión moderna de Debian Linux, lo que implica disponer de los últimos avances en desarrollo de software de red y actualizaciones de seguridad. Intentar correr alguna versión de Windows posterior a 1998 en esta computadora sería imposible.

Referencias

- [1] <http://www.comedi.org>
- [2] <http://www.microaxial.com.ar>
- [3] Placa ADQ12B. Manual del usuario. Microaxial.
- [4] Módulos RIAC-QF. Manual del usuario. Microaxial.

³Según el Dr. Fabián Bonetto, los miembros del laboratorio que no hayan aprobado un riguroso examen sobre la dependencia de las propiedades del mate con la temperatura no deberían tener permisos de escritura sobre el archivo de setpoint.

Referencias

Cuando se proclamó que la Biblioteca
abarcaba todos los libros, la primera
impresión fue de extravagante felicidad.
Todos los hombres se sintieron señores
de un tesoro intacto y secreto.
Jorge Luis Borges, La Biblioteca de Babel, 1941

- J. Achard, D. Drew, y R. T. Lahey. The analysis of nonlinear density-wave oscillations in boiling channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 155, 1985.
- Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, y James A. Yorke. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. Springer, 1997.
- W. Ambrosini, W.J.M. de Krujif, y M. Maiani. An analytical model for the determination of stability boundaries in a natural circulation single-phase thermosyphon loop. *International journal of fluid and mass flow*, 24(6), 2003.
- Henry D. I. Arbarbanel. The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of Modern Physics*, 65(4), 1993.
- R. Badii y A. Politi. Hausdorff dimension and uniformity factor of strange attractors. *Physical Review Letters*, 52(19), 1984.
- Hao Bai-lin. *Chaos*. World Scientific, 1984.
- H. H. Bau y K. E. Torrance. Transient and steady behaviour of an open symmetrically-heated, free convection loop. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24, 1981.
- Daniel Brasnarof. *Dinámica y estabilidad del flujo bifásico durante secuencias de descubrimiento de núcleo*. Trabajo Especial de la Carrera de Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro, 1993.

- C. Chang y R. T. Lahey. Analysis of chaotic instabilities in boiling systems. *Nuclear Engineering and Design*, 167, 1997.
- A. Clause y R. T. Lahey. The influence of flow development on subcooled boiling. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 17, 1990.
- A. Clause y R. T. Lahey. The analysis of periodic and strange attractors during density-wave oscillations in boiling flo. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1(2), 1991.
- Alejandro Clause. *Efectos no lineales en inestabilidades de ondas de densidad en flujo de dos fases*. Tesis de Doctorado en Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro, 1986.
- Angelo Corana. Adaptive box-assisted algorithm for correlation-dimension estimation. *Physical Review E*, 62(6), 2000.
- D. Delmastro, L. Juanicó, y A. Clause. A delay theory for boiling flow stability analysis. *International Journal of Multiphase Flow*, 27, 2001.
- Darío Delmastro. *Aplicación de la teoría de sistemas dinámicos al análisis de inestabilidades termohidráulicas*. Tesis de Doctorado en Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro, 1993.
- Richard C. Dorf. *Modern Control Systems*. Addison Wesley, 2001.
- P. G. Drazin. *Nonlinear Systems*Camte. Cambridge University Press, 1992.
- J. J. Duderstadt y L. J. Hamilton. *Nuclear reactor analysis*. Wiley, New York, 1976.
- J. P. Eckmann y D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Review of Modern Physics*, 57(3), 1985.
- P. Ehrhard y U. Müller. Dynamical behaviour of natural convection in a single-phase loop. *Journal of Fluid Mechanics*, 217, 1990.
- Andrés Etchepareborda. *Aplicaciones de control predictivo no lineal en reactores nucleares*. Tesis de Doctorado en Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro, 2007.
- J. C. Ferreri y W. Ambrosini. Stability analysis of single-phase thermosyphon loops by finite-difference numerical methods. *Nuclear Engineering and Design*, 201, 2000.
- J. C. Ferreri y W. Ambrosini. On the analysis of thermal-fluid-dynamic instabilities via numerical discretization of conservation equations. *Nuclear Engineering and Design*, 215, 2002.

