TESIS DOCTORAL
CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

COMPACTIFICACIONES DE TEORÍAS DE CUERDAS SOBRE PUNTOS GEPNER Y CLASES LATERALES

Eduardo C. Andrés

Eduardo C. Andrés	Gerardo M. Aldazabal
Doctorando	Director

Instituto Balseiro
S.C. de Bariloche, Diciembre de 2005

Resumen

Estudiamos varios tipos de compactificaciones de cuerdas, motivados por la búsqueda de modelos fenomenológicos, y por la comprensión de las relaciones entre distintos vacíos de cuerdas.

En los primeros capítulos estudiamos compactificaciones de cuerdas tipo I construidas a partir de orientifolios de modelos de Gepner de teorías tipo IIB, en D=$8, 6, 4$ dimensiones. Calculamos los grupos de calibre y espectros.

En los últimos capítulos estudiamos compactificaciones de cuerdas heteróticas en modelos de Gepner y Kazama–Suzuki, en D=4. Calculamos el número de generaciones.

En ambos casos, implementamos cocientes por simetrías discretas. Esto no sólo aumenta el número de vacíos estudiados sino que, en algunos casos, es útil desde el punto de vista fenomenólogico.

Agradecimientos

Tengo mucho que agradecer a una gran cantidad de personas, sin las cuales no podría haber hecho esta tesis.

A mi familia, por el amor y el apoyo.

A mi director Gerardo Aldazabal, por todo lo que aprendí, por poder trabajar en forma agradable, por darme el impulso para seguir y especialmente por su paciencia.

A toda la gente del grupo de partículas.

A mis amigos en Bariloche.

A la CNEA y a Fundación Antorchas, por la ayuda económica.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad la explicación de los fenómenos físicos se reduce, al nivel de los componentes fundamentales de la materia y sus interacciones, a dos teorías, el Modelo Estándar y la Relatividad General. Ambos describen de forma excelente los enorme mayoría de los fenómenos que entran dentro de su campo de aplicación.

Sin embargo la situación no es del todo satisfactoria, y hay motivos para creer que no es ésta la descripción final de la naturaleza.

Entre estos motivos está que estas dos teorías no son compatibles, ya que el Modelo Estándar es una teoría cuántica y la Relatividad General es una teoría clásica. Como esta incompatibilidad se haría manifiesta a energías extremadamente grandes (del orden de la masa de Planck, $m \simeq 10^{19}$ GeV), es difícil obtener una guía experimental que indique cómo unificar las dos teorías. Que la predicción *naïve* del valor de la constante cosmológica esté en clara contradicción con las mediciones puede ser una de las manifestaciones de esta incompatibilidad. Desde un punto de vista teórico sería mucho mejor tener una sola teoría que se reduzca al Modelo Estándar y la Relatividad General en los límites adecuados.

Otros motivos, internos al Modelo Estándar, son algunas limitaciones que se espera sean resueltas al incluirlo dentro de una teoría más amplia, que daría lugar a nueva física. Entre los hechos experimentales que no son explicados por el Modelo Estándar están:

- La masa no nula de los neutrinos
- La existencia de la materia oscura
- La existencia de la energía oscura
- La asimetría bariónica (por qué hay más materia que antimateria)
- El valor extremadamente pequeño de la constante cosmológica

También hay motivos "estéticos" para buscar extensiones del Modelo Estándar, a saber

- problema de la jerarquía
- por qué el grupo de calibre es $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
- por qué la veintena de parámetros toma los valores que toma
- por qué hay tres generaciones de quarks y leptones

La teoría de cuerdas [1, 2, 3] es una posible salida a varios de los problemas anteriores. Es una teoría cuántica que da lugar a Relatividad General en un adecuado límite de "bajas" energías. Es posible obtener también modelos con grupos de calibre que contienen al del Modelo Estándar, con fermiones quirales en su espectro. Al ser supersimétrica, da lugar naturalmente a extensiones supersimétricas del Modelo Estándar. Esto ayuda a resolver el problema de la jerarquía, ya que habría que hacer un ajuste fino ("*fine tuning*") sólo una vez. Además, por ejemplo, una extensión del Modelo Estándar, el $SU(5)$ supersimétrico, unifica más correctamente las constantes de acoplamiento que un $SU(5)$ sin supersimetría.

Un posible problema de la teoría de cuerdas es que su dimensión natural de espacio–tiempo es $D = 10$. Una solución es compactificar seis dimensiones de espacio (o visto de otro modo, sólo dejar crecer a tres), otra solución es localizar las interacciones de calibre en branas. También son posibles combinaciones de estas dos.

Compactificar algunas dimensiones de espacio fue intentado en la década de 1920 por Kaluza y Klein, los que obtuvieron Electromagnetismo más Relatividad General en $D = 4$ a partir de Relatividad General en $D = 5$ (además de un campo escalar). En su versión más sencilla se piensa al espacio–tiempo como el producto directo de un espacio–tiempo de Minkowski y una variedad compacta. En el caso de las cuerdas, pedir que éstas se propaguen en forma consistente limita fuertemente a la variedad compacta, de lo que resulta que debe ser una variedad de Calabi–Yau. Esta forma de compactificación es llamada "*geométrica*". Otra forma de compactificar, llamada "*algebraica*" es reemplazar los grados de libertad que posee la cuerda al moverse en las dimensiones "extra" por una teoría de campos adecuada. Entre estas últimas están los modelos de Gepner y sus generalizaciones los modelos de Kazama–Suzuki.

Las compactificaciones de cuerdas heteróticas $E_8 \times E_8$ a teorías en cuatro dimensiones muy parecidas al Modelo Estándar (o extensiones de éste), definieron el escenario de la así llamada fenomenología de cuerdas desde los mediados de los ochenta. Las pautas fueron establecidas en [4], donde se mostró que la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$, compactificada en una variedad de Calabi–Yau, permitía obtener un modelo $N = 1$ con grupo E_6 de tres generaciones. El E_6 puede romperse, por ejemplo, encendiendo líneas de Wilson. Pronto se consideraron otras compactificaciones siguiendo estas ideas, como las que usan *orbifolds* de cuerdas fermiónicas en $E_8 \times E_8$ y, en menor medida, cuerdas heteróticas $SO(32)$ [6]. Para ver el trabajo pionero en construcción de modelos de tipo I, ver [7] y sus referencias.

Particularmente relevante para esta tesis son los modelos de Gepner propuestos en [8]. Ese trabajo provee una construcción algebraica de teorías de cuerdas supersimétricas en D dimensiones pares (menores a 10), en términos de teorías conformes racionales resolubles, sin referirse a la teoría original en 10 dimensiones. También se presentó algo de evidencia allí acerca de la identificación de estas construcciones con compactificaciones de Calabi–Yau.

Desde mediados de los noventas, la aparición de las *dualidades* ha marcado un cambio drástico en nuestra visión de las teorías de cuerdas, tanto desde el punto de vista teórico como fenomenológico. Las D–branas juegan un papel prominente en este nuevo enfoque.

El hecho de que las branas localicen las interacciones de calibre en sus volúmenes de mundo da un escenario nuevo a la fenomenología de cuerdas, donde las teorías de partículas están confinadas en los mundos branas. Dado que varias de las características de estas teorías parecen depender sólo del comportamiento local de las cuerdas en la vecindad de las D–branas (sin siquiera considerar compactificaciones), se abre la posibilidad atractiva de un acercamiento *abajo–arriba* (*bottom-up*)[9]. En este acercamiento, primero se construyen modelos de brana de tipo II parecidos al Modelo Estándar, y luego se los incluye en un modelo de cuerdas global consistente. Este método resulta ser muy poderoso cuando la variedad compactificadora es tipo toro, con branas tanto en singularidades [9, 61] tipo orbifold como en ángulos [10], las que son necesarias para obtener teorías quirales (ver también [11] para branas intersecantes y Calabi–Yau).

La teoría de cuerdas relevante tipo I en un Calabi–Yau genérico es mucho más complicada. En particular, la geometría de las D–branas se vuelve borrosa, y una construcción tipo *bottom–up* es más difícil. Sin embargo queremos remarcar que se han conseguido pasos importantes para entender las interpretaciones algebraicas y geométricas de las D–branas [12, 13, 14, 63, 64, 68]. Esto puede llevar a la construcción de modelos del tipo *bottom–up*, por ejemplo los presentados en [69].

Más allá de su interés fenomenológico, las compactificaciones de tipo Calabi–Yau proveen una arena fructífera para estudiar dualidades tipo I–heterótica. Es sabido que este es un ingrediente esencial para la entender la naturaleza de la teoría M. En particular, parece valer la pena estudiar compactificaciones en varias dimensiones como un paso relevante para establecer conexiones dentro de la intrincada red de dualidades de cuerdas.

Las teorías compactificadas de cuerdas suelen poseer simetrías discretas. Al cocientar por éstas se obtienen nuevos modelos, como los orbifolds en las compactificaciones geométricas y los cocientes por simetrías de fase o permutaciones en las algebraicas. Además de ampliar el espacio de modelos, lo que permite tener una mejor idea acerca de las teorías posibles, se pueden obtener fermiones quirales en el modelo cocientado aunque el modelo original no los posea, por lo que es beneficioso también desde un punto de vista más fenomenológico.

Si se divide a una compactificación toroidal del espacio–tiempo por una simetría finita (por ejemplo, una reflexión) se obtiene un *orbifold*. Si se divide por una reflexión y al mismo tiempo por paridad en la hoja de mundo se obtiene un *orientifolio* [2, §8.8].

Los primeros capítulos de esta tesis tratan acerca de la construcción de esta clase de modelos en los puntos especiales del espacio de moduli de los Calabi–Yau descriptos por modelos de Gepner. En los años recientes ha habido un desarrollo importante en este tema. Los descendientes abiertos de modelos de Gepner se han discutido en [15, 16]. Las D–branas [17, 18, 19] y los planos orientifolios en estos modelos se han considerado en [20, 21].

La teoría de supercuerda de tipo I (abierta más cerrada) puede construirse a partir de supercuerdas de tipo IIB. La teoría IIB es invariante ante intercambio de los sectores izquierdo y derecho. Cuando se divide por esta simetría, la teoría resultante aparenta ser inconsistente. Esta inconsistencia se manifiesta, por ejemplo, a través de la aparición de “*tadpoles*” no físicos en las amplitudes de cuerdas, y puede ser interpretada como una carga no balanceada ante campos RR de cuerda cerrada de los 9–planos orientifolios [2]. Se recupera la total consistencia agregando un sector de cuerda abierta, donde las cuerdas abiertas terminan en D9–branas que llevan la carga RR opuesta. En este sentido el sector de cuerda abierta aparece como un sector retorcido para la proyección ante el intercambio izquierda-derecha. La solución de las condiciones de cancelación de los tadpoles fija el grupo de calibre de Chan–Paton. El mismo esquema es válido en menos dimensiones cuando los modos izquierdo y derecho son acoplados simétricamente.

Aquí seguimos estos pasos, empezando con teorías tipo IIB donde el sector interno se construye a partir de modelos de Gepner. Nuestro objetivo principal es desarrollar un procedimiento sistemático para manipular estos modelos. En particular mostramos cómo se pueden implementar la división (*modding*) por simetrías de fases y por permutaciones cíclicas, para tener más control sobre el número de generaciones, la rotura o aumento de las simetrías de calibre y supersimetría, etc. Se construyen varios ejemplos en $D = 8, 6$ y 4 dimensiones y se los presenta a modo ilustrativo. A partir de lo así construido se podría realizar un estudio más dirigido hacia modelos interesantes fenomenológicamente, o a hallar duales heteróticos.

En los capítulos 2 y 3 estudiamos orientifolios de teorías IIB con sector interno compuesto por modelos de Gepner y de Gepner + orbifolds respectivamente. En los capítulos 4 y 5 estudiamos modelos de Gepner (y Kazama–Suzuki) en la cuerda heterótica.

Capítulo 2

Orientifolios IIB en puntos de Gepner

2.1. Introducción

En este capítulo estudiamos varios aspectos de orientifolios de teorías de cuerdas cerradas tipo IIB en puntos de Gepner, en diferentes dimensiones. Se introduce el sector abierto, en la forma constructiva usual, para cancelar las cargas de RR de los planos orientifolios. Se implementan "*moddings*" por permutaciones cíclicas de los bloques superconformes internos $N = 2$, así como por simetrías de fase. Se muestra que estos *moddings* inducen reducciones en el número de generaciones, ruptura o aumento de las simetrías de calibre y cambios de topología. Se presenta un estudio sistemático de modelos consistentes en $D = 8$ dimensiones, y algunos ejemplos ilustrativos en $D = 6$ y $D = 4$.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En las subsecciones 2.2 y 2.3, que contienen breves reseñas de las funciones de partición en teoría de supercuerdas tipo I y de los modelos de Gepner, se desarrollan las principales ideas de la construcción y se define la notación. En la subsección 2.4 se discute la amplitud de vacío en teorías tipo I en puntos de Gepner, y es ilustrada a través de ejemplos explícitos en $D = 8, 6$ y 4 dimensiones de espaciotiempo en las subsecciones 2.5, 2.6 y 2.7 donde se especifican el contenido de materia y los grupos de calibre de Chan–Paton que llevan a teorías consistentes. En la subsección 2.8 se consideran moddings por permutaciones cíclicas y por simetrías discretas de fase. Muchos detalles son relegados a los apéndices para mantener la concentración en los aspectos esenciales de la construcción. En el apéndice 7.1 se hace un sumario de las expresiones explícitas y de las propiedades de los caracteres de los modelos superconformes $N = 2$, y de las propiedades de transformación modular de los caracteres supersimétricos de las cuerdas $N = 2$. En el apéndice 7.2 listamos el espectro de estados contenido en los caracteres relevantes de los modelos de Gepner construidos en el cuerpo principal del capítulo.

2.2. Amplitud de vacío de la supercuerda tipo I

En esta sección reseñamos la construcción de la teoría de supercuerdas (ver el trabajo original [29, 30], así como la excelente reseña [31] y las referencias que hay allí).

Consideremos la función de partición en el toro de la cuerda IIB en D dimensiones (dejamos los detalles para la referencia [2] y los ejemplos explícitos para la sección siguiente). Esquemáticamente se la define como

$$\mathcal{Z}_T(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{a,b} \chi_a(\tau) \mathcal{N}^{ab} \bar{\chi}_b(\bar{\tau}) \tag{2.1}$$

donde los caracteres de los modos izquierdos $\chi_a(\tau) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}a} q^{L_0 - \frac{c}{24}}$, con $q = e^{2i\pi\tau}$, generan una representación del grupo modular del toro generado por las transformaciones S: $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ y T: $\tau \to \tau + 1$. $\mathcal{H}_a$ es el espacio de Hilbert de la teoría de campos conforme con carga central $c = 15$ generado a partir de un estado primario conforme ϕ_a (y de forma similar para el álgebra de los modos derechos).

En particular $\chi_a(-\frac{1}{\tau}) = S_{aa'} \chi_{a'}(\tau)$ y la invariancia modular requiere $S \mathcal{N} S^{-1} = \mathcal{N}$. Genéricamente los caracteres pueden separarse en una parte de espaciotiempo, que contribuye con $c_{st} = \bar{c}_{st} = \frac{3}{2} D$ y un sector interno con $c_{int} = \bar{c}_{int} = \frac{3}{2}(10 - D)$. Buscamos teorías con simetría izquierda–derecha, por lo que también debemos pedir $\mathcal{N}^{ab} = \mathcal{N}^{ba}$.

Sea Ω el operador que invierte el orden (*de orientifolio*), que permuta los modos izquierdos y derechos. Para dividir por la simetría izquierda–derecha se introduce el operador de proyección $\frac{1}{2}(1 + \Omega)$ en la función de partición del toro. La amplitud de vacío resultante es

$$\mathcal{Z}_\Omega(\tau, \bar{\tau}) = \mathcal{Z}_T(\tau, \bar{\tau}) + \mathcal{Z}_K(\tau - \bar{\tau}) \quad . \tag{2.2}$$

El primer término es sólo la simetrización (o anti–simetrización en caso que los estados anticonmuten) de las contribuciones de los estados izquierdos y derechos, lo que indica que dos estados que difieran en el orden izquierdo–derecho deben ser contados sólo una vez. El segundo término es la contribución de la botella de Klein, y tiene en cuenta los estados que son iguales en ambos sectores. En este caso, el operador $e^{2i\pi\tau L_0} e^{-2i\pi\bar{\tau}\bar{L}_0}$, cuando actúa en los mismos estados, se transforma en $e^{2i\pi 2it_K L_0}$ con

$\tau - \bar{\tau} = 2it_K$ y así

$$\mathcal{Z}_K(2it_K) = \frac{1}{2}\sum_a \mathcal{K}^a \chi_a(2it_K) \quad , \tag{2.3}$$

donde $|\mathcal{K}^a| = \mathcal{N}^{aa}$ (hay libertad en la elección del signo en esta definición, la que fijamos imponiendo las condiciones de consistencia [22, 23, 42]). La amplitud de la botella de Klein en el *canal transverso* se obtiene haciendo una transformación modular S tal que

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2}\sum_a O_a^2 \chi_a(il) \tag{2.4}$$

con $l = \frac{1}{2t_K}$ y

$$O_a^2 = 2^D \mathcal{K}^b S_{ba} \quad . \tag{2.5}$$

Esta notación para los coeficientes del canal cerrado resaltan el hecho de que el canal transverso de la botella de Klein representa una cuerda cerrada propagándose entre dos *crosscaps* (planos orientifolios) que actúan como bordes. Esta amplitud debe ser integrada sobre las longitudes del tubo. Dado que los estados de cuerda cerrada de masa m contribuyen como e^{-lm^2} en el carácter, se concluye que los estados de masa cero producirán genéricamente divergencias tipo tadpole en el límite $l \to \infty$. Mientras que los estados de masa cero NSNS pueden ser presumiblemente interpretados como redefiniciones del fondo [24, 25], los tadpoles RR llevan, como fue mencionado, a inconsistencias inevitables. Notemos que O_a es la carga que tiene el plano orientifolio (crosscap) frente a estos campos RR presentes en χ_a.

Para obtener una teoría consistente, se puede incluir un sector de cuerda abierta con D–branas que tengan carga RR $-O_a$ [29, 30] (véase también [26, 27, 28, 31]), para que se anule la carga total.

Debe introducirse una amplitud en el cilindro de cuerda abierta, que representa cuerdas propagándose entre planos orientifolios y D–branas. En el límite de tubo largo, la suma de las contribuciones de la botella de Klein, el cilindro y la cinta de Möbius en el canal transverso debe factorizarse como

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) + \tilde{\mathcal{Z}}_M(il) + \tilde{\mathcal{Z}}_C(il) \to \sum_a (O_a + D_a)^2 \frac{1}{{m_a}^2} = \sum_a (O_a^2 + 2O_a D_a + D_a^2)\frac{1}{{m_a}^2} \tag{2.6}$$

donde m_a es la masa del estado en χ_a. Para campos RR de masa cero, D_a es la carga RR de la D–brana, y la ausencia de divergencia requiere

$$O_a + D_a = 0 \quad . \tag{2.7}$$

La forma genérica de la amplitud de cilindro en el canal directo debe ser

$$\mathcal{Z}_C(it_C) = \frac{1}{2}\sum_a \mathcal{C}_a \chi_a(it_C) \quad , \tag{2.8}$$

donde

$$\mathcal{C}_a = C_{jka} n_j n_k \tag{2.9}$$

representa la multiplicidad de estados contenidos en $\chi_a(it)$ y n_j, n_k son las multiplicidades de los Chan–Paton. n_j puede ser interpretado como el número de branas de tipo j donde los extremos de la cuerda deben pegarse[1]. $\sum_j n_j = N_B$ es el número total de D–branas. Mencionemos que, en general, mientras que el índice a corre sobre varias representaciones conformes de peso máximo que definen los caracteres χ_a, los índices j no están necesariamente en relación uno a uno con ellos. Sin embargo, sí hay una tal correspondencia para los invariantes conjugados de carga [37, 29, 30].

Los C_{ija} deben, por lo tanto, ser enteros positivos. De hecho, como discutimos más abajo, las únicas posibilidades son $C_{ija} = 0, 1, 2$. La representación en el canal transverso de esta amplitud es

$$\tilde{\mathcal{Z}}_C(il) = \frac{1}{2} \sum_a D_a^2 \chi_a(il) \tag{2.10}$$

con $D_a = D_{ja} n_j$ y

$$(D_{ja} n_j)^2 = \mathcal{C}_b S_{ba} = C_{jkb} n_j n_k S_{ba} \quad . \tag{2.11}$$

La amplitud de la cinta de Möbius presenta algunas sutilezas adicionales, dado que el *moduli* $it_M + \frac{1}{2}$ no es puramente imaginario. De hecho los caracteres están dados por

$$\chi_a^\Omega(it_M) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_a}(e^{\pi i t (L_0 - \frac{c}{24})} \Omega) = \chi_a(it_M + \tfrac{1}{2}) \quad , \tag{2.12}$$

y esto introduce signos relativos para las excitaciones de oscilador en los distintos niveles de masa, dando lugar a caracteres complejos (no reales). La amplitud en el canal directo toma la forma

$$\mathcal{Z}_M(it_M) = \frac{1}{2} \sum_a \mathcal{M}_a \hat{\chi}_a(it_M + \tfrac{1}{2}) \tag{2.13}$$

donde ahora

$$\mathcal{M}_a = M_{ja} n_j \tag{2.14}$$

son números enteros, y el "sombrero" en los caracteres indica que se les ha extraído la fase $e^{i\pi(h - c/24)}$ para hacerlos reales.