- J. C. Ferreri y W. Ambrosini. The effect of truncation error on the numerical prediction of linear stability boundaries in a natural circulation single-phase loop. *Nuclear Engineering and Design*, 183, 1998.
- P. C. Florido, D. Brasnarof, y H. Lestani. Base de diseño del coeficiente de vacío del combustible CARA. In *Actas de la XXXIV Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*, November 2007.
- G. F. Franklin, J. D. Powell, y A. Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems*. Addison Wesley, 3rd edition, 1994.
- R. M. Füchslin, Y. Shen, y P.F. Meier. An efficient algorithm to determine fractal dimensions of point sets. *Physics Letters A*, 285, 2001.
- Verónica Garea. *Nodal analysis of two-phase flow instabilities*. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, 1998.
- Carlos Gho. Apuntes de física de reactores. Curso de Física de Reactores de la Carrera de Ingeniería Nuclear en el Instituto Balseiro, 2005.
- James Gleick. *Chaos: making a new science*. Viking, New York, 1987.
- Peter Grassberger y Itamar Procaccia. Characterization of strange attractors. *Physical Review Letters*, 50(5), 1983.
- H. S. Greenside, A. Wolf, J. Swift, y T. Pignataro. Impracticality of a box-counting algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors. *Physical Review A*, 25(6), 1982.
- G. Guido Lavalle, J. Converti, y A. Clause. Density-wave oscillations in parallel channels—an analytical approach. *Nuclear Engineering and Design*, 125, 1991.
- A. F. Henry. *Nuclear reactor analysis*. Cambridge, MIT, 1975.
- Morris W. Hirsch y Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, 1974.
- Josef Hofbauer y Karl Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- F. Incropera y D. Dewitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley, New York, 2002.
- S. Kakac y B. Bon. A review of two-phase flow dynamic instabilities in tube boiling systems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51, 2008.

- Miroslav Kolá y Godfrey Gumbs. Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel. *Physical Review A*, 45(2), 1992.
- A. Kolmogorov. Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamiltonian function. *Akad. Nauk. SSSR Doklady*, 98(527), 1954. Reprinted in English in *Lecture Notes in Physics* 93:51 (1979).
- R. T. Lahey, editor. *Boiling Heat Transfer: Modern Developments and Advances*. Elsevier, 1992.
- R. T. Lahey y F. J. Moody. *The thermal hydraulics of a boiling water nuclear reactor*. Monograph series on nuclear science and technology. American Nuclear Society, 1977.
- H. J. Lee, J. B. Park, y G. Chen. Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2), April 2001.
- J. Lewins. *Nuclear reactor kinetics and control*. Pergamon Press, 1978.
- T.Y. Li y J.A. Yorke. Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10), 1975.
- Edward Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 1963.
- B. B. Mandelbrot. *Fractals: form, chance and dimension*. Freeman San Francisco, 1977.
- Curt McMullen. The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets. *Nagoya Math. J.*, 96, 1984.
- A. S. Mikhailov y A. Y. Loskutov. *Foundations of Synergetics II - Chaos and Noise*. Springer, 2nd edition, 1996.
- H. Mochizuki. Analysis of the Chernobyl accident from 1:19:00 to the first power excursion. *Nuclear Engineering and Design*, 237, 2007.
- H. Mochizuki. Experimental and analytical studies of flow instabilities in pressure tube type heavy water reactors. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 29(1), 1992.
- Hazime Mori. Fractal dimension of chaotic flows of autonomous dissipative systems. *Progress of Theoretical Physics*, 63(3), 1980.
- Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2002.

- N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, y R. S. Shaw. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45(9), 1980.
- Thomas. S. Parker y Leon O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, 1989.
- Kevin M. Passino y Stephen Yurkovich. *Fuzzy Control*. Addison-Wesley, 1998.
- D. S. Pilkhwal, W. Ambrosini, N. Forgione, P. K. Vijayan, D. Saha, y J. C. Ferreri. Analysis of the unstable behaviour of a single-phase natural circulation loop with one-dimensional and computational fluid-dynamic models. *Annals of Nuclear Energy*, 34, 2007.
- Rizwan-Uddin y J. J. Dorning. Some nonlinear dynamics of a heated channel. *Nuclear Engineering and Design*, 93, 1986.
- W. Rohsenow y J. Hartnett, editors. *Handbook of Heat Transfer*. McGraw-Hill, 1973.
- David Ruelle. What is a strange attractor? *Notices of the AMS*, 53(7), 2006.
- David Ruelle y Floris Takens. On the nature of turbulence. *Communications of Mathematical Physics*, 20, 1971.
- Leonardo Ruspini. *Estudio comparativo de esquemas de volúmenes finitos para el seguimiento de interfaces mediante el método de Level Set*. Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro, 2007.
- David A. Russell, James D. Hanson, y Edward Ott. Dimension of strange attractors. *Physical Review Letters*, 45(14), 1980.
- Ipppei Shimada y Tomomasa Nagashima. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical system. *Progress of Theoretical Physics*, 61 (6), 1979.
- H. G. Solari, M. A. Natiello, y G. B. Mindlin. *Nonlinear Dynamics*. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1996.
- T. Takagi y M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15, 1985.
- K. Tanaka y Hua O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis*. John Wiley and Sons, 2001.
- K. Tanaka, T Ikeda, y H. O. Wang. A unified approach to controlling chaos via an LMI-based fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, 45(10), 1998.