Los caracteres en los canales directo y transverso de la cinta de Möbius están relacionados por la transformación [29] P: $it_M + \frac{1}{2} \to \frac{i}{4t_M} + \frac{1}{2}$. Ésta puede ser generada a

[1] j debería presumiblemente tener una interpretación topológica, como es el caso para branas en singularidades de orbifold, donde etiqueta la monodromía de la singularidad.

partir de las transformaciones modulares S y T como $\mathsf{P} = \mathsf{T}\mathsf{S}\mathsf{T}^2\mathsf{S}$. La parte correspondiente al canal transverso, que representa una cuerda cerrada propagándose entre una D–brana y un plano orientifolio, es

$$\tilde{\mathcal{Z}}_M(il) = \frac{1}{2}\sum_a O_a(D_{ja}n_j)\hat{\chi}_a(il+\tfrac{1}{2}) \tag{2.15}$$

con

$$O_a(D_{ja}n_j) = 2^{\frac{D}{2}}\mathcal{M}_b P_{ba} = 2^{\frac{D}{2}} M_{jb}n_j P_{ba} \quad . \tag{2.16}$$

Notemos que la longitud del tubo $l = \frac{1}{2t_K} = \frac{1}{t_C} = \frac{1}{4t_M} = -\frac{1}{2\pi}\ln q$ debe ser la misma para que las distintas amplitudes de cuerda sean comparables. Se ve que de esta manera se obtiene la factorización correcta del canal cerrado en el límite de tubo largo ($\hat{\chi}_a(il+\frac{1}{2}) \to \chi_a(il)$)(2.6).

En las secciones siguientes aplicaremos esta construcción de descendientes abiertos a teorías IIB donde el sector interno está construido a partir de modelos de Gepner.

Antes de cerrar esta sección, hagamos unos comentarios acerca del espectro de cuerda abierta. Notemos que los coeficientes de $q^{m_a^2}$ en la expansión en q de las amplitudes de cilindro + cinta de Möbius en el canal directo, los que son proporcionales a

$$\frac{1}{2}[(C_{jka}n_jn_k) \pm (M_{ja}n_j)] \quad , \tag{2.17}$$

no son más que las multiplicidades de los campos de cuerda abierta de masa m_a. En principio, estas multiplicidades y las propiedades de transformación en el espaciotiempo de los correspondientes caracteres deberían permitirnos reconstruir el espectro. Notemos que los niveles par e impar en la cinta de Möbius difieren en signo, debido al factor 1/2 en el argumento del carácter.

Dado que, en la cuerda abierta, las representaciones del grupo de calibre están generadas por los índices de Chan–Paton en los dos extremos de la cuerda, se puede inferir que los únicos grupos permitidos son los simplécticos, ortogonales y/o unitarios[2, 31]. Por otro lado, sólo las representaciones adjunta (**Adj**), simétrica ($\square\!\square$), o antisimétrica ($\begin{smallmatrix}\square\\[-2pt]\square\end{smallmatrix}$) (y sus conjugadas) pueden construirse a partir de los factores de Chan–Paton que terminan en el mismo tipo de brana. La parte cuadrática de estas representaciones vienen de las contribuciones del cilindro, y por lo tanto esperamos que $C_{iia} = 0, 1, 2$. Recordemos también que, si se obtiene una representación simétrica (antisimétrica) en algún nivel de masa, entonces el siguiente nivel contendrá una antisimétrica (respectivamente simétrica), e irán así intercambiándose, debido a los signos alternados en la contribución de la cinta de Möbius.

Si estuvieran presentes dos grupos de calibre $G_i \times G_j$, pueden aparecer representaciones bifundamentales $[\,(\square_i, \bar{\square}_j)]$ correspondientes a extremos de la cuerda en dos conjuntos diferentes de D–branas n_i y n_j, y entonces $C_{jia} = 0, 1$. Los términos lineales en n_j en (2.17) que vienen de la cinta de Möbius deben completar las representaciones de dos índices, entonces $M_{ja} = 0, 1, -1$.

Por otro lado, para un a fijo, $C_{iia} = 2$ con el correspondiente coeficiente de la cinta de Möbius $M_{ia} = 0$, indica una representación adjunta de un $U(n_i)^2$. Similarmente si $C_{jia} = 1$ con $i \neq j$, entonces $M_{ja} = M_{ia} = 0$.

Una vez que se ha obtenido la función de partición de la botella de Klein a partir de función de partición de tipo IIB del toro con simetría izquierda–derecha, nuestra construcción del sector de cuerda abierta se basará completamente en

- Factorización
- Cancelación de los tadpoles RR de masa cero
- Restricciones por consistencia sobre los coeficientes enteros C_{jia} y M_{ja}.

2.3. Reseña de modelos de Gepner

Gepner ha mostrado cómo construir teorías de cuerda cerrada supersimétrica en cuatro dimensiones de espaciotiempo reemplazando la noción geométrica de enrollar las dimensiones extra en una variedad compacta interna por un procedimiento algebraico donde el sector interno consiste de un producto tensorial de modelos minimales superconformes $N = 2$ con carga central total $c_{int} = 9$ [8]. La supersimetría en el espaciotiempo y la invariancia modular se implementan manteniendo en el espectro sólo los estados para los que la carga total $U(1)$ es un entero impar. Repasemos brevemente la construcción de Gepner para fijar notación.

Una teoría de cuerdas consistente en D dimensiones de espaciotiempo requiere una teoría de campos conforme (CFT) interna con $c_{int} = 12 - \frac{3}{2}(D-2)$ en el calibre del cono de luz. La supersimetría $N = 1$ en el espaciotiempo se obtiene si la CFT interna tiene supersimetría $N = 2$. Los $(D-2)$ bosones y los fermiones X^μ, ψ^μ espaciotemporales definen una CFT con $c_{st} = \frac{3}{2}(D-2)$ y realizan un álgebra superconforme $N = 2$ para D par.

Los modelos de Gepner representan una construcción algebraica explícita de un vacío de cuerdas supersimétricas donde el sector interno está dado por el producto ten-

[2] En realidad, una vez que se ha identificado un grupo unitario, resulta útil reescribir el término n^2 como $n\bar{n}$ (véase por ejemplo [7]). Aún si, numéricamente, $n = \bar{n}$ esto nos permite distinguir las representaciones complejas

sorial de r copias de modelos minimales $N=2$ con niveles k_j, $j=1,\cdots,r$. Utilizando la relación entre la carga central y el nivel de Kac–Moody para los modelos minimales $N=2$

$$c=\frac{3k}{k+2} \quad , \quad k=1,2,\cdots \tag{2.18}$$

se pueden calcular los valores de los c_j.

Modelos Minimales Superconformes $N=2$

Escribamos por completitud el álgebra superconforme $N=2$ aquí

$$\begin{aligned}
[L_m,L_n] &= (m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}\\
[L_m,J_n] &= -nJ_{m+n}\\
\left[L_m,G_r^{\pm}\right] &= (\frac{m}{2}-r)G^{\pm}_{m+r}\\
[J_m,J_n] &= \frac{nc}{3}\delta_{n+m,0}\\
\left[J_m,G_r^{\pm}\right] &= \pm G^{\pm}_{m+r}\\
\{G_r^+,G_s^-\} &= 2L_{r+s}+(r-s)J_{r+s}+\frac{c}{3}(r^2-\frac{1}{4})\delta_{r+s,0}\\
\{G_r^+,G_s^+\} &= \{G_r^-,G_s^-\}=0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Los casos r,s entero o semi-entero corresponden a los sectores R o NS respectivamente. La simetría de flujo espectral del álgebra nos permite considerar sectores retorcidos que interpolan entre R y NS. De hecho los siguientes operadores

$$\begin{aligned}
&\tilde{L}_m = L_m+\frac{n}{2}J_m+\frac{c}{6}n^2\delta_{m,0}\\
&\tilde{G}_r^{\pm} = G^{\pm}_{r\pm\frac{n}{2}}\\
&\tilde{J}_m = J_m+\frac{c}{6}n\delta_{m,0} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

generan un álgebra $N=2$ isomorfa con la misma carga central, y donde $G_r^{\pm}\to G^{\pm}_{r\pm\frac{n}{2}}$.

Es bien sabido que las representaciones unitarias del álgebra $N=2$ superconforme ocurren para ciertos valores de la carga central. Para $c<3$ la serie minimal discreta está dada por (2.18). Los campos primarios de los modelos minimales son etiquetados por tres enteros (l,q,s) tales que $l=0,1,\cdots$; $l+q+s=0$ mod 2 y pertenecen a los sectores NS o R cuando $l+q$ es par o impar respectivamente. La dimensión y la carga conforme de los estados de peso máximo están dadas por

$$\Delta_{l,q,s}=\frac{l(l+2)-q^2}{4(k+2)}+\frac{s^2}{8} \quad \mod 1 \tag{2.21}$$

$$Q_{l,q,s}=-\frac{q}{k+2}+\frac{s}{2} \quad \mod 2 \quad . \tag{2.22}$$

Dos representaciones etiquetadas por (l', q', s') y (l, q, s) son equivalentes *i.e.* corresponden al mismo estado, si

$$l' = l \quad , \quad q' = q \bmod 2(k+2) \quad , \quad s' = s \bmod 4 \quad . \tag{2.23}$$

o

$$l' = k - l \quad , \quad q' = q + k + 2 \quad , \quad s' = s + 2 \tag{2.24}$$

La dimensión y el peso conforme exactos de los estados de peso máximo en la representación (l, q, s) se obtienen de las ecuaciones (2.21) y (2.22) usando las identificaciones anteriores para llevar (l, q, s) al *rango estándar*, dado por

$$l = 0, 1, \cdots, k \quad ; \quad |q - s| \leq l \quad ; \quad l + q + s = 0 \bmod 2 \tag{2.25}$$

y que $|s|$ tome su valor mínimo entre los de (2.23) y (2.24).

Los campos primarios obedecen las desigualdades

$$\Delta_{l,q,s} \geq \frac{|Q_{l,q,s}|}{2} \tag{2.26}$$

para las representaciones con s par (sector NS), mientras que las de s impar (sector R) satisfacen

$$\Delta_{l,q,s} \geq \frac{c}{24} \quad . \tag{2.27}$$

La operación de retorcimiento (2.20) corresponde a aplicar n veces las transformaciones $q \to q + 1$, $s \to s + 1$. Las dimensiones y cargas conformes de los campos en el sector retorcido n-ésimo, cuando ambos l, q, s y $l, q+n, s+n$ están en el rango estándar, se obtienen de

$$\begin{aligned} \Delta_{l,q+n,s+n} &= \Delta^n_{l,q,s} = \Delta^0_{l,q,s} + \frac{n}{2} Q^0_{l,q,s} + n^2 \frac{c}{24} \\ Q_{l,q+n,s+n} &= Q^n_{l,q,s} = Q^0_{l,q,s} + n\frac{c}{6} \quad . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Notemos que n par interpola entre sectores del mismo tipo, mientras que n impar intercambia los sectores R y NS. Cuando la transformación $q \to q + n, s \to s + n$ los lleva fuera del rango estándar, las expresiones para la dimensión y carga conformes difieren de las de (2.28) en un entero y en un entero par respectivamente. Por otro lado las identificaciones (2.23) implican que se vuelve a la representación original después de retorcer $n = 2(k + 2)$ veces para k par y $n = 4(k + 2)$ veces para k impar. Un caso particular está dado por $l = k/2$ para k par, donde la identificación (2.24) implica que la representación se vuelve a obtener para $n = k + 2$.

La función de partición de los modelos minimales en el toro puede escribirse en términos de los caracteres de las representaciones irreducibles como

$$\mathcal{Z}_T^{(m.m.)}(\tau) = \sum_{(l,q,s),(\bar{l},\bar{q},\bar{s})} \mathcal{N}_{(l,q,s),(\bar{l},\bar{q},\bar{s})} \chi_{(l,q,s)}(\tau,0) \chi^*_{(\bar{l},\bar{q},\bar{s})}(\bar{\tau},0) \tag{2.29}$$

donde los coeficientes $\mathcal{N}_{(l,q,s),(\bar{l},\bar{q},\bar{s})}$ son enteros no negativos que cuentan el número de veces que la representación irreducible $(l,q,s) \otimes (\bar{l},\bar{q},\bar{s})$ está contenida en $\mathcal{H}$. La existencia de un estado base único requiere que $\mathcal{N}_{(0,0,0),(0,0,0)} = 1$. Los caracteres en el sector $\mathcal{H}_{(l,q,s)}$ están dados por

$$\chi_{(l,q,s)}(\tau,z) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{(l,q,s)}} \left(e^{2\pi i \tau (L_0 - \frac{c}{24})} e^{2\pi i z J_0} \right) \tag{2.30}$$

en el sector holomorfo sin retorcer, y por

$$\chi_{(l,q+n,s+n)}(\tau,z) \equiv \mathbf{Q}^n \chi_{(l,q,s)}(\tau,z) \tag{2.31}$$

en el sector holomorfo retorcido por n, donde $\mathbf{Q}$ es el operador que interpola entre sectores NS y R, y similarmente para la parte antiholomorfa.

El espacio de Hilbert puede descomponerse en dos subespacios $\mathcal{H}_{(l,q)} = \mathcal{H}_{(l,q,s)} + \mathcal{H}_{(l,q,s+2)}$, donde cada subespacio es generado aplicando un número par de veces de $G_r^{\pm}$ a los campos "primarios" $|\Psi_{(l,q,s)}>$ y $|\Psi_{(l,q,s+2)}>$. Ambos subespacios están relacionados por la acción de un $G^{\pm}$. Por esto es conveniente definir

$$\chi_{l,q}(\tau,z) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{l,q}} (e^{2\pi i (L_0 - \frac{c}{24})\tau} e^{2\pi i J_0 z}) = \chi_{(l,q,s)}(\tau,z) + \chi_{(l,q,s+2)}(\tau,z) \quad . \tag{2.32}$$

Expresiones y propiedades explícitas de los caracteres de los modelos minimales superconformes $N = 2$ están incluidos en el apéndice 7.1.

El carácter $\chi_{l,q}$ con $l+q$ par contiene dos familias de estados con "primarios" (l,q,s) y $(l,q,s+2)$ cuyas dimensiones conformes difieren por $1/2$. Siempre se puede elegir $s = 0$ de modo que el "primario" con menor dimensión conforme (el verdadero primario) tenga (l,q,s) en el rango estándar. Este estado tiene dimensión y pesos conformes dados por (2.21) y (2.22). Para el otro "primario", $|s| \geq 2$.

En el sector R los dos estados de pesos máximo tienen la misma dimensión conforme, y sus cargas difieren en uno, salvo cuando una de las dimensiones conformes es $c/24$. Siempre es posible elegir $s = -1$ para la representación en la que el estado de peso máximo tiene menor carga. Así la dimensión y la carga conformes de este estado son

$$\begin{aligned} \Delta_{l,q} &= \frac{l(l+2)-q^2}{4(k+2)} + \frac{1}{8} \quad ; \quad Q_{l,q} = -\frac{q}{k+2} - \frac{1}{2} \\ l+q &\in 2\,\mathbb{Z}+1, \quad -l-1 \leq q \leq l-1 \quad . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Cuando $q \neq -l-1$ ($\Delta_{l,q} > \frac{c}{24}$) el estado de peso máximo puede obtenerse eligiendo $s=1$, tiene la misma dimensión conforme que (l,q,s) pero su carga es $Q_{l,q}+1$, mientras que para $q=-l-1$ ($\Delta_{l,q} = \frac{c}{24}$), la dimensión conforme es $\Delta_{l,q}+1$.

De las relaciones de equivalencia (2.23) y (2.24) se pueden demostrar las siguientes identidades

$$\chi_{l,q}(\tau,z) = \chi_{k-l,q+k+2}(\tau,z) = \chi_{l,q+2(k+2)}(\tau,z) \quad . \tag{2.34}$$

Los caracteres conjugados de carga contienen estados de peso máximo con cargas $Q_{l,q}$ y $Q_{l,-q}$ que satisfacen

$$\chi_{l,q}(\tau,z) = \chi_{l,-q}(\tau,-z) \quad . \tag{2.35}$$

Las transformaciones modulares envían un sector en otro, entonces la invariancia modular requiere considerar los cuatro sectores NS$^\pm$, R$^\pm$, definidos como

$$\begin{aligned} \chi^{NS^\pm}_{l,q} &= \frac{1}{2}(\chi_{(l,q,0)} \pm \chi_{(l,q,2)}) && (2.36)\\ \chi^{R^\pm}_{l,q} &= \frac{1}{2}(\chi_{(l,q-1,-1)} \pm \chi_{(l,q-1,1)}) \quad . && (2.37)\end{aligned}$$

Notemos que $\chi^{NS^+}_{l,q} = \chi_{l,q}$. Todos ellos pueden escribirse en términos de $\chi^{NS^+}_{l,q}$ desplazando el argumento z

$$\begin{aligned} \chi^{NS^-}_{l,q}(\tau,z) &= e^{-\pi i Q}\chi^{NS^+}_{l,q}(\tau, z+\tfrac{1}{2}) \\ \chi^{R^+}_{l,q}(\tau,z) &= e^{2\pi i\tau c/24}e^{2\pi i z c/6}\chi^{NS^+}_{l,q-1}(\tau, z+\tfrac{1}{2}\tau) \\ \chi^{NS^-}_{l,q}(\tau,z) &= e^{-\pi i Q}e^{2\pi i\tau c/24}e^{2\pi i z c/6}\chi^{NS^+}_{l,q-1}(\tau, z+\tfrac{1}{2}\tau+\tfrac{1}{2}) \quad . \end{aligned} \tag{2.38}$$

Bajo S: $\tau \to -\frac{1}{\tau}$, los caracteres minimales $\chi_{l,q}$ con $l+q$ par transforman como

$$\chi_{l,q}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{2\pi i\frac{z^2 c}{6\tau}}\sum_{l',q'} S_{l,q;l',q'}\chi_{l',q'}(\tau,z) \quad , \tag{2.39}$$

o equivalentemente como

$$\chi_{l,q}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{2\pi i\frac{z^2 c}{6\tau}}\sum_{l',q'} S^{-1}_{l,q;l',q'}\chi_{l',q'}(\tau,-z) \tag{2.40}$$

donde la matriz S está dada por

$$S_{l,q;l',q'} \equiv \frac{2}{(k+2)}e^{\pi i\frac{qq'}{k+2}}\sin(\pi\frac{(l+1)(l'+1)}{k+2}) \tag{2.41}$$

(para $(l+q)$ par). Se verifica la siguiente igualdad

$$S_{l,q;l',q'} = S_{k-l,q+k+2;l',q'} \quad . \tag{2.42}$$

Aplicando la transformación S dos veces se obtiene

$$\chi_{l,q}(\tau,z)=\sum_{l',q'} S^2_{l,q;l',q'}\chi_{l',q'}(\tau,-z) \tag{2.43}$$

con la que se llega a la matriz de *conjugación de carga*

$$S^2 = C \quad , \quad C_{l,q;l',q'} = \delta_{l,q;l',-q'} \quad .$$

Usando las expresiones explícitas de los caracteres es fácil verificar que S actúa de la siguiente manera: $\mathrm{NS}^+ \to \mathrm{NS}^+$, $\mathrm{NS}^- \leftrightarrow \mathrm{R}^+$, $\mathrm{R}^- \to \mathrm{R}^-$. A su vez bajo $\mathsf{T} : \tau \to \tau + 1$ los caracteres transforman así

$$\begin{aligned}\chi^{NS^+}_{l,q}(\tau+1,z) &= e^{2\pi i(\Delta_{l,q}-\frac{c}{24})}\chi_{l,q,0}(\tau,z) + e^{2\pi i(\Delta_{l,q}+\frac{\mathrm{impar}}{2}-\frac{c}{24})}\chi_{l,q,2}(\tau,z+\tfrac{1}{2})\\ &= e^{2\pi i(\Delta_{l,q}-\frac{c}{24})}\chi^{NS^-}_{l,q}(\tau,z)\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\chi^{NS^-}_{l,q}(\tau+1,z) = e^{2\pi i(\Delta_{l,q}-\frac{c}{24})}\chi^{NS^+}_{l,q}(\tau,z) \tag{2.45}$$

$$\chi^{R^\pm}_{l,q}(\tau+1,z) = e^{2\pi i(\Delta_{l,q-1,-1}-\frac{c}{24})}\chi^{R^\pm}_{l,q}(\tau,z) = e^{2\pi i(\Delta_{l,q}-\frac{Q_{l,q}}{2})}\chi^{R^\pm}_{l,q}(\tau,z) \tag{2.46}$$

por lo que T: $\mathrm{NS}^\pm \to \mathrm{NS}^\mp$; $\mathrm{R}^\pm \to \mathrm{R}^\pm$.

2.3.1. Cuerdas N = 2

Una teoría de cuerdas de dimensión D se obtiene haciendo el producto tensorial de r CFT superconformes $N=2$ internas tales que $\sum_{i=1}^r c_i = 12-\frac{3}{2}(D-2)$ y agregándole la contribución de espaciotiempo. Empecemos repasando la parte de espaciotiempo.

Los $(D-2)$ bosones y fermiones de espaciotiempo realizan un álgebra superconforme (2,2). Los fermiones $\psi^\mu(z)$ ($\mu = 1,\cdots,D-1$) exhiben una simetría $SO(D-2)$ que requiere que los estados estén en una representación unitaria del álgebra de Lorentz afín transversa a nivel $k=1$. Éstas son las representaciones escalar, vector, espinor y espinor conjugado etiquetadas respectivamente por $\lambda = 0,2,1,-1$. La contribución de cada par de dimensiones transversas a los caracteres de espaciotiempo son

$$\begin{aligned}\Upsilon_{0(2)}(\tau,z) &= \frac{1}{2\eta(\tau)^3}\left(\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau,z) \pm \vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(\tau,z)\right)\\ \Upsilon_{1(-1)}(\tau,z) &= \frac{1}{2\eta(\tau)^3}\left(\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}(\tau,z) \mp i\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(\tau,z)\right) \quad .\end{aligned} \tag{2.47}$$

donde los signos superiores (inferiores) corresponden al primer (segundo) subíndice en el carácter. Las dimensiones y cargas conformes de espaciotiempo de los estados son

$$\Delta_{st} = \frac{\lambda^2}{8} \quad , \quad Q_{st} = \frac{\lambda}{2} \quad , \tag{2.48}$$

y la identificación de campos es $\lambda' = \lambda \bmod 4$.

Similarmente a (2.36) y (2.37) definimos para cada par de dimensiones transversas

$$\chi^{NS^\pm}(\tau, z) = \Upsilon_0(\tau, z) \pm \Upsilon_2(\tau, z) \quad ; \quad \chi^{R^\pm}(\tau, z) = \Upsilon_{-1}(\tau, z) \pm \Upsilon_1(\tau, z) \quad , \tag{2.49}$$

y se puede ver de (2.47) que $\chi^{R^-}(\tau, 0) \equiv 0$. Denotamos a los caracteres de espaciotiempo en el sector retorcido ν-veces por

$$\chi_\nu(\tau, z) = \Upsilon_{0+\nu}(\tau, z) + \Upsilon_{2+\nu}(\tau, z) \quad . \tag{2.50}$$

Notemos que $\chi_\nu(\tau, z) = \chi^{NS^+}(\tau, z)$ si ν es par y $\chi_\nu(\tau, z) = \chi^{R^+}(\tau, z)$ si ν es impar.

La transformación modular S sobre estos caracteres de espaciotiempo se reduce a

$$\chi^{NS^+}(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}) \quad = \quad \frac{e^{2\pi i \frac{z^2 c_{st}}{6\tau}}}{-i\tau} S_{st} \chi^{NS^+}(\tau, z) \quad ,$$

donde $c_{st} = \frac{3}{2}(D-2)$ y $S_{st} = 1$.

Juntando todo, el carácter asociado a un estado primario de la teoría completa está dado por el producto de las contribuciones de espaciotiempo y las r teorías internas. Para obtener supersimetría $N = 1$ en la hoja de mundo, todos los estados en el producto deben pertenecer a un sector definido, *i.e.* los estados NS (R) deben ser multiplicados sólo con estados NS (R). La invariancia modular requiere que la carga total $U(1)$ sea impar. Estas condiciones llevan al carácter siguiente

$$\chi_{\vec{\alpha}}(\tau, z) \equiv \hat{\mathcal{P}}_{GSO}\{\chi'_{\vec{\alpha}}(\tau, z)\} \equiv \hat{\mathcal{P}}_{GSO}\{[\chi_\nu(\tau, z)]^d \prod_{i=d+1}^{d+r} \chi_{\alpha_i}(\tau, z)\} \tag{2.51}$$

donde $[\chi_\nu(\tau, z)]^d$ es el carácter de espaciotiempo de D dimensiones con $d = \frac{(D-2)}{2}$. Aquí $\vec{\alpha}$ es vector de $(d+r)$ componentes con entradas $\alpha_i = \nu$ para $i = 1, \cdots, d$ y $\alpha_i = (l_i, q_i)$ para $i = d+1, \cdots, d+r$ que denota el estado primario completo (producto de teorías internas y de espaciotiempo) tales que ambos $l_i + q_i$ y ν son pares o impares. Con $\hat{\mathcal{P}}_{GSO}$ denotamos la proyección GSO generalizada sobre estados con carga $U(1)$ impar.

La acción del operador de supersimetría sobre la teoría producto puede ser expresada más convenientemente introduciendo un vector $\vec{\alpha}^{(n)}$ con componentes $\alpha_i^{(n)} = \nu + n$ para $i = 1, \cdots, d$ y $\alpha_i^{(n)} = (l_i, q_i + n)$ para $i = d+1, \cdots, d+r$ como

$$\mathbf{Q}^n \chi_{\vec{\alpha}}(\tau, z) = \chi_{\vec{\alpha}^{(n)}}(\tau, z) \quad . \tag{2.52}$$

Notar que si α_i denota un estado en el sector NS, entonces $\alpha_i^{(n)}$ y por lo tanto $\vec{\alpha}$ corresponden al sector NS.

La supersimetría $N = 1$ en el espaciotiempo requiere sumar sobre todos los sectores retorcidos. Dada la identificación de estados, esta suma se reduce a una sobre $n \bmod 2m$ donde m es el *m.c.m.* de todos los $k_i + 2$ en el producto. Finalmente el carácter *supersimétrico* está dado por (ver apéndice 7.1)

$$\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(\tau, z) = \sum_{n=0}^{2m-1} (-1)^n \chi_{\vec{\alpha}^{(n)}}(\tau, z) = \tag{2.53}$$
$$= \frac{1}{2m} \sum_{n,p \bmod 2m} (-1)^{n+p} e^{2\pi i (n^2 \frac{c}{24}\tau + n\frac{c}{6}z)} \left[\chi_0(\tau, z + \frac{n}{2}\tau + \frac{p}{2})\right]^d \prod_{i=1}^{r} \chi_{l_i,q_i}(\tau, z + \frac{n}{2}\tau + \frac{p}{2})$$

con $c = 12$. Los sectores NS o R se obtienen cuando se suma sobre n par o impar respectivamente, y los caracteres periódicos $(+)$ o antiperiódicos $(-)$ aparecen cuando se suma sobre p par o impar, respectivamente.

Con este resultado, el sector abierto se puede escribir fácilmente, en forma explícitamente supersimétrica, como combinación lineal de estos caracteres.

Discutamos algunas propiedades de los caracteres contenidos en $\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(\tau)$. Es conveniente introducir la siguiente notación: $\vec{\beta}$ es un vector de $d + r$ componentes con entradas $\beta_i = \lambda_i$ para $i = 1, \cdots, d$ y $\beta_i = (l_i, q_i, s_i)$ para $i = d+1, \cdots, d+r$, y tal que $l_i + q_i + s_i$ y λ_i son ambos pares o impares. Análogamente se puede definir el vector $\vec{\beta}^{(n)}$ obtenido como $\lambda_i, q_i, s_i \to \lambda_i + n, q_i + n, s_i + n$. Debido a la proyección GSO generalizada los estados contenidos en los caracteres $\chi_{\vec{\alpha}}^{NS}$ y $\chi_{\vec{\alpha}}^{R}$ llevan un índice $\vec{\beta}$ tal que $Q_{\vec{\beta}^{(n)}}$ es impar ($Q_{\vec{\beta}} = \sum_{i=1}^{d+r} Q_{\beta_i}$). Antes de proyectar por GSO, las cargas de los estados contenidas en el carácter están todas relacionadas por

$$Q_{\vec{\beta}^{(n)}} = Q_{\vec{\beta}} + 2n \mod 2 \tag{2.54}$$

y por lo tanto todos los estados proyectados por GSO en $\chi_{\vec{\alpha}^{(n)}}$ para un dado n pueden obtenerse retorciendo el producto de estados para $n = 0$ proyectado por GSO.

La dimensión conforme total de los campos en el sector retorcido n-ésimo está dada por

$$\Delta_{\vec{\beta}^{(n)}} = \Delta_{\vec{\beta}} + \frac{n}{2} Q_{\vec{\beta}} + \frac{n^2}{2} \mod 1 \tag{2.55}$$

donde $\Delta_{\vec{\beta}} = \sum_{i=1}^{d+r} \Delta_{\beta_i}$. Notemos que la suma de las dimensiones conformes de los estados sin retorcer después de ser proyectados por GSO difieren en un entero de la suma de las dimensiones conformes de los estados retorcidos n veces (dado que $\frac{n}{2}(Q_{\vec{\beta}}+n)$ es entero para $Q_{\vec{\beta}}$ impar). Entonces todos los estados obtenidos retorciendo un estado de carga $U(1)$ impar tienen una dimensión conforme que difiere en un entero de la del estado sin retorcer.

Comparemos ahora los estados proyectados por GSO en el sector NS etiquetado por los vectores $\vec{\beta}$ y $\vec{\beta}'$ que verifiquen $l_i = l'_i, q_i = q'_i$, $\lambda_i \neq \lambda'_i$ y $s_i \neq s'_i$. Las diferencias en sus dimensiones y cargas conformes están dadas por el número de estados con $s_i \neq 0$. De hecho, considerando que

$$\Delta_{\lambda+2} - \Delta_\lambda = \frac{1+\nu}{2} \mod 1 \quad ; \quad Q_{\lambda+2} - Q_\lambda = 1 \mod 2$$
$$\Delta_{l,q,s+2} - \Delta_{l,q,s} = \frac{1+l+q+s}{2} \mod 1 \quad ; \quad Q_{l,q,s+2} - Q_{l,q,s} = 1 \mod 2$$

es fácil ver que los estados con carga $U(1)$ impar verifican

$$\Delta_{\vec{\beta}'} - \Delta_{\vec{\beta}} \in Z \quad ; \quad Q_{\vec{\beta}'} - Q_{\vec{\beta}} = 0 \mod 2 \quad . \tag{2.56}$$

Concluimos que todos los estados contenidos en un dado $\chi^{susy}_{\vec{\alpha}}$ tienen dimensiones conformes dadas por $\Delta_{\vec{\beta}^{(n)}} - \frac{1}{2} = \Delta_{\vec{\beta}_0} - \frac{Q_{\vec{\beta}_0}}{2} \mod 1$ ($\vec{\beta}_0$ es el vector $\vec{\beta}$ con $s_i = 0$ para todo i). Dado $\Delta_{\vec{\beta}_0} = \Delta_{\vec{\alpha}}$ y $Q_{\vec{\beta}_0} = Q_{\vec{\alpha}}$, finalmente

$$\Delta_{\vec{\beta}^{(n)}} - \frac{1}{2} = \Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2} \mod 1 \tag{2.57}$$

donde $\vec{\alpha} \in$ NS. Esta relación es importante porque da las dimensiones conformes del producto de estados proyectado por GSO (módulo un entero) a partir de las dimensiones y cargas conformes de los estados de peso máximo en el carácter no proyectado $\prod_i \chi_{\alpha_i}$.

Tomando en cuenta que $\chi^{susy}_{\vec{\alpha}}$ contiene la suma sobre todos los sectores retorcidos y que todos los $\chi^{susy}_{\vec{\alpha}^{(n)}}$ con n par contienen las mismas representaciones, se verifican las siguientes identidades

$$\chi^{R/NS}_{\vec{\alpha}^{(n)}}(\tau, z) = \chi^{R/NS}_{\vec{\alpha}}(\tau, z) \quad ; \quad \chi^{\pm}_{\vec{\alpha}^{(n)}}(\tau, z) = \chi^{\pm}_{\vec{\alpha}}(\tau, z) \quad . \tag{2.58}$$

Se puede entonces elegir un $\vec{\alpha}$ representativo de todos los vectores equivalentes ante retorcimientos y el número de caracteres independientes se reduce por m para cada sector R o NS. Una excepción importante es cuando uno de los k_i es par: si $\vec{\alpha}$ contiene a $l_i = \frac{k_i}{2}$ para cada k_i par, entonces el número de caracteres supersimétricos relacionados por retorcimientos es $m/2$ y los estados con $l_i = \frac{k_i}{2}$ aparecen dos veces en la suma sobre n desde 0 hasta $2m - 1$. A éstos los llamaremos *vectores cortos.*

Las siguientes relaciones entre los caracteres supersimétricos se obtienen de la identidad (2.35) entre caracteres conjugados de carga para cada modelo minimal

$$\chi^{NS/R}_{\vec{\alpha}}(\tau, z) = \chi^{NS/R}_{\overline{(\vec{\alpha})}}(\tau, -z) \tag{2.59}$$

donde $\overline{(\vec{\alpha})}$ es el vector que se obtiene reemplazando q_i por $-q_i$ en $\vec{\alpha}$.

Las transformaciones modulares de los caracteres supersimétricos están discutidas en el apéndice 7.1.

2.4. Supercuerdas tipo I en puntos de Gepner

El espectro de estados de cuerda cerrada perturbativa tipo II en los modelos de Gepner está contenido en la función de partición completa supersimétrica e invariante modular para cuerdas $N = 2$, la que se obtiene combinando los sectores izquierdo y derecho así

$$\mathcal{Z}_T(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{\vec{\alpha};\vec{\bar{\alpha}}} \mathcal{N}_{\vec{\alpha};\vec{\bar{\alpha}}} \chi^{susy}_{\vec{\alpha}}(\tau, 0) \chi^{susy\,*}_{\vec{\bar{\alpha}}}(\bar{\tau}, 0) \quad , \tag{2.60}$$

e integrando sobre τ con la medida apropiada

$$\mathsf{Z}_T = \int \frac{d\tau d\bar{\tau}}{(\mathrm{Im}\tau)^2} \mathcal{Z}_T(\tau, \bar{\tau}) \quad . \tag{2.61}$$

Aquí los coeficientes $\mathcal{N}_{\vec{\alpha},\vec{\bar{\alpha}}}$ son enteros positivos y se obtienen del producto $\prod_{i=1}^{r} \mathcal{N}_{\alpha_i;\bar{\alpha}_i}$ de los modelos minimales individuales. Éstos son tales que la función de partición es invariante modular.

En la siguiente sección construimos la función de partición para descendientes abiertos y/o no–orientados de las supercuerdas tipo IIB, *i.e.* las amplitudes de vacío de la botella de Klein, la cinta de Möbius y el cilindro, con especial atención a las posibles contribuciones de los tadpoles y sus cancelaciones.

2.4.1. Amplitud de la botella de Klein

La función de partición para la botella de Klein puede ser obtenida a partir de la del toro como se hizo en la sección 2. Integrando sobre t con la medida apropiada, la amplitud de vacío en el canal directo (cerrado) está dada por

$$\begin{aligned} \mathsf{Z}_K &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{4t} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{cl}} \left\{ \Omega \, \exp\left[2\pi i (\tau (L_0 - \frac{c}{24}) - \bar{\tau} (\bar{L}_0 - \frac{c}{24})) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{4t} \left(\frac{1}{4\pi^2 \alpha' t}\right)^{\frac{D}{2}} \mathrm{Tr}'_{\mathcal{H}_{cl}} \left\{ \exp\left[-4\pi t (L_0 - \frac{c}{24}) \right] \right\} \end{aligned} \tag{2.62}$$

donde Tr' denota la traza sobre los modos de oscilador discretos, y el factor $(4\pi^2\alpha' t)^{-D/2}$ viene de la integral sobre los modos cero bosónicos. La traza puede escribirse en términos de los caracteres supersimétricos $\chi^{susy}_{\vec{\alpha}}$ como

$$\mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}'_{\mathcal{H}_{cl}} \left\{ \exp\left[-4\pi t (L_0 - \frac{c}{24}) \right] \right\} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{\alpha}} \mathcal{K}_{\vec{\alpha}} \chi^{susy}_{\vec{\alpha}}(2it) \tag{2.63}$$

donde $|\mathcal{K}_{\vec{\alpha}}| = \mathcal{N}_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}}$.

La amplitud de la botella de Klein en el *canal transverso* se obtiene haciendo una transformación modular S

$$\begin{aligned}
\mathsf{Z}_K &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{4t}(\frac{1}{4\pi^2\alpha' t})^{\frac{D}{2}}\sum_{\vec{\alpha}}\mathcal{K}_{\vec{\alpha}}\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(2it) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(8\pi^2\alpha')^{\frac{D}{2}}}\int_0^\infty \frac{dl}{4l}2^D l^{\frac{D}{2}}\sum_{\vec{\alpha}}\mathcal{K}_{\vec{\alpha}}\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(\frac{i}{l}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(8\pi^2\alpha')^{\frac{D}{2}}}\int_0^\infty \frac{dl}{4}\tilde{\mathcal{Z}}_K(il)
\end{aligned} \tag{2.64}$$

donde $l = 1/2t$.

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2}\sum_{\vec{\alpha}} O_{\vec{\alpha}}^2\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(il) \tag{2.65}$$

representa una cuerda cerrada propagándose entre dos crosscaps (planos orientifolios) y

$$O_{\vec{\alpha}}^2 = 2^D\mathcal{K}^{\vec{\beta}}S_{\vec{\beta}\vec{\alpha}} \quad . \tag{2.66}$$

Como ya dijimos, genéricamente, los campos RR no masivos estarán presentes de manera que $\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) \propto O_{\vec{\alpha}}^2 q^0 + \cdots$ hará aparecer las indeseables divergencias cuando se integre sobre l. Por esto se tienen que incluir amplitudes de D–branas y los correspondientes sectores de cuerda abierta para cancelar estas divergencias.

2.4.2. El sector abierto: amplitudes de Cilindro y de cinta de Möbius

Veamos el sector abierto de la teoría. Aquí la función de partición toma la forma

$$\mathsf{Z}_{abierto} = \int_0^\infty \frac{dt}{4t}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_o}\left[\left(\frac{1+\Omega}{2}\right)e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})it}\right] = \mathsf{Z}_C + \mathsf{Z}_M \tag{2.67}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathsf{Z}_C &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{4t}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_o}\left[e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})it}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{4t}\ (\frac{1}{8\pi^2\alpha' t}\ )^{\frac{D}{2}}\mathrm{Tr}'_{\mathcal{H}_o}\left[e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})it}\right]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathsf{Z}_M &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{4t}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_o}\left[\Omega e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})it}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{4t}\ (\frac{1}{8\pi^2\alpha' t}\ )^{\frac{D}{2}}\mathrm{Tr}'_{\mathcal{H}_o}\left\{\exp\left[-2\pi t(L_0-\frac{c}{24})\right]\Omega\right\} \quad .
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Igual que antes, Tr' denota la traza sobre los modos discretos de oscilador, y el factor $(8\pi^2\alpha' t)^{-D/2}$ viene de la integral sobre los modos cero bosónicos. Las trazas pueden escribirse en términos de los caracteres supersimétricos $\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}$ así

$$\mathcal{Z}_C(it) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}'_{\mathcal{H}_o}\ [e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})it}\ ] = \frac{1}{2}\sum_{\vec{\alpha}} \mathcal{C}_{\vec{\alpha}}\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(it) \tag{2.69}$$

$$\mathcal{Z}_M(it) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}'_{\mathcal{H}_o}\ [e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})it}\Omega\ ] = \frac{1}{2}\sum_{\vec{\alpha}} \mathcal{M}_{\vec{\alpha}}\hat{\chi}_{\vec{\alpha}}^{susy}(it+\tfrac{1}{2}) \tag{2.70}$$

donde

$$\mathcal{C}^{\vec{\alpha}} = C^{\vec{\alpha}}_{\vec{\alpha}',\vec{\alpha}''}n^{\vec{\alpha}'}n^{\vec{\alpha}''} \quad ; \quad \mathcal{M}_{\vec{\alpha}} = \sum_{\vec{\alpha}'} M_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'}n^{\vec{\alpha}'} \tag{2.71}$$

representa la multiplicidad de los estados contenidos en los caracteres y $n^{\vec{\alpha}}$ son las multiplicidades de los Chan–Paton (ver la discusión más abajo(2.8)). Los $C^{\vec{\alpha}}_{\vec{\alpha}'\vec{\alpha}''}$ deben entonces ser enteros positivos, mientras que $M_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'}$ son enteros. Los caracteres *con sombrero* de la cinta de Möbius se definen así

$$\hat{\chi}_{\vec{\alpha}}^{susy}(it+\tfrac{1}{2}) = e^{-i\pi(\Delta_{\vec{\alpha}}-\frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})}\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(it+\tfrac{1}{2}) \tag{2.72}$$

donde se ha extraído una fase para hacerlos reales (ver apéndice 7.1).

Podemos proceder a escribir este tipo de amplitudes en el canal transverso, para estudiar la factorización y la cancelación de tadpoles. Para expresar estas amplitudes en términos de una longitud de tubo $l = -\frac{1}{2\pi}\log q$ común a todas, es necesario reescalear el parámetro t en cada una. Mientras que los caracteres en la amplitud del cilindro involucran sólo transformaciones S que relacionan los canales abierto y cerrado (ver (2.10)), los caracteres de la cinta de Möbius se evalúan en $it+\frac{1}{2}$, y entonces expresarlos en términos del parámetro l requiere la acción combinada de T y S [29, 30]. De hecho, para nuestros caracteres, se muestra en el apéndice 7.1 que tal transformación se consigue por medio de una matriz

$$\hat{P} = T^{(-1/2)}ST^2S^{-1}T^{(1/2)} \tag{2.73}$$

donde

$$T^{(1/2)}_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}} = e^{\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}}-\frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})} \tag{2.74}$$

es la fase introducida en (2.72), tal que los caracteres en los canales directo y transverso están relacionados por

$$\hat{\chi}_{\vec{\alpha}}^{NS/R}(it+\tfrac{1}{2}) = (2it)^d\hat{P}_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'}\hat{\chi}_{\vec{\alpha}'}^{NS/R}(\frac{i}{4t}+\frac{1}{2}) \quad . \tag{2.75}$$

Así

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Z}_C &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{4t}\left(\frac{1}{8\pi^2\alpha' t}\right)^{\frac{D}{2}} \sum_{\vec\alpha} \mathcal{C}_{\vec\alpha}\chi_{\vec\alpha}^{susy}(it) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(8\pi^2\alpha')^{\frac{D}{2}}}\int_0^\infty \frac{dl}{4}\sum_{\vec\alpha} \mathcal{C}_{\vec\alpha} S_{\vec\alpha\vec\alpha'}\chi_{\vec\alpha'}^{susy}(il)
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Z}_M &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{4t}\left(\frac{1}{8\pi^2\alpha' t}\right)^{\frac{D}{2}} \sum_{\vec\alpha} \mathcal{M}^{\vec\alpha}\hat\chi_{\vec\alpha}^{susy}(it+\tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(8\pi^2\alpha')^{\frac{D}{2}}}\int_0^\infty \frac{dl}{4} 2\times 2^{\frac{D}{2}}\sum_{\vec\alpha\vec\alpha'} \mathcal{M}^{\vec\alpha} i^d \hat P_{\vec\alpha\vec\alpha'}\hat\chi_{\vec\alpha'}^{susy}(il+\tfrac{1}{2})
\end{aligned} \tag{2.77}
$$

donde $d = (D-2)/2$.

La suma de las tres amplitudes en el canal transverso es

$$
\mathsf{Z}_K + \mathsf{Z}_C + \mathsf{Z}_M = -\frac{1}{2}\frac{1}{(8\pi^2\alpha')^{\frac{D}{2}}}\int_0^\infty \frac{dl}{4}\sum_{\vec\alpha} \quad \{ \quad O_{\vec\alpha}^2\chi_{\vec\alpha}(il) \; + \; D_{\vec\alpha}^2\chi_{\vec\alpha}(il) \tag{2.78}
$$

$$
+ 2\times 2^{\frac{D}{2}}\tilde{\mathcal{M}}_{\vec\alpha}\hat\chi_{\vec\alpha}(il+\tfrac{1}{2}) \; \} \quad . \tag{2.79}
$$

El requerimiento de reconstruir un cuadrado perfecto (la factorización en (2.6)) para $l \to \infty$ lleva a

$$
D_{\vec\alpha}^2 + 2\times 2^{\frac{D}{2}}\tilde{\mathcal{M}}_{\vec\alpha} \; + O_{\vec\alpha}^2 = \text{cuadrado perfecto} \quad . \tag{2.80}
$$

De hecho $2^{\frac{D}{2}}\tilde{\mathcal{M}}_{\vec\alpha} = \pm D_{\vec\alpha}O_{\vec\alpha}$ (recordemos que $D_{\vec\alpha}^2$ es un polinomio cuadrático en $n_{\vec\alpha}$ mientras que $\tilde{\mathcal{M}}_{\vec\alpha}$ es un polinomio lineal en $n_{\vec\alpha}$).