- Yves Termonia y Zeev Alexandrowicz. Fractal dimension of strange attractors from radius versus size of arbitrary clusters. *Physical Review Letters*, 51(14), 1983.
- James Theiler. Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points. *Physical Review A*, 36(9), 1987.
- James Theiler. Estimating fractal dimension. *Journal of the Optical Society of America*, 7(6), 1990.
- G. Theler, E. Urdapilleta, y F. J. Bonetto. Control basado en lógica difusa del loop de welander en régimen caótico. In *Actas de la XXXIV Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*, 2007a.
- G. Theler, E. Urdapilleta, y F. J. Bonetto. Control lingüístico difuso de un loop de convección natural caótico. Poster presentado en el XVI Congreso sobre Métodos Numéricos y Aplicaciones ENIEF, 2007b.
- Germán Theler. La rueda caótica de Lorenz. Poster presentado en la materia Física Experimental I, Instituto Balseiro—No Publicado, 2004.
- Germán Theler. *Controladores basados en lógica difusa y loops de convección natural caóticos*. Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro, 2007.
- D. Van Bragt y T. Van Der Hagen. Stability of natural circulation boiling water reactors: part-I—description stability model and theoretical analysis in terms of dimensionless groups. *Nuclear Technology*, 121, 1998a.
- D. Van Bragt y T. Van Der Hagen. Stability of natural circulation boiling water reactors: part-II—parametric study of coupled neutronic-thermohydraulic stability. *Nuclear Technology*, 121, 1998b.
- H. O. Wang, K. Tanaka, y M. F. Griffin. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *Proceedings of IEEE/IFES 95*, 1995.
- P. Welander. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop. *Journal of Fluid Mechanics*, 29(1), 1967.
- F. M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw Hill, 4th edition, 1999.
- Hao Ying. General SISO Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(4), 1998.
- Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 1965.

Pablo Zanocco. *Dinámica de reactores auto-presurizados, refrigerados por convección natural*. Tesis de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, Instituto Balseiro, 2005.

Agradecimientos

Cualquier cosa es preferible a esa mediocridad eficiente,
a esa miserable resignación que algunos llaman madurez
Alejandro Dolina, El libro del Fantasma, 1999

Ya en los agradecimientos del Proyecto Integrador —que representaron la culminación de una dura carrera de grado— decía yo que repetir conceptos que el interlocutor ya conoce ejercita más el fastidio que la comunicación. Mitad por esto y mitad por pereza, deberán darse por agradecidos todos aquellos que saben que merecen mi humilde reconocimiento.

Sí quisiera agradecer particularmente a los siguiente profesionales que han dedicado parte de su tiempo en discutir conmigo ciertos asuntos sobre esta tesis e incluso algunos han intentado por todos los medios inculcarme toda clase de nociones, con nulos resultados por cierto. Gracias a los doctores Darío Delmastro, Pablo Zanocco, Christian Marcel, Enzo Dari, Damián Zanette; y a los Ingenieros Leo Ruspini, Joaquín Basualdo, Héctor “Chaco” Lestani y Julio Pacio.

También saludo desde aquí a mis compañeros del Laboratorio de Cavitación y Biotecnología del Centro Atómico Bariloche, Doctor Raul “Cuchu” Urteaga; Ingenieros Damián Dellavalle, José Iriarte, Ludmila Rechiman y Román Rossi Pool; y Licenciados Walter Bast y Mariela Bellotti. Especialmente al ingeniero Eugenio Urdapilleta por su atenta revisión del manuscrito y a mi director Dr. Fabián J. Bonetto por poner todo su empeño en intentar lograr que exista un Master en Ingeniería Nuclear más en el país.

Finalmente, agradezco a toda la comunidad académica del Instituto Balseiro, particularmente a todos los profesores que se han debido topar —en contra de su voluntad— con el desafiante escollo que representa contarme entre sus estudiantes. Reitero mi agradecimiento al país por haber confiado en mí y haberme dado la oportunidad de acceder a una carrera universitaria, y a los contribuyentes que con su esfuerzo hacen posible que nuestro trabajo tenga sentido.

Jeremy
Bariloche, 18 de junio de 2008