Por otro lado, para los caracteres transversos que contienen campos de RR, *i.e.* aquellos que se originan en los bloques periódicos del canal directo de la botella de Klein y el cilindro, y los del sector de R en el canal directo de la cinta de Möbius, debe satisfacerse la condición de carga RR cero (2.7).

2.5. Ejemplos en 8 dimensiones

Ilustraremos nuestra construcción a través de ejemplos explícitos en $D = 8$ dimensiones. En este caso $c_{int} = 3$ y hay sólo tres modelos de Gepner: 1^3, 1 4 y 2^2. Se sabe que estos modelos corresponden a compactificaciones en toros racionales específicos [8]. Resulta útil estudiarlos en detalle y buscar un conjunto exhaustivo de soluciones debido a su simplicidad, dado que involucran unos pocos bloques y k bajos (de modo que el número de estados es manejable). En esta sección nos concentraremos en el sector abierto. Los descendientes abiertos de compactificaciones toroidales han sido estudiados en [32] (ver también [33, 34] para otras perspectivas). Otros ejemplos en 6 y 4 dimensiones de espaciotiempo serán presentados en las secciones siguientes.

2.5.1. 1^3

Para el modelo minimal $k=1$, las etiquetas (l,q,s) que están en el rango estándar del sector NS son (0,0,0); (0,0,2); (1,1,0); (1,1,2); $(1,-1,0)$ y $(1,-1,2)$. Las dimensiones y cargas conformes correspondientes en todos los sectores retorcidos no equivalentes están en el cuadro siguiente

n	Representaciones	Δ	Q	n	Representaciones	Δ	Q
0	$(0,0,0)$	0	0	0	$(0,0,2)\ \sim(1,\pm3,\pm4)$	$\frac{3}{2}$	±1
1	$(0,1,1)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	1	$(0,1,3)\sim(1,-2,-3)$	$\frac{25}{24}$	$-\frac{5}{6}$
2	$(0,2,2)\sim(1,-1,0)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	2	$(0,2,4)\ \sim(1,-1,-2)$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
3	$(0,3,3)\sim(1,0,1)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	3	$(0,3,5)\ \sim(1,0,-1)$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$
4	$(0,4,4)\sim(1,1,2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	4	$(0,4,6)\sim(1,1,0)$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
5	$(0,5,5)\sim(1,2,3)$	$\frac{25}{24}$	$\frac{5}{6}$	5	$(0,5,7)\sim(0,-1,-1)$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{6}$

(2.81)

Hay tres modelos de Gepner que contienen sólo productos de modelos minimales $k=1$, a saber 1^r con $r=3,6$ y 9, los que definen teorías de cuerdas en 8, 6 y 4 dimensiones respectivamente. $\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}$ contiene factores N_1, N_2 y N_3 de $\chi_{(0,0)}$, $\chi_{(1,-1)}$ y $\chi_{(1,1)}$ respectivamente, de manera que $N_1+N_2+N_3=R$ y $Q_{\vec{\alpha}}=\frac{N_2-N_3}{3}\in\mathbb{Z}$. Cualquier permutación cíclica de (N_1,N_2,N_3) da origen al mismo $\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}$.

De acuerdo a (2.57) las dimensiones conformes de los estados contenidos en un dado $\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}$ son

$$\Delta_{\vec{\beta}^{(n)}}-\frac{1}{2}=\frac{N_3}{3}\mod 1 \quad . \tag{2.82}$$

La forma general de los estados es

$$[\prod_{i=1}^{d}(0)^{1-d_i}(2)^{d_i}](0,0,0)^{N_1-n_1}(0,0,2)^{n_1}(1,-1,0)^{N_2-n_2}(1,-1,2)^{n_2}(1,1,0)^{N_3-n_3}(1,1,2)^{n_3}$$

donde las primeras dos entradas se refieren a la etiqueta λ de la contribución de espaciotiempo, $d_i=0,1$ y $n_i=0,\cdots,N_i$. La condición de carga $U(1)$ impar resulta

$$\sum_{i=1}^{d}d_i+n_1-n_2+n_3+\frac{N_2-N_3}{3}\in 2\,\mathbb{Z}+1 \quad . \tag{2.83}$$

La relación (2.58) en el caso 1^3 implica que los dos caracteres son idénticos si se realizan los siguientes reemplazos en cada teoría interna $(0,0) \to (1,-1); (1,-1) \to (1,1); (1,1) \to (0,0)$. Por lo tanto hay tres caracteres supersimétricos en este modelo, a saber $\chi_A = \chi^{susy}_{(0,0)^3}$, $\chi_B = \chi^{susy}_{(0,0)(1,-1)(1,1)}$ y $\chi_C = \chi^{susy}_{(0,0)(1,1)(1,-1)}$. Donde, por ejemplo, (ver (2.53))

$$\chi_A = \chi^{susy}_{(0,0)^3} = \sum_{n,p \bmod 6} \frac{(-1)^{n+p}}{6} e^{2\pi i n^2 \frac{c}{24}\tau} \left[\chi_0(\tau, \frac{n}{2}\tau + \frac{p}{2})\right]^3 \chi^3_{(0,0)}(\tau, \frac{n}{2}\tau + \frac{p}{2}) \quad . \quad (2.84)$$

Notar que $\chi^3_{(0,0)}$ es una abreviatura que indica que el mismo carácter $\chi_{(0,0)}$ está siendo considerado en cada bloque interno. Las dimensiones conformes de los estados de peso máximo son $\Delta_A = \frac{1}{2}$ y $\Delta_B = \Delta_C = \frac{5}{6}$, respectivamente y las combinaciones de estados proyectados por GSO contenidos en estos caracteres están listadas en el apéndice 7.2. Notar, por ejemplo, que los estados $\chi^{susy}_{(0,0)^3}$ de masa cero generan la representación vectorial $D = 8$, $N = 1$ [3] [36].

Las matrices $S^{(1^3)}$ y $\hat{P}^{(1^3)}$ son

$$S^{(1^3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{P}^{(1^3)} = \frac{i^{-d}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{\pi i}{3}} & e^{\frac{\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{\pi i}{3}} & e^{-\frac{\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

con $d = (D-2)/2 = 3$.

Hay dos combinaciones de caracteres invariantes modulares a considerar en el toro, la diagonal y la conjugada de carga. Las discutiremos por separado.

i) Diagonal $(\mathbf{1_A})^\mathbf{3}$

Hay varias posibilidades para función de partición de la botella de Klein en el canal directo, a saber

$$\mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\left[\pm\chi_A(2it) \pm \chi_B(2it) \pm \chi_C(2it)\right] \quad . \quad (2.86)$$

[3] A saber, contiene las representaciones $1 + 1 + 6 + 4 + 4'$ del grupo pequeño $SO(6)$

Empecemos con todos los signos positivos. La función de partición en el canal transverso es

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2} 2^8 \sqrt[2]{3} \chi_A(il) \quad , \tag{2.87}$$

por lo que sólo el término

$$\tilde{\mathcal{Z}}_M(il) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^4 \sqrt[2]{3} A \hat{\chi}_A(il + \tfrac{1}{2}) \tag{2.88}$$

deberá estar presente en el sector de la cinta de Möbius. La amplitud del cilindro en el transverso debe ser

$$\tilde{\mathcal{Z}}_C(il) = \frac{1}{2} \sqrt[2]{3} [A^2 \chi_A(il) + B^2 \chi_B(il) + C^2 \chi_C(il)] \tag{2.89}$$

para asegurar la factorización. Dado que los tadpoles RR de masa cero (y aquí también los NSNS) están contenidos en χ_A, se necesita que $A = -16$ para conseguir que se cancelen los tadpoles.

Cuando reescribimos las amplitudes en el canal directo (usando las matrices de transformación (2.85)) las combinaciones lineales de los coeficientes que multiplican a los tres caracteres deben satisfacer las siguientes condiciones de consistencia:

a) deben ser polinomios enteros en n_i

b) los coeficientes de χ_A, el carácter que contiene el vector no masivo en el sector abierto, deben ser $\frac{1}{2} n_i(n_i + 1)$ para $Sp(n_i)$, $\frac{1}{2} n_i(n_i - 1)$ para $SO(n_i)$ y n_i^2 para $U(n_i)$ (o mejor aún $n_i \bar{n}_i$, ver nota a pie de página en la página 14)

Estas condiciones de consistencia implican en este caso que $A = -n$ y $B = C = 0$, lo que lleva a las amplitudes en el canal directo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_C(it) &= \frac{1}{2} n^2 [\chi_A(it) + \chi_B(it) + \chi_C(it)\ ] && (2.90) \\ \mathcal{Z}_M(it) &= \frac{1}{2} n [\hat{\chi}_A(it + \tfrac{1}{2}) - \hat{\chi}_B(it + \tfrac{1}{2}) - \hat{\chi}_C(it + \tfrac{1}{2})] && (2.91) \end{aligned}$$

Por lo tanto la condición de cancelación de tadpoles es $n = 2^4$, y obtenemos un grupo de calibre $Sp(16)$ con estados de materia masiva transformando en la antisimétrica [4] y representaciones simétricas (recordar que el cambio de signo en la cinta de Möbius entre un nivel y el siguiente cambia el tipo de representación).

Es fácil verificar que otras combinaciones de signos para la función de partición en la botella de Klein (2.86) no admiten soluciones que satisfagan las condiciones *a,b*.

[4] En realidad en $\mathbf{119} + \mathbf{1}$ dado que la representación antisimétrica es reducible

ii) Conjugado de carga $(\mathbf{1_C})^\mathbf{3}$

La función de partición en el canal directo es en este caso

$$\mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\chi_A(2it) \tag{2.92}$$

la que, escrita en el canal transverso, es

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2}2^8\frac{1}{\sqrt[2]{3}}(\chi_A(il) + \chi_B(il) + \chi_C(il)) \quad . \tag{2.93}$$

Las expresiones genéricas de las amplitudes para el cilindro y la cinta de Möbius en el canal transverso son

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{Z}}_M(il) &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2^4 \frac{1}{\sqrt[2]{3}}[A\hat{\chi}_A(il + \tfrac{1}{2}) + B\hat{\chi}_B(il + \tfrac{1}{2}) + C\hat{\chi}_C(il + \tfrac{1}{2})] \\
\tilde{\mathcal{Z}}_C(il) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[2]{3}}[A^2\chi_A(il) + B^2\chi_B(il) + C^2\chi_C(il)]
\end{aligned}$$

donde A, B, C son combinaciones lineales complejas de n_i $(i = A, B, C)$. Las condiciones de cancelación de los tadpoles requieren que $A = -16$. Cuando los reescribimos en canal directo abierto se obtiene

$$\begin{aligned}
3\mathcal{Z}_M(it) = \frac{1}{2}\ &[(-A + B + C)\hat{\chi}_A(it + \tfrac{1}{2}) + (A + Be^{\frac{\pi i}{3}} + Ce^{\frac{-\pi i}{3}})\chi_B(it + \tfrac{1}{2}) \\
&+(A + Be^{\frac{-\pi i}{3}} + Ce^{\frac{\pi i}{3}})\chi_C(it + \tfrac{1}{2})\ ] \\
3\mathcal{Z}_C(it) = \frac{1}{2}\ &[(A^2 + B^2 + C^2)\chi_A(it) + (A^2 + B^2e^{-\frac{2\pi i}{3}} + C^2e^{\frac{2\pi i}{3}})\chi_B(it) \\
&+(A^2 + B^2e^{\frac{2\pi i}{3}} + C^2e^{-\frac{2\pi i}{3}})\chi_C(it)\ ] \quad .
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Una solución que satisface las condiciones de consistencia *a,b* es $B = -ne^{\frac{i}{3}\pi} - \bar{n}e^{-\frac{i}{3}\pi} + m = C^*$, $A = -n - \bar{n} - m$, (numéricamente $n = \bar{n}$) conduciendo a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_C(it) &= (\frac{1}{2}m^2 + n\bar{n})\chi_A(it) + (\frac{1}{2}n^2 + nm)\chi_B(it) + (\frac{1}{2}\bar{n}^2 + \bar{n}m)\chi_C(it) \\
\mathcal{Z}_M(it) &= \frac{1}{2}m\hat{\chi}_A(it + \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{2}\bar{n}\hat{\chi}_B(it + \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{2}n\hat{\chi}_C(it + \tfrac{1}{2})
\end{aligned} \tag{2.95}$$

con la condición de cancelación de tadpoles

$$-A = n + \bar{n} + m = 2n + m = 16 \quad . \tag{2.96}$$

La interpretación aquí no es tan clara. Se intercambiaron n y $\bar{n}$ en $\mathcal{Z}_M$ respecto a lo que ocurrió en $\mathcal{Z}_C$. Por otro lado, los caracteres χ_B y χ_C son los mismos (considerados como funciones de τ y z) así que la expansión en potencias de q parece indicar un multiplete vectorial $N = 1$, $D = 8$ de $Sp(2(8-n)) \times U(n)$ con descendientes masivos en las correspondientes representaciones adjuntas y materia masiva extra transformando en $(\mathbf{2(8-n)},\mathbf{n})+(\mathbf{2(8-n)},\bar{\mathbf{n}})+(\mathbf{1},\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix})+(\mathbf{1},\overline{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}})$ (o $(1,\square\square)+(1,\overline{\square\square})$, dependiendo del nivel de masa).

Tal intercambio de n y $\bar{n}$ parece indicar que se deben considerar combinaciones lineales (simétricas y antisimétricas) de los campos |B> y |C>, que tienen similares pesos y cargas conformes.

Notar que $n=0$ conduce a $Sp(16)$ y que no hay contribución de los caracteres masivos χ_B y χ_C.

Una prescripción particular que lleva a una teoría consistente cuando la función de partición del toro tiene el invariante modular conjugado de carga, *i.e.* una teoría que verifica las condiciones de factorización y cancelación de tadpoles para esta teoría, se puede hallar en [29]. En este caso, Cardy [37] ha mostrado que, cuando el número de caracteres y el de factores de Chan–Paton coincide, una solución natural para la función de partición en el cilindro está dada por $C_{ab}^c = N_{ab}^c$, donde N_{ab}^c, el número de bloques conformes de una CFT racional, puede escribirse en términos de la matriz S como

$$N_{ab}^c = \sum_l \frac{S_{al}S_{bl}(S^\dagger)^{lc}}{S_{0l}} \quad . \tag{2.97}$$

Este es el celebrado teorema de Verlinde [38], que aparece como consecuencia del hecho bien establecido de que la matriz modular S diagonaliza las reglas de fusión. La demostración de este teorema se basa en la suposición técnica de que ambas álgebras quirales extendidas izquierda y derecha consisten sólo de generadores con dimensiones conformes enteras, por lo que evidentemente no se aplica al caso superconforme. Una fórmula de Verlinde generalizada que describe las reglas de fusión en todos los sectores de teorías $N=1$ superconformes fue obtenida en [39], mientras que el caso $N=2$ fue resuelto en [40]. La extensión por Cardy del teorema a superficies con bordes fue generalizado a $N=1$ en [41].

En [23] se mostró que se puede definir el objeto que toma valores enteros

$$Y_{ab}^c = \sum_l \frac{S_{al}P_{bl}(P^\dagger)^{lc}}{S_{0l}} \tag{2.98}$$

que conduce a

$$\mathcal{K}_a = Y_{a0}^0 \quad , \quad M_a^b = Y_{a0}^b \quad . \tag{2.99}$$

Esta receta requiere matrices S y P simétricas, y por lo tanto las soluciones no triviales deben reproducir algunos de los modelos hallados más arriba. De hecho, las funciones de partición (2.95) pueden obtenerse con esta receta.

Hay otras soluciones que satisfacen las condiciones de factorización y cancelación de tadpoles, pero no verifican el requerimiento b de más arriba, *i.e.* no dan origen a vectores no masivos que transformen en los grupos Sp, SO o U.

2.5.2. 2^2

Todas las representaciones del modelo minimal $k = 2$ superconforme $N = 2$ pueden obtenerse retorciendo los pares $(0,0,0);(0,0,2)$ y $(1,-1,0);(1,-1,2)$. Están listados en el apéndice 7.2. Los caracteres del álgebra de Virasoro están en el cuadro siguiente

Carácter	Peso	Carga
$(0,0)$	0	0
$(2,-2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$(2,0)$	$\frac{1}{2}$	0
$(2,2)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$(1,-1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$(1,1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$

y los caracteres supersimétricos independientes en la teoría producto 2^2 son $\chi_A = \chi^{susy}_{(0,0)^2}$, $\chi_B = \chi^{susy}_{(1,-1);(1,1)}$, $\chi_C = \chi^{susy}_{(0,0);(2,0)}$ con $\Delta_A = \frac{1}{2}$, $\Delta_B = \frac{3}{4}$, $\Delta_C = 1$, respectivamente. Las combinaciones de estados contenidas en estos caracteres y que sobreviven la proyección GSO están listadas en el apéndice 7.2.

Este modelo sólo admite el invariante modular diagonal. Las posibles funciones de partición de la botella de Klein son

$$\begin{aligned}
&1) \qquad \mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\left[\chi_A(2it) + \chi_B(2it) + \chi_C(2it)\right] \\
&2) \qquad \mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\left[-\chi_A(2it) + \chi_B(2it) + \chi_C(2it)\right] \\
&3) \qquad \mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\left[\chi_A(2it) + \chi_B(2it) - \chi_C(2it)\right] \quad .
\end{aligned} \tag{2.100}$$

En este caso las matrices S y $\hat{P}$ son

$$S^{(2^2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{P}^{(2^2)} = i^{-d}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.101}$$

con $d = (D-2)/2 = 3$.

Con éstas se puede reescribir la amplitud de la botella de Klein en el canal transverso como

$$1) \qquad \tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = 2^8 \chi_A(il) \tag{2.102}$$

$$2) \qquad \tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2} 2^8 \left[\chi_A(il) - \chi_B(il) - \chi_C(il)\right] \tag{2.103}$$

$$3) \qquad \tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = 2^8 \chi_B(il) \quad . \tag{2.104}$$

Veamos primero el caso 1). La contribución del sector abierto debe ser

$$\tilde{\mathcal{Z}}_M(il + \tfrac{1}{2}) = -2 \times 2^4 A \, \hat{\chi}_A(il + \tfrac{1}{2}) \tag{2.105}$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_C(il) = A^2 \, \chi_A(il) + B^2 \chi_B(il) + C^2 \chi_C(il) \quad . \tag{2.106}$$

Las condiciones de consistencia implican $A = \frac{1}{2}(n + \bar{n}) = B$, $C = \frac{i}{2}(n - \bar{n})$ (recordar que $n = \bar{n}$) y la cancelación de tadpoles da $n = 16$. Por consiguiente

$$\mathcal{Z}_C(it) = n\bar{n}\chi_A(it) + (\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\bar{n}^2)\chi_B(it) \tag{2.107}$$

y

$$\mathcal{Z}_M(it + \tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(n + \bar{n})\hat{\chi}_B(it + \tfrac{1}{2}) \quad . \tag{2.108}$$

El espectro aquí es multiplete vectorial $N = 1, D = 8$ no masivo de $U(16)$ (con descendientes masivos en la adjunta), y estados masivos en la representación antisimétrica (con descendientes en la simétrica y en la antisimétrica de acuerdo al nivel).

Consideremos ahora el caso 2). Dado que todos los caracteres contribuyen a la amplitud de la botella de Klein, resulta que no se pueden usar multiplicidades complejas (no reales) y por lo tanto no puede aparecer un grupo $U(n)$. Las funciones de partición resultantes en el canal transverso son

$$\tilde{\mathcal{Z}}_M(il + \tfrac{1}{2}) = -2 \times 2^4 n \, \hat{\chi}_A(il + \tfrac{1}{2}) \tag{2.109}$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_C(il) = 2n^2 \, \chi_A(il) \quad , \tag{2.110}$$

mientras que en el canal directo son

$$\mathcal{Z}_M(it + \tfrac{1}{2}) = -n\hat{\chi}_B(it + \tfrac{1}{2}) \tag{2.111}$$

$$\mathcal{Z}_C(it) = n^2[\chi_A(it) + \chi_B(it) + \chi_C(it)] \quad . \tag{2.112}$$

La condición de cancelación de tadpoles es ahora $n = 8$. Aunque el carácter no masivo (*i.e.* el que contiene el estado no masivo) no aparece en la amplitud de la cinta de Möbius, no hay una solución consistente en términos de las multiplicidades n y $\bar{n}$

y, por lo tanto, no está permitido ningún grupo unitario. La amplitud puede interpretarse como correspondiente a un multiplete vectorial masivo de $SO(8) \times Sp(8)$ y estados descendientes masivos en las representaciones simétrica y antisimétrica y en bifundamentales.

El mismo resultado se obtiene con $\mathcal{Z}_K = \chi_A - \chi_B + \chi_C$.

El tercer caso es interesante dado que la amplitud de la botella de Klein no tiene tadpoles no masivos. Por lo tanto la teoría no–orientada es consistente sin necesidad del sector abierto (ver [15, 43, 44] para más ejemplos).

2.5.3. 4 1

Los estados del modelo minimal $k = 4$ pueden clasificarse en dos conjuntos, los que tienen $l = 0$ o $l = 4$ y los que tienen $l = 2 = \frac{k}{2}$ (son cortos). Se los lista en el apéndice 7.2.

Tomando en cuenta el espectro del modelo minimal $k = 1$, las únicas combinaciones posibles de estados en el modelo de Gepner 4 1 son

$\chi_{\vec{\alpha}}^{Susy}$	$\Delta_{\vec{\beta}(n)}$ mod 1
$\chi_{(0,0)(0,0)}^{Susy}$	$\frac{1}{2}$
$\chi_{(2,0)(0,0)}^{Susy}$	$\frac{5}{6}$

(2.113)

Introducimos la notación siguiente: $\chi_A \equiv \chi_{(0,0)(0,0)}^{susy}, \chi_B \equiv \chi_{(2,0)(0,0)}^{susy}$ donde el primer par de índices se refiere a $k = 4$ y el segundo a $k = 1$.

De hecho, si se comparan los cuadros en el apéndice 7.2, se puede ver que el espectro de estados de χ_A es idéntico al de $\chi_{(0,0)^3}$ en el modelo 1^3, y similarmente para χ_B y $\chi_{(0,0)(1,-1)(1,1)}$ (o equivalentemente $\chi_{(0,0)(1,1)(1,-1)}$). Esto está de acuerdo con la equivalencia conjeturada entre modelos conformes $\mathbf{4} \equiv \mathbf{1_A^2}$ [45].

Por otro lado, esta identificación sigue siendo válida para la cuerda abierta. Esto se puede verificar fácilmente dado que hay sólo una combinación de caracteres que es invariante modular en este caso, lo que lleva a la siguiente amplitud de la botella de Klein en el canal directo

$$\mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\left[\chi_A(2it) + \chi_B(2it)\right] \quad . \tag{2.114}$$

En este caso las matrices S y $\hat{P}$ son

$$S^{(4\ 1)} = \frac{1}{\sqrt[2]{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{P}^{(4\ 1)} = \frac{i^{-d}}{\sqrt[2]{3}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.115}$$

donde $d = (D-2)/2 = 3$, y el orden de los caracteres es χ_A, χ_B. Con esto podemos hallar la contribución de la botella de Klein al canal transverso

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2} 2^8 \sqrt[2]{3} \chi_A(il) \tag{2.116}$$

(comparar con (2.88)), y las condiciones de consistencia llevan a la misma teoría $Sp(16)$ que se encontró en el modelo $(\mathbf{1_A})^{\mathbf{3}}$.

Antes de concluir esta sección remarquemos algunos aspectos de nuestros resultados.

Notemos que aparecen grupos tanto de rango 16 (*e.g.* en el modelo 2^2, caso 1)) como de rango 8. A primera vista se habría esperado un grupo de rango $N_D = 16$ a partir de la compactificación toroidal de una cuerda $SO(32)$ con 16 pares de 9–branas.

Este hecho ha sido discutido desde varias perspectivas en la literatura. De hecho, la reducción del rango puede explicarse a partir de la presencia de un campo NSNS antisimétrico discreto (ver [32] y sus referencias). De hecho, aunque la proyección de orientifolio genéricamente mata las fluctuaciones del campo antisimétrico, en algunos casos puede preservarse un valor de expectación de vacío discreto para un campo tensorial antisimétrico de rango b, dando lugar a $N_D = 32 \times 2^{-\frac{b}{2}}$. La reducción de rango fue estudiada en [33, 46] (ver también [34, 35]) desde un punto de vista más topológico. En estas referencias la presencia de cuatro planos siete–orientifolios fijos de distinto tipo, O^+ (O^-) con carga de D–brana -8 ($+8$), son identificados dependiendo de cómo actúa el orientifolio sobre el toro T^2 (con o sin estructura vectorial). Cuando las D–branas están en puntos suaves obtienen grupos unitarios, mientras que cuando están sobre un plano orientifolio O^- (O^+), obtienen grupos de calibre Sp (SO).

Así, el grupo $Sp(2(8-n)) \times U(n)$ obtenido más arriba en el ejemplo 1^3, correspondería al caso de puntos $3\,O^+ + O^-$, con $(8-n)$ pares sobre puntos O^-, y el resto sobre puntos suaves.

El grupo $U(16)$ en 2^2 correspondería a branas en puntos suaves en una configuración $4\,O^+$. Recordar que el cambio de signo en la amplitud de la botella de Klein lleva en este caso a una reducción del rango, aquí $Sp(8) \times SO(8)$, que correspondería a dos grupos de cuatro pares de branas distribuidos entre los puntos O^+ y O^-. El tercer caso en (2.100), sin tadpoles, correspondería en esta descripción a una configuración $2\,O^+ + 2\,O^-$.

2.6. Ejemplos en 6 dimensiones

Los modelos supersimétricos $N = 1$ en $D = 6$ tienen potencialmente anomalías quirales y gravitacionales. Por esto la cancelación de anomalías es una fuerte verificación de toda la construcción.

Las representaciones no masivas en $D = 6$ están etiquetadas por representaciones del grupo pequeño $SO(4) \sim SU(2)_1 \times SU(2)_2$, y se juntan en multipletes de gravedad, vectorial, tensorial e hiper. Claramente los multipletes de gravedad y tensorial sólo pueden aparecer en el sector cerrado. Se los obtiene acoplando estados no masivos izquierdos y derechos, de manera invariante ante el intercambio de orientación Ω. Consideremos, por ejemplo, el acoplamiento de los estados RR. Los estados de Ramond no masivos en $D = 6$ tienen peso conforme $1/2$ y son de la forma (ver cuadro B,10) $|(+,+)_1, R_0>, |(-,-)_{-1}, R_0>$, y se organizan en representaciones de Lorentz $(\mathbf{2},\mathbf{1})$R o $|(+,-)_0, R_1>, |(-,+)_0, R_{-1}>$ dando lugar a representaciones $(\mathbf{1},\ \mathbf{2})$. Indicamos con un subíndice si la carga es de espaciotiempo o interna, y R resume el contenido del sector fermiónico interno. En particular, si el invariante modular permite el acoplamiento entre estados de Ramond R,R' como $(\mathbf{2},\mathbf{1})R \times (\mathbf{2},\mathbf{1})R'$, hacer el orientifolio dará los tripletes $(\mathbf{3},\mathbf{1})\frac{1}{2}(R \times R' + R' \times R)$ y los singletes $(\mathbf{1},\mathbf{1})\frac{1}{2}(R \times R' - R' \times R)$. Junto con los fermiones NS–R, estos estados se agrupan en un supermultiplete tensorial $T = (\mathbf{3},\mathbf{1}) + (\mathbf{1},\mathbf{1}) + 2(\mathbf{2},\mathbf{1})$. Recordemos que, debido a la anticonmutatividad de los campos fermiónicos, sólo habrá escalares si $R = R'$. Los otros estados cerrados se construyen en forma similar.

Para ilustrar un cálculo específico, consideremos los modelos 1^6, que son particularmente sencillos. Los sectores izquierdo y derecho pueden acoplarse de varias maneras, por ejemplo cada bloque izquierdo puede acoplarse diagonalmente o a su estado conjugado de carga (aquí elegiremos signos positivos en $\mathcal{K}_{\vec{\alpha}}$). Así los posibles acoplamientos invariantes modulares son $(\mathbf{1_A})^\mathbf{6}$, $(\mathbf{1_A})^\mathbf{5}\mathbf{1_C}$, $\mathbf{1_A}(\mathbf{1_C})^\mathbf{5}$, $(\mathbf{1_A})^\mathbf{3}(\mathbf{1_C})^\mathbf{3}$, $(\mathbf{1_A})^\mathbf{2}(\mathbf{1_C})^\mathbf{4}$, $(\mathbf{1_A})^\mathbf{4}(\mathbf{1_C})^\mathbf{2}$ y $(\mathbf{1_C})^\mathbf{6}$. Sus espectros en el sector cerrado son los siguientes: los cuatro primeros casos tienen $0\,T + 21\,H$, el último invariante *conjugado* tiene $10\,T + 11\,H$, mientras que los otros dos contienen $6\,T + 15\,H$. En [15] se han encontrado soluciones simples para algunos de estos casos. Por ejemplo, notando que en el $(\mathbf{1_A})^\mathbf{6}$ la amplitud de la botella de Klein en el canal transverso contiene sólo estados con $q = 0$, [5], a saber

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = 9\frac{1}{2}2^6\chi^{susy}_{(0,0)^6}(il) \quad , \tag{2.117}$$

se ve fácilmente que $\tilde{\mathcal{Z}}_C(il) = n^2\tilde{\mathcal{Z}}_K(il)$ y $\tilde{\mathcal{Z}}_M(il) = -2 \times 2^3 n\tilde{\mathcal{Z}}_K(il + \frac{1}{2})$ dan una teoría consistente si $n = 8$, correspondiendo a un grupo de calibre $SO(8)$ con 10 hipermultipletes en la representación $\mathbf{28}$.

[5]En realidad, para cualquier modelo k resulta en general que el invariante diagonal en el directo lleva a sólo caracteres con $q = 0$ en el transverso

Como otro ejemplo, con solución más general, consideremos el modelo $(\mathbf{1_A})^4(\mathbf{1_C})^2$. Su amplitud en la botella de Klein es

$$\mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\{\left(\chi_{(0,0)} + \chi_{(1,-1)} + \chi_{(1,1)}\right)^4 \chi^2_{(0,0)}\}^{susy} \tag{2.118}$$

donde sólo se muestran los bloques internos, y *susy* significa que debe hacerse la suma sobre n, p, como se indica en (2.53). Las siguientes contribuciones del canal directo del cilindro

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_C(it) = (\frac{1}{2}n_1^2 + n_2^2)\ \{\chi^6_{(0,0)} &+ \underline{\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}\chi^2_{(0,0)}}\chi^2_{(0,0)} + \underline{\chi^3_{(1,-1)}\chi_{(0,0)}}\chi^2_{(0,0)} + \\ &+ \underline{\chi^3_{(1,1)}\chi_{(0,0)}}\chi^2_{(0,0)} + \underline{\chi^2_{(1,-1)}\chi^2_{(1,1)}}\chi^2_{(0,0)}\ \}^{susy} + \\ + (\frac{1}{2}{n_2}^2 + n_1 n_2)\quad \{ &\quad \chi^4_{(0,0)}\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)} + \underline{\chi^2_{(0,0)}\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}}\ \ \underline{\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}} \\ &+ \underline{\chi^2_{(1,1)}\chi^2_{(0,0)}}\ \ \underline{\chi_{(1,1)}\chi_{(0,0)}}\ \}^{susy}\end{aligned} \tag{2.119}$$

y de la cinta de Möbius

$$\mathcal{Z}_M(it) = -\sum_{todos\ los\ caracteres} [(-1)^{N_{(1,1)}}(\frac{1}{2}n_1\hat{X}_1 + \frac{1}{2}n_2\hat{X}_2)]^{susy} \quad , \tag{2.120}$$

donde X_1 y X_2 se refieren a todos los productos de caracteres que tengan como dos últimos factores a $\chi^2_{(0,0)}$ y $\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}$ o $\chi_{(1,1)}\chi_{(1,-1)}$ (El subrayado indica que hay que tomar todas las permutaciones de los estados, por ejemplo $\underline{\chi^2_{(1,-1)}\chi^2_{(1,1)}}\chi^2_{(0,0)}$ es una suma de 6 estados). Esto lleva a una solución consistente, si se satisfacen las ecuaciones de cancelación de tadpoles

$$2n_2 + n_1 = 8 \quad . \tag{2.121}$$

El grupo de calibre puede leerse de $\chi^{susy}_{(0,0)^6}$, y es $SO(n_1) \times U(n_2)$. Los demás caracteres no masivos en X_1 (a saber, $\underline{\chi^3_{(1,-1)}\chi_{(0,0)}}\chi^2_{(0,0)}$ y $\underline{\chi^3_{(1,1)}\chi_{(0,0)}}\chi^2_{(0,0)}$) transforman en la representación adjunta de $SO(n_1)$ y $U(n_2)$. Los caracteres no masivos en X_2 (a saber $\underline{\chi^2_{(1,-1)}\chi^2_{(1,1)}}\chi_{(1,1)}\chi_{(1,-1)}$ y $\underline{\chi^2_{(1,-1)}\chi^2_{(1,1)}}\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}$) tienen estados no masivos que transforman en la representación antisimétrica (los descendientes estarán en la representación simétrica o antisimétrica, de acuerdo al nivel) de $U(n_2)$ y una representación bifundamental.

Así, los multipletes no masivos son

$$\begin{array}{ll} \text{Vector} & SO(n_1) \times U(n_2) \\ \text{Hipers} & 4(\boxminus, 1) + 4(1, \mathrm{Adj}) + 6(1, \boxminus) + 6(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \quad . \end{array} \tag{2.122}$$

Es fácil verificar que todas las anomalías de calibre y gravitacionales se cancelan (recordar que los 6 multipletes tensoriales y los 15 hiper están presentes en el sector cerrado), siempre que se satisfagan las condiciones de cancelación de tadpoles (2.121).

Es interesante comparar este cálculo con el del orbifold. Consideremos, por ejemplo, un orientifolio tipo IIB en T^4/Z_3. Mirando la acción de los retorcimientos Z_3 sobre las D9–branas (si no se han encendido líneas de Wilson) el espectro no masivo resulta ser (ver por ejemplo [47])

$$\begin{array}{ll} \text{Vector} & SO(n_1) \times U(n_2) \\ \text{Hiper} & (\mathbf{n}1, \mathbf{n}_2) + (1, \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}) \quad . \end{array} \tag{2.123}$$

Si se satisfacen las condiciones de cancelación de los tadpoles *retorcidos* $n_2 - n_1 = 8$, el espectro es libre tanto de anomalías de calibre como gravitacionales (una vez que se han incluido los 11 hiper y los 10 multipletes tensoriales) independientemente del número total de branas. La condición que fija el número total de branas es la condición de cancelación de los tadpoles RR no retorcidos $n_1 + 2n_2 = 32$ [6]. En nuestro caso vemos que la factorización, tanto en los sectores del canal transverso masivos como no masivos, dan una teoría de campos efectiva que es inconsistente a menos que el número de branas se restrinja a $n_1 + 2n_2 = 8$. Por esto parece que la información global es requerida en cada paso de nuestra construcción .

2.7. Ejemplos en 4 dimensiones

2.7.1. $\mathbf{1^9}$

El análisis de este modelo sigue muy de cerca al caso 1^6, con las modificaciones obvias (ver [15] para una discusión previa de este modelo). La función de partición con invariante modular diagonal $(\mathbf{1_A})^\mathbf{9}$ da lugar a las condiciones de cancelación de tadpoles $n = 2^{D/2} = 4$, y el vector no masivo pertenece a un multiplete vectorial $D = 4$, N=1 de $Sp(4)$.

El caso $(\mathbf{1_A})^\mathbf{7}(\mathbf{1_C})^\mathbf{2}$ es análogo al $(\mathbf{1_A})^\mathbf{4}(\mathbf{1_C})^\mathbf{2}$. Hay un modelo consistente con grupo de calibre de Chan–Paton $Sp(n_2) \times U(n_1)$ y condiciones de cancelación de tadpoles $2n_1 + n_2 = 4$.

[6] Es interesante notar que estas condiciones pueden entenderse, considerando sondas (*probes*) D–branas, como condiciones de consistencia de la teoría efectiva en todos los sectores topológicos[47]

2.7.2. 3^5

Las representaciones del modelo minimal $k = 3$ están listadas en el apéndice 7.2. Es conveniente denotar a los caracteres supersimétricos de esta teoría con el número N_i, que se refiere a la multiplicidad del i–ésimo carácter en el producto. Los índices $i = 1, \cdots, 9$ se refieren a los estados (0,0), (3,-3), (3,-1), (3,1), (3,3), (2,0), (2,2), (1,-1), (1,1), (2,-2) respectivamente. Las combinaciones de caracteres con carga $U(1)$ entera son las siguientes

$N_1 + N_6 = 5$

$N_1 + N_6 = 3; N_2 + N_7 = N_5 + N_{10} = 1$

$N_1 + N_6 = 3; N_3 + N_8 = N_4 + N_9 = 1$

$N_1 + N_6 = N_2 + N_7 = N_3 + N_8 = N_4 + N_9 = N_5 + N_{10} = 1$

$N_1 + N_6 = 1; N_2 + N_7 = N_5 + N_{10} = 2$

$N_1 + N_6 = 1; N_3 + N_8 = N_4 + N_9 = 2 \quad .$

La función de partición con invariante modular diagonal en el toro da la siguiente expresión para el canal directo de la botella de Klein

$$\mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\frac{1}{5}\left[(\chi_I(it) + \chi_{II}(it))^5\right]^{susy} \tag{2.124}$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_I &= \chi_{(0,0)} + \chi_{(3,-3)} + \chi_{(3,-1)} + \chi_{(3,1)} + \chi_{(3,3)} \\ \chi_{II} &= \chi_{(2,0)} + \chi_{(2,2)} + \chi_{(1,-1)} + \chi_{(1,1)} + \chi_{(2,-2)} \quad . \end{aligned} \tag{2.125}$$

Aplicando la matriz S para el modelo $k = 3$ (ver apéndice 7.2), se encuentra que el canal transverso da

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2}2^4\sqrt[4]{5}\left[(\kappa^{\frac{3}{2}}\tilde{\chi}_{(0,0)}(il) + \kappa^{-\frac{3}{2}}\tilde{\chi}_{(2,0)}(il))^5\right]^{susy} \tag{2.126}$$

donde $\kappa \equiv \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Siguiendo el mismo procedimiento que en los ejemplos en 6 dimensiones tratados más arriba, proponemos la siguiente función de partición para el canal transverso del cilindro

$$\tilde{\mathcal{Z}}_C(il) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{5}\mathcal{A}_{\vec{\gamma}}\left[\prod_{i=1}^{5}(\tilde{\chi}_{(0,0)}(il))^{1-\gamma_i}(\tilde{\chi}_{(2,0)}(il))^{\gamma_i}\right]^{susy} \quad . \tag{2.127}$$

Aquí $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(\vec{\alpha})$ denota un vector de 5 componentes (uno por cada teoría), que toma valores 0 o 1 según el estado pertenezca al grupo I o II respectivamente. Notemos que $\vec{\gamma}(\vec{\alpha}_{(n)}) = \vec{\gamma}(\vec{\alpha})$ dado que los estados permanecen en el mismo grupo frente a retorcimientos.

Por lo tanto las condiciones de cancelación de tadpoles son

$$\mathcal{A}_{\vec{0}} = 2^4 \kappa^{\frac{15}{2}} \qquad ; \qquad \mathcal{A}_{\vec{1}} = 2^4 \kappa^{-\frac{15}{2}} \tag{2.128}$$

donde $\vec{0} \equiv (0,0,0,0,0)$ y $\vec{1} \equiv (1,1,1,1,1)$.

Aplicando la matriz S podemos transformar (2.127) al canal directo, donde la función de partición del cilindro es

$$\mathcal{Z}_C(it) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{\gamma},\vec{\alpha}} \mathcal{C}_{\vec{\gamma}(\vec{\alpha})} \chi_{\vec{\alpha}} \tag{2.129}$$

con

$$\mathcal{C}_{\vec{\gamma}} = \frac{1}{(\sqrt[2]{5}\kappa)^{\frac{5}{2}}} \sum_{\vec{\gamma}'} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^5} \kappa^{(\vec{\gamma}-\vec{\gamma}')^2} (-1)^{\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}'} \mathcal{A}_{\vec{\gamma}'} \quad . \tag{2.130}$$

Definamos como

$$M_{\vec{\gamma}\,\vec{\gamma}'} \equiv \frac{1}{(\sqrt[2]{5}\kappa)^{\frac{5}{2}}} \kappa^{(\vec{\gamma}-\vec{\gamma}')^2} (-1)^{\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}'} \tag{2.131}$$

a la matriz real de 32×32 que relaciona $\mathcal{C}_{\vec{\gamma}}$ con $\mathcal{A}_{\vec{\gamma}'}$. Ésta verifica que $M^{-1} = M$ y $M = M^{\top}$ y por lo tanto puede ser usada para calcular los coeficientes en el canal directo usando la receta de Cardy [37] ($\mathcal{C}_{\vec{\gamma}} \equiv \sum_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} N^{\vec{\gamma}}_{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}} n^{\vec{\alpha}} n^{\vec{\beta}}$) con

$$N^{\vec{\gamma}}_{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}} = \sum_{\vec{\delta}} \frac{M_{\vec{\alpha}\,\vec{\delta}} M_{\vec{\beta}\,\vec{\delta}} M_{\vec{\gamma}\,\vec{\delta}}}{M_{\vec{0}\,\vec{\delta}}} \tag{2.132}$$

y entonces

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^5} \mathcal{A}_{\vec{\gamma}} = \frac{\left(\sum_{\vec{\delta}} M_{\vec{\gamma}\vec{\delta}} n^{\vec{\delta}} \right)^2}{M_{\vec{0}\vec{\gamma}}} \quad . \tag{2.133}$$

Encontramos que

$$\begin{aligned} N^{\vec{\gamma}}_{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}} &= \prod_{i=1}^{5} (1 - \delta_{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i,1}) \\ \mathcal{A}_{\vec{\gamma}} &= \frac{1}{\kappa^{5/2}} \frac{\left(\sum_{\vec{\delta}} \kappa^{(\vec{\gamma}-\vec{\delta})^2} (-1)^{\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}} n^{\vec{\delta}} \right)^2}{\kappa^{(\vec{\gamma})^2}} \end{aligned} \tag{2.134}$$

y $\mathcal{A}_{\vec{1}-\vec{\gamma}}$ puede obtenerse de $\mathcal{A}_{\vec{\gamma}}$ invirtiendo el signo de $\sqrt{5}$ en todas las potencias de κ.

Las condiciones de cancelación de tadpoles resultan ser

$$\mathcal{A}_{\vec{0}} = 2^4 \kappa^{\frac{15}{2}} = \kappa^{-\frac{5}{2}} \left(\sum_{\vec{\delta}} \kappa^{(\vec{\delta})^2} n_{\vec{\delta}} \right)^2 \tag{2.135}$$

$$\mathcal{A}_{\vec{1}} = 2^4 \kappa^{-\frac{15}{2}} = \kappa^{\frac{5}{2}} \left(\sum_{\vec{\delta}} (-\kappa)^{-(\vec{\delta})^2} n_{\vec{\delta}} \right)^2 \quad , \tag{2.136}$$

y llevan a las siguientes ecuaciones para los coeficientes de Chan–Paton

$$
\begin{aligned}
n_0 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 &= 12 \\
n_1 + n_2 + 2n_3 + 3n_4 + 5n_5 &= 20
\end{aligned}
\tag{2.137}
$$

donde $n_i = \sum_{\vec{\gamma}\,/\,|\vec{\gamma}|=i} n_{\vec{\gamma}}$ (*e.g.*, $n_4 = n_{(1,1,1,1,0)} + n_{(1,1,1,0,1)} + n_{(1,1,0,1,1)} + n_{(1,0,1,1,1)} + n_{(0,1,1,1,1)}$).

Los coeficientes (de los caracteres reales $\hat{\chi}$) $\tilde{\mathcal{M}}_{\vec{\gamma}}$ que completan un cuadrado perfecto en el canal transverso de la cinta de Möbius están dados por

$$
\tilde{\mathcal{M}}_{\vec{\gamma}} = \pm\sqrt[4]{5}\sqrt{\mathcal{A}_{\vec{\gamma}}\kappa^{\frac{15}{2}-3(\vec{\gamma})^2}}
\tag{2.138}
$$

y una solución de las condiciones de cancelación de tadpoles es

$$
\tilde{\mathcal{M}}_{\vec{\gamma}} = -\sum_{\vec{\delta}} \sqrt[4]{5}(-1)^{(\vec{\gamma})^2}\kappa^{(\vec{\gamma}-\vec{\delta})^2}(-1)^{\vec{\gamma}.\vec{\delta}}\kappa^{\frac{5}{2}-2(\vec{\gamma})^2} n_{\vec{\delta}} \quad .
\tag{2.139}
$$

Transformando al canal directo con $\hat{P}^{(k=3)}$ encontramos

$$
M_{\vec{\beta}}^{\vec{\delta}} = -\frac{(-1)^{N_1+N_2+1}}{5}\prod_{i=1}^{5}(1-\delta_{2\delta_i+\gamma_i(\beta_i),1}) \quad .
\tag{2.140}
$$

El factor $\frac{1}{5}$ se cancela cuando se suma sobre todos los sectores retorcidos, y la función de partición que viene de la cinta de Möbius en el canal directo es

$$
\mathcal{Z}_M = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{\alpha}}{}' \left(\prod_{i=1}^{5}(1-\delta_{2\delta_i+\gamma_i(\alpha_i),1})\right)(-1)^{N_1+N_2+1}\hat{\chi}_{\vec{\alpha}}^{susy}\, n_{\vec{\delta}} \quad .
\tag{2.141}
$$

Comparando con la contribución del cilindro

$$
\mathcal{Z}_C = \frac{1}{2}\sum_{\vec{\beta}}{}' \left(\prod_{i=1}^{5}(1-\delta_{\gamma_i(\alpha_i)+\beta_i+\delta_i,1})\right)\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}\, n_{\vec{\beta}} n_{\vec{\delta}}
\tag{2.142}
$$

es fácil ver que el término $n_{\vec{\delta}}$ aparece en (2.141) sólo si el término $(n_{\vec{\delta}})^2$ aparece en (2.142) y así la contribución de los Chan–Paton de $n_{\vec{\delta}}$ es cero o $\frac{1}{2}n_{\vec{\delta}}(n_{\vec{\delta}} \pm 1)$. El signo ± 1 depende de la fase $(-1)^{N_1+N_2+1}e^{-\pi i(\Delta_{\vec{\beta}}-\frac{Q_{\vec{\beta}}}{2})}e^{\pi i(\Delta^{GSO}-\frac{1}{2})}$. Es -1 para el carácter del vector no masivo $\chi_{(0,0)^5}$ y por lo tanto el grupo de los Chan–Paton es $SO(n_i)$ para todos los n_i. También es -1 para todos los caracteres $\chi_{(0,0)^3(3,-3)(2,-2)}$, $\chi_{(2,0)^5}$, $\chi_{(0,0)(1,-1)^3(2,-2)}$, $\chi_{(0,0)^2(3,3)(1,1)^2}$ y es $+1$ para $\chi_{(0,0)^3(3,3)(2,2)}$, $\chi_{(0,0)(1,1)^3(2,2)}$, $\chi_{(0,0)^2(3,-3)(1,-1)^2}$. En conclusión, los caracteres con fase -1 $(+1)$ tienen estados en el nivel más bajo que transforman en la representación antisimétrica (simétrica) de $SO(n_i)$.

Hagamos un ejemplo en detalle. Consideremos una familia particular de soluciones de las condiciones de cancelación de tadpoles, a saber

$$n_0 = 12 - n \quad ; \quad n_1 = 20 - n \quad ; \quad n_2 = n \tag{2.143}$$

donde $n_1 = n_{(1,0,0,0,0)}; n_2 = n_{(1,1,0,0,0)}$. La función de partición del cilindro es

$$\begin{aligned} Z_C \;=\; & \frac{1}{2}[(n_A^2 + n_B^2 + n_C^2)\chi^A + \\ & (n_B^2 + n_C^2 + 2n_Bn_A)\chi^B + \\ & (n_C^2 + 2n_Cn_A + 2n_Cn_B)\chi^C + \\ & (n_C^2 + 2n_Bn_C)\chi^D] \end{aligned} \tag{2.144}$$

donde $\chi^A = \frac{1}{5}(\chi_I)^5$; $\chi^B = \frac{1}{5}(\chi_{II})\chi_I^4$; $\chi^C = \frac{1}{5}(\chi_{II})^2\chi_I^3$; $\chi^D = \frac{1}{5}\chi_I\chi_{II}\chi_I^3$, así que $n_0 = n_{(0,0,0,0,0)} \equiv n_A; n_1 = n_{(1,0,0,0,0)} \equiv n_B$, $n_2 = n_{(1,1,0,0,0)} \equiv n_C$.

χ^A, χ^B, χ^C y χ^D son las combinaciones de caracteres que contribuyen a la cinta de Möbius. Como puede verse de la cuadro B.12 en el apéndice 7.2, éstos contienen a los siguientes caracteres no masivos y sus conjugados de carga: $(0,0)^5$, $(1,-1)^2\underline{(0,0)^2(3,-3)}$ y $(2,-2)\underline{(0,0)^3(3,-3)}$ más todas las permutaciones con $(2,-2)$ como segundo bloque.

2.8. Cociente (*modding*) por simetrías discretas

Cada uno de los bloques que definen el sector interno de la teoría poseen una simetría de fase $\mathbb{Z}_m$ [8, 48]. A saber, los campos conformes transforman ante esa acción como

$$\Phi_{l,q,\bar{l},\bar{q}} \rightarrow e^{2i\pi\gamma\frac{(q+\bar{q})}{2m}}\Phi_{l,q,\bar{l},\bar{q}} \tag{2.145}$$

con $\gamma \in \mathbb{Z}$, y $m = k+2$. Como en muchos casos el sector interno contiene varios bloques conformes idénticos, los modelos deben ser invariantes ante permutaciones de dichos bloques. Por esto, genéricamente un modelo posee un grupo de simetría $G = \otimes_{a=1}^r \mathbb{Z}_{m_a} \times \mathcal{P}$ (con $\mathcal{P}$ denotando el grupo de permutaciones de bloques) y por lo tanto vale la pena considerar la posibilidad de cocientar por este grupo. Estas simetrías discretas han sido estudiadas extensivamente en el contexto de las cuerdas heteróticas $E_8 \times E_8$ sobre modelos de Gepner y de clases laterales (*cosets*) (ver, por ejemplo, [49, 50, 51, 52]). Genéricamente llevan a una reducción en el número de generaciones.

Aquí mostramos cómo estos moddings pueden implementarse en orientifolios de tipo IIB sobre puntos de Gepner. La idea general es obtener expresiones para los caracteres supersimétricos *modded* que transformen en forma bien definida frente al grupo modular. Una vez que se ha conseguido esto, el sector cerrado se obtiene conectando los caracteres cocientados izquierdos y derechos, y la amplitud de la botella de Klein se puede escribir directamente y seguir con la construcción del sector de D–branas.

2.8.1. Cocientando las simetrías de fase

Consideremos, como un ejemplo sencillo, el caso en que la función de partición cerrada tiene sólo un bloque. Para cocientar por la simetría de fase en (2.145), se debe implementar la restricción $\gamma q = 0 \bmod m$ en los sectores izquierdo y derecho. Para esto se introduce en el carácter el proyector $\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} e^{2i\pi\gamma\frac{q}{m}x}$, donde M es el orden del grupo cíclico G, *i.e.* el menor entero positivo tal que $M\gamma = 0 \bmod m$. Como es usual, este truncamiento producirá genéricamente una función de partición no invariante modular, por lo que habrá que agregar sectores retorcidos por G. Los sectores retorcidos se pueden incluir de manera que el carácter *cocientado* $\chi^G_{l,q}(\tau)$ transforme como el original. A saber, definiendo

$$\chi^G_{l,q}(\tau) = \frac{1}{M}\sum_{x,y=0}^{M-1} e^{2i\pi\gamma^2 y^2 \frac{c\tau}{6}} e^{-2i\pi\frac{\gamma^2 xy}{m}} \chi_{l,q}(\tau, \gamma y\tau + \gamma x) \tag{2.146}$$

se puede ver que $\chi^G_{l,q}(-1/\tau) = \sum_{l',q'} S_{l,q;l',q'}\chi^G_{l',q'}(\tau)$ usando las propiedades de transformación de los caracteres discutidas en el apéndice 7.1.

Nótese la similitud con la "proyección de supersimetría" ($n \equiv y, \gamma \equiv 1/2, p \equiv x$). De esta manera conseguimos una función de partición invariante modular , al pegarlo con la parte antiholomorfa $\chi^G_{\bar{l},\bar{q}}$.

Se puede reescribir $\chi^G_{l,q}$ (ver (7.3) y (7.5) en el apéndice 7.1) como

$$\chi^G_{l,q}(\tau) = \frac{1}{M}\sum_{x,y} e^{-2i\pi x\frac{\gamma}{m}(q+\gamma y)}\chi_{l,q+2\gamma y}(\tau) \quad . \tag{2.147}$$

Estas consideraciones se pueden generalizar fácilmente a productos de teorías conformes en el sector interno de la cuerda, las que son genéricamente invariantes ante una simetría de fase cíclica de la forma $\otimes_a \mathbb{Z}_{M_a}$.

Por simplicidad, cocientemos por sólo una de las simetrías $\mathbb{Z}_{M_a}$. Los parámetros de la proyección se pueden juntar en un vector r–dimensional

$$\vec{\Gamma}^a = ({\gamma_1}^a, {\gamma_2}^a, \ldots, {\gamma_r}^a) \tag{2.148}$$

donde M_a es el menor entero positivo tal que

$$M_a {\gamma_i}^a = 0 \bmod (k_i + 2) \tag{2.149}$$

y a etiqueta alguno de los diferentes moddings no equivalentes.

El producto de los caracteres en el sector interno es ahora

$$\chi^G_{\vec{l},\vec{q}}(\tau) = \sum_{x,y} e^{-2i\pi x \frac{\gamma_i}{m}(q_i+\gamma_i y)} \chi_{\vec{l},\vec{q}+2\vec{\gamma}y}(\tau) \tag{2.150}$$

donde $\vec{l}$, $\vec{q}$ son vectores de r–componentes con entradas l_i y q_i respectivamente. De aquí podemos obtener las condiciones de proyección para cada sector retorcido $y = 0, \ldots, M_a - 1$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i} \gamma_i^a (q_i + y\gamma_i^a) \in \mathbb{Z} \quad . \tag{2.151}$$

Dado que $\chi^G_{\vec{l},\vec{q}}$ transforma como el carácter original (no proyectado), es inmediato escribir el carácter proyectado supersimetrizado $\chi^{G,susy}_{\vec{\alpha}}$: basta reemplazar $\chi^G_{l_i,q_i}$ en la expresión (7.7) del apéndice 7.1.

La proyección sobre carga total entera es

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i} (q_i + 2y\gamma_i^a) \in \mathbb{Z} \tag{2.152}$$

para cada sector retorcido y. De (2.151) se ve que la supersimetría impone una restricción adicional sobre ${\gamma_i}^a$, a saber

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i} \gamma_i^a \in \mathbb{Z} \tag{2.153}$$

(esta es la condición usual $2\beta_0 \cdot \Gamma \in \mathbb{Z}$ de [8]).

Como ya dijimos, la construcción de los caracteres proyectados es tal que transforman como los originales bajo transformaciones modulares

$$S \;\; : \;\; \chi^G_{\vec{\alpha}}(-\frac{1}{\tau}, x, y) = (-i\tau)^{-1} \sum_{\vec{\beta}} S_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} \chi^G_{\vec{\beta}}(\tau, -y, x) \tag{2.154}$$

$$T \;\; : \;\; \chi^G_{\vec{\alpha}}(\tau+1, x, y) = e^{i\pi(\Delta_\alpha - \frac{Q_\alpha}{2} - \frac{c}{24})} \chi^G_{\vec{\alpha}}(\tau, x+y, x) \quad , \tag{2.155}$$

donde $Q_\alpha = -\sum \frac{q_i}{m_i}$, $\Delta_\alpha = \sum \Delta_i$. Notar que los mismos pasos pueden repetirse para el sector derecho con los caracteres ahora dependiendo de $(\bar{x}, \bar{y})$. Por otro lado, se pueden hacer cocientes distintos en los sectores derecho e izquierdo.

La función de partición cerrada invariante modular total es ahora

$$\sum_{\vec{\alpha},\vec{\bar{\alpha}}} \mathcal{N}_{\vec{\alpha};\vec{\bar{\alpha}}} \chi^{G,susy}_{\vec{\alpha}} \chi^{G,susy\;*}_{\vec{\bar{\alpha}}} =$$

$$= \textstyle\sum_{\vec{\alpha},\vec{\bar{\alpha}}} \mathcal{N}_{\vec{\alpha};\vec{\bar{\alpha}}} \frac{1}{M} \sum_{x,y} e^{-2i\pi x \frac{\Gamma}{m}(\vec{q}+\Gamma y)} \frac{1}{M} \sum_{\bar{x},\bar{y}} e^{-2i\pi\bar{x}\frac{\Gamma}{m}(\vec{\bar{q}}+\Gamma\bar{y})} \chi^{susy}_{\vec{\alpha}+2y\Gamma} \bar{\chi}^{susy}_{\vec{\bar{\alpha}}+2\bar{y}\Gamma} \quad . \tag{2.156}$$

La forma simétrica ante intercambio izquierda–derecha en que hemos conseguido poner la función de partición cerrada nos permite escribir inmediatamente la amplitud asociada de la botella de Klein

$$\mathcal{Z}_K^G(it) = \sum_{\vec{\alpha}} \mathcal{K}_{\vec{\alpha}} \chi_{\vec{\alpha}}^{G,susy}(2it) = \frac{1}{M} \sum_{\vec{\alpha}} \mathcal{K}_{\vec{\alpha}} \sum_{x,y} e^{-2i\pi x \frac{\Gamma}{m}(\vec{q}+\Gamma y)} \chi_{\vec{\alpha}+2y\Gamma}^{susy} \tag{2.157}$$

donde $\mathcal{K}_{\vec{\alpha}} = \mathcal{N}_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}}$, y de donde se puede proceder como más arriba para obtener un sector de cuerda abierta.

Notemos que es posible que haya moddings sin sectores retorcidos. De hecho este es el caso cuando (2.151) tiene como única solución a $y = 0$. El cociente actúa libremente y lleva, esencialmente, a una reducción en el número de estados. Este es el caso, por ejemplo, mencionado en el modelo 3^5 más arriba, para el modding $\Gamma = (-2, -1, 0, 1, 2)$.

Sin embargo, la presencia de sectores G–retorcidos lleva genéricamente a un conjunto de caracteres que es diferente de los presentes en la teoría no proyectada, lo que produce, entre otras cosas, distintas condiciones de cancelación de tadpoles. Por esto esperamos que al hacer el cociente se modifiquen notablemente tanto el sector cerrado como el abierto.

Es interesante que es posible pensar en una compactificación híbrida, donde una parte del sector interno se construye a partir de un modelo de Gepner, mientras que el resto corresponde a una compactificación toroidal. Más específicamente, supongamos que uno empieza con un $N = 1$ modelo de Gepner con $c = 3n$ en $d = 10 - 2n$ dimensiones y que además compactificamos $2(3 - n)$ coordenadas en un toro para obtener un modelo en cuatro dimensiones (con supersimetría extendida). Un estado no masivo, digamos izquierdo, sería

$$|r_0, r_1, \ldots, r_{3-n}, (l_i, q_i, s_i)_{i=1,\ldots,r}\rangle \quad , \tag{2.158}$$

donde r_i $i = 0, \ldots, 3-n$ son pesos de $\mathrm{SO}(2(3-n))$ y la proyección de GSO generalizada requiere

$$\sum_{i=0}^{3-n} r_i - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{2} s_j - \sum_{j=1}^{r} \frac{q_j}{m_j} \in 2\,\mathbb{Z} + 1 \quad . \tag{2.159}$$

Si el sector toroidal tiene simetría $\mathbb{Z}_N$ (genéricamente es $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$), el sector interno total es invariante ante el grupo de simetría $G = \mathbb{Z}_N \otimes_a \mathbb{Z}_{M_a}$ con $a = 1, \ldots, r$. Cocientando por esta simetría, el espacio interno es de la forma (modelo de Gepner)$^{c=3n}$ $\times$ $\mathbb{T}^{2(3-n)}/G$, para $n = 1, 2, 3$ donde la acción del orbifold está codificada en los vectores de modding por fase Γ de (2.148) para el sector de Gepner y el autovector v (3.3) para la acción sobre el toro interno. Ambas acciones deben hacerse simultáneamente, en forma compatible e invariante modular, y darán lugar a una reducción de la supersimetría. A saber, consideremos fermiones izquierdo $Q_{\frac{1}{2}}$ asociados a los generadores de supersimetrías, son de la forma mostrada en (2.158) con $r_0 = 1/2$. Si θ realiza un retorcimiento en G, entonces

$$\theta Q^A_{\frac{1}{2}} \theta^{-1} = e^{2\pi i (v_i r_i - \frac{\gamma_i q_i}{m_i})} Q^A_{\frac{1}{2}} \quad . \tag{2.160}$$

Por lo tanto, para que se preserve la supersimetría

$$v_i r_i - \frac{\gamma_i q_i}{m_i} \in \mathbb{Z} \quad . \tag{2.161}$$

En particular, para conservar exactamente $N = 1$ supersimetrías, se puede elegir un subgrupo $\mathbb{Z}_M$ de G, cuya acción se codifica en los autovalores (Γ, v) del retorcimiento.

Así el sector (x, y) de un modelo de Gepner cocientado por Γ es acompañado por una acción (θ^x, θ^y) sobre el toro interno. Llamando $\chi_{\alpha,x,y}(\tau)$ a la contribución a la función de partición de un tal sector retorcido (x, y) (y similarmente por $(\bar{x}, \bar{y})$), la función de partición será formalmente

$$Z_T = \frac{1}{M} \sum_{\alpha,\beta,x,y,\bar{x},\bar{y}} \tilde{\chi}(x, y, \bar{x}, \bar{y}) N_{\alpha\beta} e^{-2\pi i \frac{\Gamma x}{m}(q+y\Gamma)} \chi_{\alpha,x,y}(q) e^{-2\pi i \frac{\Gamma \bar{x}}{m}(q-\bar{y}\Gamma)} \chi_{\beta,\bar{x},-\bar{y}}(\bar{q}) \quad , \tag{2.162}$$

donde $\tilde{\chi}(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ es la multiplicidad usual del punto fijo (ver [71]) y

$$\chi_{\alpha,x,y}(\tau) = \left\{ \left[\frac{\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\eta^3} \right]^2 \prod_{i=1}^{3-n} e^{i\pi y v_i} \frac{\theta \begin{bmatrix} y v_i \\ x v_i \end{bmatrix}}{\theta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + y v_i \\ \frac{1}{2} + x v_i \end{bmatrix}} \chi_{\alpha + 2\Gamma y} \right\}_{\text{susy}} \tag{2.163}$$

son los caracteres supersimétricos $\chi_{\alpha,x,y}$ para los modos izquierdos (o derechos). Los primeros términos de la expansión en $q, \bar{q}$ (con $q = e^{-2\pi t}$) son

$$\begin{aligned} Z(\tau) \quad = \quad & \frac{1}{M} \sum N_{\alpha\beta} \tilde{\chi}(x, y, \bar{x}, \bar{y}) \times \\ & \times e^{2\pi i (r + y v) x v} e^{-2\pi i \frac{\Gamma x}{m}(q + y\Gamma)} q^{\frac{1}{2}(r+yv)^2 + E_0(y) + \sum h_{\alpha,y} - \frac{1}{2}} (1 + \cdots) \times \\ & \times e^{-2\pi i (\tilde{r} + \bar{y} v) \bar{x} v} e^{-2\pi i \frac{\Gamma \bar{x}}{m}(\bar{q} - \bar{y}\Gamma)} \bar{q}^{\frac{1}{2}(\tilde{r}+\bar{y}v)^2 + E_0(\bar{y}) + \sum \bar{h}_{\beta,\bar{y}} - \frac{1}{2}} (1 + \cdots) \quad , \end{aligned}$$

donde $E_0(y) = \sum_i \frac{1}{2} |y v_i| (1 - |y v_i|)$ es la energía de punto cero, y $h_{\alpha,y}$ es el peso conforme de los estados primarios contenidos en $\chi_{\alpha,x,y}$. Aquí $r, \tilde{r}$ son pesos de SO$(2n+2)$. Así, para un estado retorcido por y, codificado en los números $(r, \alpha)_y \equiv (r, l_i, q_i, s_i)_y$ podemos leer, por ejemplo, las condiciones para tener estados no masivos[7]

$$\frac{1}{2}(r + y v)^2 + E_0(y) + \sum h_{\alpha,y} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\tilde{r} + \bar{y} v)^2 + E_0(\bar{y}) + \sum \bar{h}_{\alpha,\bar{y}} - \frac{1}{2} = 0 \tag{2.164}$$

[7]Para estados masivos hay que incluir los descendientes de Gepner y los osciladores

donde el proyector sobre estados invariantes está dado por

$$D(y,\bar{y}) = \frac{1}{M}\sum_{x,\bar{x}} \tilde{\chi}(x,y,\bar{x},\bar{y}) e^{2\pi i(r+yv)xv} e^{-2\pi i\frac{\Gamma x}{m}(q+y\Gamma)} e^{-2\pi i(\tilde{r}+\bar{y}v)\bar{x}v} e^{2\pi i\frac{\Gamma\bar{x}}{m}(\bar{q}+\bar{y}\Gamma)} \quad . \tag{2.165}$$

Volvamos al caso de sólo Gepner con la intención de deducir una expresión para la amplitud de la botella de Klein para el caso en que no se cocienta al sector derecho ($\bar{\Gamma} = 0$) en la función de partición con invariante *diagonal*. En este caso la función de partición es

$$Z_T = \sum_\alpha \left(\frac{1}{M} \sum_{x,y} e^{-2\pi i \frac{\Gamma}{m} x(q+\Gamma y)} \chi_{\alpha+2\Gamma y} \right) \chi^*_\alpha \tag{2.166}$$

la que, después de sumar sobre x, puede reescribirse de la siguiente manera

$$Z_T = \sum_\alpha \left(\sum_y \delta\left(\frac{\Gamma}{m}(q+\Gamma y) \right) \chi_{\alpha+2\Gamma y} \right) \chi^*_\alpha \quad . \tag{2.167}$$

La invariancia modular puede verificarse fácilmente a partir de (2.154).

De esta última expresión se sigue que cocientar por simetría de fase la CFT induce una función de partición invariante modular más general que la diagonal.

Para hallar la amplitud de la botella de Klein los estados izquierdo y derecho deben ser idénticos. Así $y = 0 \mod m/2$. En particular, para m impar, sólo están permitidos los estados con $y = 0$, lo que lleva a

$$Z_K = \sum_\alpha \delta\left(\frac{\Gamma q}{m}\right) \chi_\alpha(2it) \quad . \tag{2.168}$$

Notemos que, cuando m es impar, *i.e.* el caso que consideramos principalmente en este capítulo, no hay sectores retorcidos y-veces en el canal directo. La acción $\mathbb{Z}_M$ sobre la amplitud de la botella de Klein se reduce a la proyección sobre estados invariantes por Γ. Notar, sin embargo, que los sectores retorcidos $(x, 0)$ irán a los sectores $(0, x)$ en el canal transverso y pueden dar origen a nuevas contribuciones a los tadpoles. Transformando la amplitud de la botella de Klein al canal transverso ($l = \frac{1}{t}$), y escribiendo la restricción $\delta\left(\frac{\Gamma q}{m}\right)$ como $\frac{1}{M}\sum e^{-2i\pi\Gamma x\frac{q}{m}}$ obtenemos

$$\tilde{Z}_K = \frac{1}{M}\sum_x \sum_{\alpha\beta} 2^D K_\alpha S_{\alpha\beta} \chi_{\beta+2\Gamma x}(il) \quad . \tag{2.169}$$

Como ya dijimos, en general, los campos RR no masivos presentes darán lugar a divergencias de tadpoles indeseadas cuando se integre sobre l. Por lo tanto es necesario incluir amplitudes de D–branas para cancelar dichas divergencias. Consideraciones similares se aplican al modelo híbrido, con la complicación adicional de que, en el presente caso, los caracteres también dependen de x e y. Para M impar, que es el caso principal aquí, la amplitud de la botella de Klein es

$$Z_K(2it) = \left\{ \frac{1}{M} \sum_{x,\alpha} \left[\frac{\theta \left[{0 \atop 0} \right]}{\eta^3} \right]^2 \prod_{i=1}^{3-n} \frac{\theta \left[{0 \atop xv_i} \right]}{\eta} \frac{-2 \sin \pi x v_i \eta}{\theta \left[{\frac{1}{2} \atop \frac{1}{2} + xv_i} \right]} K_\alpha e^{-2i\pi \Gamma x \frac{q}{m}} \chi_\alpha \right\}_{\text{susy}} \tag{2.170}$$

la que resulta de haber insertado las funciones de partición para orbifolds y modelos de Gepner.

2.8.2. Cociente por fase en $\mathbf{1}^6$

Veamos un ejemplo sencillo de cocientes por fases. Las proyecciones no equivalentes son

$$\Gamma^1 = (1,1,1,0,0,0) \tag{2.171}$$
$$\Gamma^2 = (1,1,1,-1,-1,-1) \quad . \tag{2.172}$$

Dado que aquí es $\Gamma^2 = 0 \text{ mod } 3$, (2.151) se reduce a requerir

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \text{ mod } 3 \tag{2.173}$$
$$q_1 + q_2 + q_3 - q_4 - q_5 - q_6 = 0 \text{ mod } 3 \tag{2.174}$$

para Γ^1 y Γ^2 respectivamente, para todos los sectores retorcidos $y = 0,1,2$. Concentrémonos en el primer modding en el caso diagonal.

La proyección $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ implica que los únicos caracteres supersimétricos permitidos son (ver cuadros B.8–B.10 en el apéndice 7.2) (no hay permutaciones aquí)[8]:

$$\begin{array}{l} (0,0)^6 \\ (1,-1)^3(0,0)^3 \\ (1,1)^3(0,0)^3 \\ (0,0)^3\underline{(0,0)(1,-1)(1,1)} \quad . \end{array} \tag{2.175}$$

Cuando se incluye la parte de espaciotiempo, el espectro resulta ser: un vector, dos estados de materia no masivo (en vez de los originales 20) y 6 caracteres masivos, respectivamente.

[8] Notar que el carácter permutado $(0,0)^3(1,-1)^3$ y los retorcimientos correspondientes también están permitidos por (2.173). Sin embargo cuando se consideran todos los y–retorcimientos, estos llevan a caracteres equivalentes y no deben ser contados dos veces.

Más explícitamente, denotemos por

$$
\begin{aligned}
NS_1 &\equiv |s;(0,0,0)^3(1,1,0)^3, Q_{int}=1> \\
NS_2 &\equiv |s;(1,-1,0)^3(0,0,0)^3, Q_{int}=-1> \\
(2,1)R_1 &\equiv |(2,1);(0,1,1)^3(0,-1,-1)^3, Q_{int}=0>
\end{aligned}
\tag{2.176}
$$

a los escalares y fermiones no masivos contenidos en el carácter supersimétrico $(1,-1)^3(0,0)^3$. Similarmente para $(1,1)^3(0,0)^3$ tenemos

$$
\begin{aligned}
NS_3 &\equiv |s;(1,1,0)^3(0,0,0)^3, Q_{int}=1> \\
NS_4 &\equiv |s;(0,0,0)^3(1,-1,0)^3, Q_{int}=-1> \\
(2,1)R_2 &\equiv |(2,1);(0,-1,-1)^3(0,1,1)^3, Q_{int}=0>
\end{aligned}
\tag{2.177}
$$

y para el vector $(0,0)^3(0,0)^3$

$$
\begin{aligned}
V &\equiv |(2,2);(0,0,0)^3(0,0,0)^3, Q_{int}=1> \\
(1,2)R_3 &\equiv |(1,2);(0,1,1)^3(0,1,1)^3, Q_{int}=1> \\
(1,2)R_4 &\equiv |(1,2);(0,-1,-1)^3(0,-1,-1)^3, Q_{int}=-1>
\end{aligned}
\tag{2.178}
$$

Sector cerrado

Los estados no masivos en el sector cerrado se obtienen acoplando diagonalmente los estados izquierdos y derechos de más arriba, y quedándose con las combinaciones invariantes bajo el intercambio izquierda–derecha Ω.

Los primeros dos caracteres dan lugar a 8 $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ (de los 16 fermiones R_iNS_j), 13 escalares 13 $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ $(4,6,2,1$ de NS_iNS_i, NS_iNS_j,R_iR_i y R_iR_j, $i\neq j$, respectivamente) y un multiplete tensorial (de R_1R_2). Este es el contenido de 3 $H+T$. Es interesante que el número de tensores más el de hipers sume 4 en vez de 20, esta es una indicación de que el $K3$ original de la teoría 1^6 sin cocientar *se transformó en un toro* al cocientar por la simetría discreta.

El tercer carácter produce un multiplete de supergravedad $N=1$ cuando se considera el acoplamiento V–V. Sin embargo no están permitidos los acoplamientos de la forma V$-(2,1)R_{1(2)}$, por lo que quedan dos estados del tipo 2 $(3,2)$, marcando la presencia de gravitinos extra, como era de esperar en la compactificación en el toro. Se puede verificar que todos los estados no masivos se juntan en un multiplete de supergravedad $N=2$

$$
(3,3)+(1,3)+(3,1)+2(2,3)+2(3,2)+(1,1)+4(2,2)+2(1,2)+2(2,1) \tag{2.179}
$$

más cuatro multipletes vectoriales $N = 2$

$$(2,2) + 4(1,1) + 2(2,1) + 2(1,2) \quad . \tag{2.180}$$

Sector abierto

La amplitud de la botella de Klein cocientada contiene los caracteres supersimétricos obtenidos de (2.176) y se puede escribir como

$$\mathcal{Z}_K^G(it) = \frac{1}{2}\{\chi^3_{(0,0)}\left(\chi_{(0,0)} + \chi_{(1,-1)} + \chi_{(1,1)}\right)^3\}^{susy}(2it) \quad , \tag{2.181}$$

en el canal transverso es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}}_K^G(il) = 9\,\frac{1}{2} \quad \{ \quad & \chi^6_{(0,0)} + \chi^3_{(1,-1)}\chi^3_{(0,0)} + \chi^3_{(1,1)}\chi^3_{(0,0)} + \\ + \quad & \underline{\{\chi_{(0,0)}\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}\}\chi^3_{(0,0)}}\}^{susy}(il) \quad . \end{aligned} \tag{2.182}$$

La siguiente función de partición en los canales directo y transverso del cilindro y de la cinta de Möbius dan una solución con grupo de calibre de D–brana $SO(n_2) \times U(n_1)$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_C(it) &= \{(n_1^2 + \frac{1}{2}n_2^2)\sum_j \chi^3_{(0,0)}X_j + (\frac{1}{2}n_1^2 + n_1 n_2)\sum_j \underline{\chi_{(0,0)}\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}}X_j\}^{susy}(it) \\ \tilde{\mathcal{Z}}_C(il) &= \frac{1}{2}\{(2n_1+n_2)^2[\chi^6_{(0,0)} + \chi^3_{(1,-1)}\chi^3_{(0,0)} + \chi^3_{(1,1)}\chi^3_{(0,0)}] \\ &\quad +(n_1-n_2)^2\underline{\chi_{(0,0)}\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}}\chi^3_{(0,0)}\}^{susy}(il) \\ \mathcal{Z}_M(it) &= \sum_j(-1)^{N_{(1,1)}}\{-\frac{1}{2}n_2\hat{\chi}^3_{(0,0)}\hat{X}_j - \frac{1}{2}n_1\underline{\{\hat{\chi}_{(0,0)}\hat{\chi}_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}\}}\hat{X}_j\}^{susy}(it) \\ \tilde{\mathcal{Z}}_M(is) &= \frac{1}{2}\{-(2n_1+n_2)[\chi^6_{(0,0)} + \chi^3_{(1,-1)}\chi^3_{(0,0)} + \chi^3_{(1,1)}\chi_{(0,0)}]^3 \\ &\quad -(n_1-n_2)e^{-\frac{i\pi}{3}}\underline{\{\chi_{(0,0)}\chi_{(1,-1)}\chi_{(1,1)}\}[\chi_{(0,0)}]^3\}}^{susy}(il) \end{aligned}$$

donde $\sum_i X_i$ denota la suma sobre todos los posibles productos de los tres caracteres, y el subrayado denota la suma sobre permutaciones.

Las condiciones de cancelación de tadpoles implican en este caso que $2n_1 + n_2 = 8$. Por lo tanto hay dos hipermultipletes no masivos que transforman en la representación adjunta de $SO(n_2)$ y $U(n_1)$ respectivamente.

Es interesante notar que el cociente de la teoría $(\mathbf{1_A})^\mathbf{6}$ que estamos considerando lleva a la misma amplitud de la botella de Klein que el acoplamiento $(\mathbf{1_C})^\mathbf{3}(\mathbf{1_A})^\mathbf{3}$. Sin embargo los sectores cerrados son diferentes.

2.8.3. Permutaciones cíclicas

Las permutaciones cíclicas en modelos de Gepner y de clases laterales heteróticos fueron estudiados en [49, 50, 51]. Estados de borde de permutación fueron considerados recientemente en [18].

Comencemos, por simplicidad, con una parte del sector interno construido a partir de M (con M un número primo) bloques conformes idénticos.

Siguiendo a [51], introducimos el operador P formal de proyección sobre estados idénticos del álgebra superconforme $N = 2$ (no necesariamente estados primarios), tal que P actuando sobre un producto tensorial de estados da cero, salvo que todos los estados (de los distintos bloques) tengan la misma carga y peso. Después de cocientar por esta simetría de permutación, se puede definir el siguiente "carácter"

$$\chi_{invar}(\tau) = (P + \frac{1-P}{M})\chi^M(\tau) = \frac{1}{M}\chi^M + \frac{M-1}{M}P\chi^M = \tag{2.183}$$

$$= \frac{1}{M}\chi^M(\tau) + \frac{M-1}{M}\chi(M\tau) \tag{2.184}$$

donde indicamos con el superíndice M que el carácter contiene el producto de M bloques idénticos. $P\chi = \mathrm{Tr}Pe^{2i\pi\tau(L_0-c/24)}$ indica formalmente que las trazas deben calcularse considerando simultáneamente el mismo estado en todos los bloques, tal que $P\chi^M(\tau) = \chi(M\tau)$ es el carácter de sólo un bloque, pero evaluado en $M\tau$. Cada uno de estos estados se cuenta una vez. El término $\frac{(1-P)}{M}$ corresponde al caso cuando al menos uno de los estados en un bloque es diferente a los demás. Dado que este estado puede pertenecer a cualquiera los M bloques, debemos dividir por M para obtener sólo un estado totalmente simétrico. Vemos que la parte invariante, no retorcida, producirá el mismo resultado que la función de partición original pero donde los estados relacionados por una permutación cíclica de los M bloques son contados sólo una vez.

Consideremos ahora la función de partición cerrada. Debido a la presencia de una contribución del punto fijo $\chi(M\tau)$, esta función de partición no es más invariante frente las transformaciones modulares, y se deben agregar sectores retorcidos por P. A partir de la función de partición invariante modular original $Z^M(\tau)$ con M bloques idénticos obtenemos finalmente

$$Z_{nueva}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{Z^M(\tau,\bar{\tau})}{M} + \frac{M-1}{M}Z(M\tau, M\bar{\tau}) + \frac{M-1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} Z(\frac{\tau+n}{M}, \frac{\bar{\tau}+n}{M}) \quad . \tag{2.185}$$

La invariancia modular puede verificarse notando que los sectores retorcidos

$$\frac{M-1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} Z(\frac{\tau+n}{M}, \frac{\bar{\tau}+n}{M}) \tag{2.186}$$

y $\frac{M-1}{M}Z(M\tau, M\bar{\tau})$ están relacionados entre sí a las mismas expresiones evaluadas en

$-1/\tau$ por una combinación de acciones de $SL(2,\mathbb{Z})$ en el argumento [9].

Por lo tanto, conociendo los campos de la teoría original, (2.185) nos permite calcular el espectro en la cuerda cerrada cocientada. Recordemos que, más allá del término $\frac{Z^M(\tau,\bar{\tau})}{M}$ que contiene la función de partición total original, en los otros términos los M bloques han sido reemplazados por exactamente uno. En particular, se puede demostrar [50] que los sectores retorcidos pueden ser interpretados como la función de partición de una nueva teoría de campos superconforme $N=2$ con carga central $\hat{c}=Mc$ (donde c es la carga central de cada una de las teorías idénticas), y los generadores de Virasoro dados en términos de los de la teoría original son

$$\hat{L}_m = \frac{L_{mM}}{M} + \frac{c(M^2-1)}{24M}\delta_{0,m} \tag{2.188}$$

$$\hat{G}^{\pm}_r = \frac{1}{\sqrt{M}} G^{\pm}_{rM} \tag{2.189}$$

$$\hat{J}_m = J_{mM} \quad . \tag{2.190}$$

Similares expresiones son válidas para los modos derechos.

Así, los pesos y las cargas de los estados primarios de la nueva teoría se obtienen a partir de los originales de la siguiente manera

$$h_{\text{nueva}} = \frac{h+m}{M} + \frac{c(M^2-1)}{24M} \tag{2.191}$$

$$Q_{\text{nueva}} = Q \tag{2.192}$$

donde m es el nivel del campo descendiente.

La suma sobre n en (2.186) impone la restricción $h+m-\bar{h}-\bar{m}=0 \quad mod \quad M$.

Para construir la función de partición de la cuerda total D–dimensional, deben incluirse el sector de espaciotiempo y los demás $r-M$ bloques de Gepner, y los caracteres deben supersimetrizarse de la manera usual [49, 50, 51]. A saber, la función de partición no cocientada es

$$\mathcal{Z}_T(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{\vec{\alpha},\vec{\bar{\alpha}}} \chi^{susy}_{\vec{\alpha}}(\tau)\mathcal{N}^{\vec{\alpha}\vec{\bar{\alpha}}}\chi^{susy\ *}_{\vec{\bar{\alpha}}}(\bar{\tau}) \tag{2.193}$$

---

[9] Más explícitamente, si se elige

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \frac{1+lm}{M} & m \\ l & M \end{pmatrix} \tag{2.187}$$

con l,m elegidos tales que $\frac{1+lm}{M}\in\mathbb{Z}$, es fácil ver que $\gamma(\tau',z') = (\frac{a\tau'+b}{c\tau'+d},\frac{z'}{c\tau'+d})$ y entonces, para $\tau'=\frac{\tau M}{1-l\tau}$, tenemos $\gamma(\tau')=\frac{\tau+m}{M}$, como se quería.

donde $\vec{\alpha}$ es un vector de índices de dimensión $d+r-M+M$ y el carácter total está dado esquemáticamente por

$$\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(\tau) = \frac{1}{m}\sum_{n,p}\left[\chi_0(\tau, z_{n,p})\right]^d \prod_{i=d+1}^{d+r-M} \chi_{\alpha_i}(\tau, z_{n,p}) \prod_{j=d+r-M+1}^{d+r} \chi_{\alpha_j}^M(\tau, z_{n,p}) \tag{2.194}$$

con $z_{n,p} = \frac{n}{2}\tau + \frac{p}{2}$ (y similarmente para el sector derecho). De nuevo, el superíndice M en el último carácter indica un producto de M caracteres correspondientes a los campos primarios de M bloques idénticos (el vector $\vec{\alpha}_M$ guarda la información de las últimas M entradas de $\vec{\alpha}$).

La función de partición invariante modular total es entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{nueva}^{susy}(\tau) \;=\; & \frac{1}{M}\sum_{n,p} \mathcal{Z}^{st}(\tau, z_{n,p})\mathcal{Z}^{r-M}(\tau, z_{n,p}) Z^M(\tau, z_{n,p}) \qquad (2.195)\\
& + \frac{M-1}{M}\sum_{n,p} \mathcal{Z}^{st}(\tau, z_{n,p})\mathcal{Z}^{r-M}(\tau, z_{n,p})\mathcal{Z}(M\tau, Mz_{n,p})\\
& + \frac{M-1}{M}\sum_{n,p}\sum_{m=0}^{M-1} \mathcal{Z}^{st}(\tau, z_{n,p})\mathcal{Z}^{r-M}(\tau, z_{n,p})\mathcal{Z}(\frac{\tau+m}{M}, z_{n,p}) \quad .
\end{aligned}$$

El primer término no es otra cosa que la función de partición original dividida por M. El segundo es la contribución de punto fijo, donde M bloques idénticos son reemplazados por uno evaluado en $M\tau$. La suma de ambos términos da cuenta de las contribuciones invariantes por permutaciones mencionadas anteriormente. El último término es la contribución del sector retorcido, la que, como se discute en (2.190), contiene una *nueva* teoría de campos conforme, donde los pesos y las cargas están dados por (2.192).

Notemos que las contribuciones de punto fijo y las retorcidas se construyen a partir de $r-M+1$ bloques internos. El índice vectorial $\vec{\alpha}$ debe reemplazarse por un índice "colapsado" $\vec{\alpha}'$ y el acoplamiento invariante modular para tales términos es

$$\mathcal{N}^{\vec{\alpha}'\bar{\vec{\alpha}}'} = \prod_{i=1}^{d}\mathcal{N}^{\vec{\alpha}_i\bar{\vec{\alpha}}_i} \prod_{j=d+1}^{d+r-M} \mathcal{N}^{\alpha_j\bar{\alpha}_j}\mathcal{N}^{\alpha_M\bar{\alpha}_M} \quad . \tag{2.196}$$

Aquí presentamos un ejemplo del cálculo.

A partir de (2.196) podemos obtener inmediatamente la función de partición de la botella de Klein. Debemos quedarnos sólo con la parte invariante izquierda–derecha y evaluarla en $2\ \mathrm{Im}\ \tau$ (ver (2.63)). En particular, la dependencia en m en el sector retorcido se cancela, al igual que el factor M en el denominador. Por lo tanto, la amplitud de la botella de Klein es

$$\mathcal{Z}_K = \frac{1}{2}\sum_{\vec{\alpha}} \mathcal{K}_{\vec{\alpha}} \chi^{susy}_{\vec{\alpha}}(2it) = \frac{1}{2M}\sum_{\vec{\alpha}} \mathcal{K}_{\vec{\alpha}} \chi^{susy}_{\vec{\alpha}} \quad + \quad \frac{M-1}{2M}\sum_{\vec{\alpha}'} \mathcal{K}_{\vec{\alpha}'} \chi^{fijo}_{\vec{\alpha}'} + \\ + \quad \frac{(M-1)}{2}\sum_{\vec{\alpha}'} \mathcal{K}_{\vec{\alpha}'} \chi^{retorcido}_{\vec{\alpha}'} \tag{2.197}$$

donde $\chi^{susy}_{\vec{\alpha}}$ es el carácter supersimétrico original introducido en (2.194),

$$\chi^{fijo}_{\vec{\alpha}'} = \frac{1}{m}\sum_{n,p} [\chi_0(\tau, z_{n,p})]^d \prod_{i=d+1}^{d+r-M} \chi_{\alpha_i}(\tau, z_{n,p}) \chi_{\alpha_M}(2itM, Mz_{n,p}) \tag{2.198}$$

y

$$\chi^{retorcido}_{\vec{\alpha}'} = \frac{1}{m}\sum_{n,p} [\chi_0(2it, z_{n,p})]^d \prod_{i=d+1}^{d+r-M} \chi_{\alpha_i}(2it, z_{n,p}) \chi_{\alpha_M}(\frac{2it}{M}, z_{n,p}) \tag{2.199}$$

(donde $z_{n,p}$ está definido como antes con $\tau \to 2it$). Es interesante notar que un resultado similar fue obtenido en [18] en términos de estados de borde.

Una vez que se ha obtenido la amplitud de botella de Klein, podemos seguir el procedimiento usual para construir el sector abierto. Vale la pena hacer notar que cuando los caracteres están expresados en términos de $l = 1/2t$, los caracteres fijos y retorcidos se intercambian, como puede verse usando las transformaciones modulares dadas en (2.64) para obtener la amplitud en el canal transverso, a saber

$$\chi^{fijo}_{\vec{\alpha}'}(2it) = S_{\vec{\alpha}'\vec{\beta}'} \chi^{retorcido}_{\vec{\beta}'}(il) \quad . \tag{2.200}$$

Entonces la amplitud de la botella de Klein en el canal transverso es

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K = \frac{1}{2M}\sum_{\vec{\alpha}} S_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \mathcal{K}^{\vec{\alpha}} \chi^{susy}_{\vec{\beta}} \quad + \quad \frac{(M-1)}{2}\sum_{\vec{\alpha}'} S_{\vec{\alpha}'\vec{\beta}'} \mathcal{K}^{\vec{\beta}'} \chi^{fijo}_{\vec{\alpha}'} \\ + \quad \frac{M-1}{2M}\sum_{\vec{\alpha}'} S_{\vec{\alpha}'\vec{\beta}'} \mathcal{K}^{\vec{\beta}'} \chi^{retorcido}_{\vec{\alpha}'} \quad . \tag{2.201}$$

Recordar que los factores en frente de las sumatorias son distintos de los de (2.197).

El primer término llevará a la misma estructura de tadpoles que en la teoría original, no permutada. No esperamos que aparezcan nuevas contribuciones a los tadpoles a partir del término de punto fijo. De hecho, si una tal contribución existe, ya está contenida en el primer término. En cambio la última parte contendrá nuevos estados, con cargas y pesos conformes dados por (2.191) y (2.192), y pueden producir nuevas condiciones de cancelación de tadpoles. Veamos algunos ejemplos.

• **Permutaciones $M = 3$ en el modelo diagonal 1^6 .**

Consideremos permutaciones de los tres primeros bloques en la teoría 1^6 diagonal.

En la teoría original hay 20 hipermultipletes no masivos dentro de los caracteres $\underline{(0,0,0)^3(1,1,0)^3}$ (y estados de carga positiva $\underline{(0,0,0)^3(1,-1,0)^3}$).(Recordar que el subrayado denota todas las posibles permutaciones de los bloques subrayados). Cuando cocientamos por las permutaciones de los tres primeros bloques, la contribución del sector no retorcido requiere que se identifiquen los estados no permutados (se cuentan como uno), y nos queda

$$(0,0,0)^3(1,1,0)^3 \tag{2.202}$$

$$(1,1,0)^3(0,0,0)^3 \tag{2.203}$$

$$\{(1,1,0)^2(0,0,0)\}\underline{(0,0,0)^2(1,1,0)} \tag{2.204}$$

$$\{(1,1,0)(0,0,0)^2\}\underline{(0,0,0)(1,1,0)^2} \tag{2.205}$$

(y similarmente para los que tienen carga opuesta) y quedan $1+1+3+3=8$ hipermultipletes cuando se los acopla con los mismos estados del sector derecho.

Ahora incluyamos las contribuciones de los sectores retorcidos.

El peso conforme de un estado es la suma de los pesos conformes de espaciotiempo e interno. Si estamos interesados en los estados de materia no masivos debemos buscar todos los estados con $\Delta_{int} = 1/2$ donde las primeras tres teorías están ahora reemplazadas por la nueva teoría conforme de (2.192). Se ve así que, de la expresión para $\Delta_{\rm nueva}$ en (2.192), que masa cero requiere $m = 0$. Para un tal $m = 0$ obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} (l,q,s) & \rightarrow & (\Delta, \Delta_{\rm nueva}, Q_{\rm nueva} = Q) \\ (1,1,0) & \rightarrow & (1/6, 1/6, -1/3) \\ (1,-1,-2) & \rightarrow & (2/3, 1/3, -2/3) \\ (1,-1,0) & \rightarrow & (1/6, 1/6, 1/3) \\ (1,1,2) & \rightarrow & (2/3, 1/3, 2/3) \end{array} \tag{2.206}$$

de los que se obtienen las combinaciones no masivas de carga impar

$$\begin{array}{r} \{(1,1,0)\}_{\rm nueva}\underline{(1,1,0)(1,1,0)(0,0,0)} \\ \{(1,-1,-2)\}_{\rm nueva}\underline{(1,1,0)(0,0,0)(0,0,0)} \\ \{(1,-1,0)\}_{\rm nueva}\underline{(1,-1,0)(1,-1,0)(0,0,0)} \\ \{(1,1,2)\}_{\rm nueva}\underline{(1,-1,0)(0,0,0)(0,0,0)} \end{array} \tag{2.207}$$

dando seis estados no masivos con carga total -1 (y otros seis con carga 1). Debido al factor extra $M-1=2$, tenemos un total de 24 estados retorcidos no masivos que dan origen a 12 hipermultipletes cuando se los acopla con los mismos estados del sector derecho. La suma de los estados retorcidos y no retorcidos dan lugar a un total de 20, correspondientes a los de un $K3$, como se esperaba.

Vale la pena remarcar que hay que tener cuidado cuando se consideran las identificaciones de campos en la teoría *nueva*. Campos que eran equivalentes en la teoría original($Z(\tau)$) no lo son en la nueva teoría retorcida $Z(\tau/M)$, esto puede llevar a un conteo incorrecto si no se lo tiene cuenta adecuadamente. A saber, las equivalencias (2.23), (2.24) son ahora

$$\begin{aligned}&\{(l,q,s)\}_{\text{nueva}} \equiv \{(k-l, q+M(k+2), s+2M)\}_{\text{nueva}} \equiv \\ &\qquad \{(l, q+2M(k+2), s\}_{\text{nueva}} \equiv \{(l,q,s+4M)\}_{\text{nueva}} \quad .\end{aligned} \tag{2.208}$$

Para $M=3$ estas equivalencias no dan lugar a estados extra. Sin embargo, la situación es diferente cuando se consideran, por ejemplo, permutaciones $M=5$. De hecho en este último caso es fácil ver que 4 hipermultipletes no retorcidos y que las combinaciones

$$\begin{aligned}\{(0,0,2)\}_{\text{nueva}}(0,0,0)\\ \{(1,1,2)\}_{\text{nueva}}(1,-1,0)\end{aligned} \tag{2.209}$$

son contribuciones de estados retorcidos de masa cero. Cuando se los acopla diagonalmente a los modos derechos, se obtiene 8 hipermultipletes retorcidos (recordar el factor $M-1=4$), en vez de 18 como era de esperar. Sin embargo, cuando se consideran las nuevas equivalencias anteriores, se ve que, cuando se acoplan los sectores izquierdo y derecho con el invariante modular diagonal, se tiene ahora

$$\{(1,3,4)\}_{\text{nueva}}(0,0,0) \quad -- \quad \{(1,3,4)\}_{\text{nueva}}(0,0,0) \tag{2.210}$$

$$\{(1,1,2)\}_{\text{nueva}}(1,1,0) \quad -- \quad \{(1,1,2)\}_{\text{nueva}}(1,1,0) \tag{2.211}$$

$$\{(1,3,4)\}_{\text{nueva}}(0,0,0) \quad -- \quad \{(1,13,10)\}_{\text{nueva}}[(1,1,0) \equiv (0,2,2)] \tag{2.212}$$

$$\{(1,1,2)\}_{\text{nueva}}(1,1,0) \quad -- \quad \{(1,21,4)\}_{\text{nueva}}[(0,0,0) \equiv (1,3,2)] \tag{2.213}$$

lo que da los 16 hipermultipletes esperados.

Sector abierto

Hagamos un bosquejo de la construcción del sector abierto.

La amplitud de la botella de Klein en el sector transverso está dada genéricamente por (2.201).

En nuestro ejemplo 1[6] el primer factor no es más que $1/M$ veces el original, como se ve de (2.117). La contribución "retorcida" (que viene del *punto fijo* del canal directo) es proporcional a

$$\frac{M-1}{2M}\sum_{n,p}\frac{(-1)^{n+p}}{2m}\left(\chi_{(0,0);p,-n}(il)\right)^3\left(\chi_{(0,0);p,-n}(il/M)\right) \quad . \tag{2.214}$$

Ambos términos contribuyen a los tadpoles. Una solución sencilla, como la de la sección 2.6, es proponer una función de partición similar para las amplitudes del cilindro y la cinta de Möbius , a saber $\tilde{\mathcal{Z}}_C = n^2 = \tilde{\mathcal{Z}}_K$ y $\tilde{\mathcal{Z}}_M = -2n\tilde{\mathcal{Z}}_K(il+1/2)$. Así se aseguran la factorización y las condiciones de cancelación de tadpoles requieren $n = 8$ como antes. Entonces, de las amplitudes del canal directo hallamos de nuevo un grupo de calibre $SO(8)$. Ahora el sector no retorcido contribuye con 4 hipermultipletes en la **28** (2 en $M = 5$), mientras que el sector retorcido genera los 6 (8) extra (recordar las identificaciones en (2.208)), completando un total de 10 hipermultipletes.

De esta manera, como preveíamos, recuperamos el mismo espectro no masivo, con parte de él viniendo de la parte invariante de la función de partición y el resto de la contribución de los sectores retorcidos. De hecho, la cancelación de anomalías en $D = 6$ nos hacía prever esto. Aún si la **28** es libre de anomalías de calibre, se necesitan 10 de estos hipermultipletes para asegurar la ausencia de anomalías gravitacionales.

Un cálculo similar para el modelo 1^9 en $D = 4$, el que originalmente tiene 84 estados izquierdos en la **6** de $SO(4)$, resulta en 12 estados no retorcidos y 6 retorcidos, en el caso de permutar con $M = 7$, dando lugar a una reducción efectiva en el número de estados. Recordar que (este es un resultado general) debido al término $\frac{c(M^2-1)}{24M}$ en (2.191), no habrá contribuciones directas del sector nuevo retorcido al carácter del vector. En principio todavía puede contribuir vía cancelación de tadpoles .

Como un último ejemplo consideremos el modelo (*quíntica*) 3^5 diagonal en $D = 4$, permutando los 5 bloques. El sector retorcido corresponde ahora a sólo una teoría con pesos y cargas dados por (2.191), (2.192). De (2.191) notamos que $h_{\text{nueva}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}(h + m)$, donde h son los pesos conformes dados por los cuadros B.8–B.10. Vemos así que los estados no masivos retorcidos no están permitidos. Por otro lado, vemos que la condición de carga total impar no puede ser satisfecha y, por lo tanto, no hay sector retorcido. O sea, los retorcimientos por permutaciones cíclicas $M = 5$ actúan libremente en este modelo. Los 101 estados no masivos originales (de carga 1) se reducen en este caso a 21.

Capítulo 3

Modelos quirales en orientifolios de Gepner + orbifolds

3.1. Introducción

En $D = 4$ dimensiones cada sector de la teoría tipo IIB está descripto por una teoría conforme con carga central total $c_{tot} = c_{st} + c_{int} = 12$, donde $c_{st} = 3$ y $c_{int} = 9$ son las cargas centrales correspondientes a los sectores de espaciotiempo e internos (de seis dimensiones), respectivamente. En una compactificación de tipo toroidal seis campos bosónicos y fermiónicos, cada uno de los cuales contribuye con 1 y 1/2 a la carga central respectivamente, se enrollan en las seis dimensiones extra para obtener una teoría consistente. Este tipo de compactificaciones son generalmente no quirales, dado que se preservan demasiadas supersimetrías. Si están presentes singularidades de tipo orbifold, algunos o todos los generadores de supersimetrías se anulan al ser proyectados. Por ejemplo, consideremos la acción del orbifold $\mathbb{Z}_N$ realizada por el generador θ tal que

$$\theta^x Y_i = \mathrm{e}^{2i\pi x v_i} Y_i \tag{3.1}$$

donde x es un número entero y donde Y_I, $I = 1, 2, 3$ son coordenadas bosónicas complejas que parametrizan el toro interno $\mathbb{T}^6$. El vector de retorcimiento $v = (v_1, v_2, v_3)$ codifica la acción del orbifold sobre cada plano complejo. Así, por ejemplo, para estados no masivos izquierdos (o derechos) de Ramond de la forma $|\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle$ con $\sigma_0, \sigma_i = \pm\frac{1}{2}$, tenemos

$$\theta^x |\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle = \mathrm{e}^{2i\pi x v\cdot\sigma} |\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle \quad . \tag{3.2}$$

La condición de invariancia

$$\sigma_I v_I \in \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

elimina por proyección algunos de los estados fermiónicos y así reduce el número de supersimetrías.

En particular, la condición $\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 = 0$ asegura que hay un gravitino en ambos sectores IIB sin retorcer NS-R y R-NS. La proyección bajo Ω produce el sector cerrado del orientifolio y lleva a N=1 supersimetrías D=4. La función de partición puede verse en, por ejemplo, la ref. [62].

3.2. Sector abierto

Los estados de cuerda abierta se escriben formalmente como

$$|\Phi_k; i, j\rangle \lambda^k_{ji} \quad , \tag{3.4}$$

donde λ^k etiqueta la representación del grupo de calibre según la cual transforma el estado Φ_k. Por ejemplo, si el estado Φ_0 corresponde a bosones de calibre, λ^0 representa a generadores del grupo de calibre G[1].

Resulta útil [62] escribir las matrices de Chan–Paton en una base de Cartan–Weyl, donde los generadores se organizan en cargados $\lambda_a = E_a$, $a = 1, \dots, \dim G$ y de Cartan $\lambda_I = H_I$, $I = 1, \dots, \text{rango}\ G$.

En tal base, la información acerca del grupo de calibre y de las representación de materia se codifican en las correspondientes raíces y vectores de pesos. Los λ^k permitidos están determinados por la consistencia de la teoría total de cuerdas abiertas, asegurando la factorización, cancelación de tadpoles y grupos clásicos de calibre con representación de dos índices.

Supongamos que los factores de Chan–Paton ya han sido determinados y que ahora actuamos sobre los estados de cuerdas con un generador θ de un grupo de simetría $\mathbb{Z}_M$. Esta acción se manifiesta como una fase δ_k sobre un campo Φ_k de la hoja de mundo y debería, en principio, ser acompañado por la correspondiente acción del grupo tal que

$$\begin{aligned} \hat{\theta}|\Phi_k; i, j\rangle \lambda_{ji} &= \gamma_{ii'} |\hat{\theta}\Phi_k; i', j'\rangle \gamma_{j'j} \lambda_{ji} \\ &= e^{2\pi i \delta_k} (\gamma^{-1}\lambda\gamma)_{j'i'} |\Phi_k; i', j'\rangle \quad . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la invariancia bajo esta acción requiere

$$e^{2\pi i \delta_k} \gamma^{-1} \lambda^k \gamma = \lambda^k \tag{3.5}$$

(Notar que esta γ *no* es la del modding por fase).

[1] que genéricamente será un producto de grupos unitarios, ortogonales y simplécticos.

Para M impar y para la función de partición dada en (2.168), sabemos que retorcer por $\mathbb{Z}_M$ se reduce a una proyección sobre el sector sin retorcer por y. Así, para un caso híbrido donde el sector interno es de la forma (Modelo de Gepner)$^{c=3n} \times \mathbb{T}^{2(3-n)}/\mathbb{Z}_M$ ($n = 1, 2, 3$), sólo permanecerán en el espectro estados invariantes (v, Γ) de cuerda abierta con factores de Chan–Paton que satisfagan la ecuación anterior con

$$\delta_k = \left(v.r - \frac{\Gamma.q}{m}\right) \quad . \tag{3.6}$$

Siguiendo los mismos pasos que en [62], podemos representar un retorcimiento $\mathbb{Z}_M$ de Chan–Paton en términos de los generadores de Cartan como $\gamma = e^{2\pi i V H}$, donde V es un vector de autovalores de "desplazamiento" de la forma genérica

$$V = \frac{1}{M}\left(0^{N_0}, 1^{N_1}, \ldots, (M-1)^{N_{M-1}}\right) \tag{3.7}$$

(asegurando $\gamma^M = 1$) y los generadores de Cartan están representados por submatrices σ_3 de 2×2.

En esta base, la ecuación de proyección (3.5) se reduce a la condición simple

$$\rho_k V = \delta_k \quad , \tag{3.8}$$

donde ρ_k es un vector de pesos asociado a la representación λ^k.

Similarmente podemos representar la acción Ω sobre los Chan–Paton en términos de la matriz unitaria γ_Ω. Más generalmente, la acción de Ωg, $g \in \mathbb{Z}_M$, está dada por

$$\Omega g : |\Psi, ab) \to (\gamma_{\Omega g,p})_{aa'} |\Omega g \Psi, b'a')(\gamma_{\Omega g,q})^{-1}_{b'b} \quad . \tag{3.9}$$

La consistencia con la ley de multiplicación del grupo del orientifolio implica varias restricciones sobre las matrices γ, como

$$\gamma_{\Omega g,p} = \gamma_{g,p}\gamma_{\Omega,p} \tag{3.10}$$

o de $(\Omega\theta^x)^2 = \theta^{2x}$,

$$\gamma_{\Omega x,p} = \pm\gamma_{2x,p}\gamma^T_{\Omega x,p} \quad . \tag{3.11}$$

La cancelación de tadpoles impone más condiciones sobre las matrices γ.

Para resumir esta sección, notemos que hemos conseguido hallar un modelo consistente con factores de Chan–Paton λ^k conocidos, a partir del cual se pueden construir fácilmente modelos cocientados por simetrías de fase, por ejemplo a partir de las restricciones debidas a la consistencia de los estados de borde y de las amplitudes del canal directo. Los estados de cuerda abierta son tan sólo un subconjunto de los originales.

Recordar que, aunque el grupo inicial fuera no quiral, como sería el caso si hubiéramos empezado con un invariante diagonal con k impar (dando lugar a grupos de calibre SO(n) o Sp(n)), la condición de proyección $\rho_k V = 0$ sobre los bosones de calibre puede originar grupos unitarios. Esto funciona en forma similar a cómo los estados invariantes por un orbifold son seleccionados a partir de los factores de Chan–Paton de la D9–brana SO(32) en las compactificaciones de orbifold impar de tipo I. Sin embargo, no cualquier proyección es posible, dado que las condiciones de cancelación de tadpoles deben satisfacerse.

Es interesante notar que, para el caso de k par, aparece un sector retorcido por $y = 0 \mod m/2$. Así, estos nuevos estados, ausentes en la teoría original, estarán presentes genéricamente. Esto señala la presencia de un nuevo tipo de branas con cuerdas abiertas extendiéndose entre ellas como, por ejemplo, las D5–branas que aparecen en las compactificaciones de orbifold par tipo I. Habrá condiciones extra de cancelación de tadpoles asociadas a tales estados.

3.3. Cancelación de tadpoles

Procederemos a escribir las amplitudes en los canales directo y transverso para estudiar la factorización y la cancelación de tadpoles. Por simplicidad, consideramos primero el caso de modelos de Gepner "puro" impar (con sólo k impares), y luego generalizaremos al caso híbrido. La amplitud del cilindro está dada por

$$Z_C(it) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{\gamma\alpha\beta} C^{\gamma}_{\alpha\beta} \text{ tr } \gamma_{\alpha,x} \text{ tr } \gamma_{\beta,x} e^{-2i\pi\Gamma\frac{q}{m}x} \chi_\gamma(it) \tag{3.12}$$

la que no es más que la generalización de (2.8) cuando se incluye un proyector $\frac{1}{M}\sum \theta^x$ en la traza. Esta amplitud en el canal transverso es

$$\tilde{Z}_C(il) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\gamma}_{\alpha\beta} S_{\gamma\delta} \text{ tr } \gamma_{\alpha,x} \text{ tr } \gamma_{\beta,x} \chi_{\delta+2\Gamma x}(il) \tag{3.13}$$

donde hemos usado (2.154). Notar que para cada x fijo, se verifica (2.11) con $n_a \to$ tr $\gamma_{a,x}$. A saber,

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} S_{\gamma\delta} \text{ tr } \gamma_{\alpha,x} \text{ tr } \gamma_{\beta,x} = (D^{\beta}_{\alpha} \text{ tr } \gamma_{\alpha,x})^2 \tag{3.14}$$

indicando que la amplitud transversa puede ser escrita como un cuadrado

$$\tilde{Z}_C(il) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{\alpha\beta} (D^{\beta}_{\alpha} \text{ tr } \gamma_{\alpha,x})^2 \chi_{\beta+2\Gamma x}(il) \quad . \tag{3.15}$$

Finalmente, la cinta de Möbius contribuye a un lazo en el sector abierto de la siguiente manera

$$Z_M\left(it+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{\gamma\alpha} M_\alpha^\gamma \text{ tr } (\gamma_{\Omega x,\alpha}^{-1}\gamma_{\Omega x,\alpha}^T)e^{-2i\pi\Gamma\frac{q}{m}x}\hat{\chi}_\gamma\left(it+\tfrac{1}{2}\right) \quad , \tag{3.16}$$

donde volvemos a usar los caracteres reales *con sombrero*. Así, la amplitud transversa de la cinta de Möbius es

$$\tilde{Z}_M\left(il+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{\gamma\alpha} 2^{\frac{D}{2}}\tilde{M}_\alpha^\gamma \text{ tr } (\gamma_{\Omega x,\alpha}^{-1}\gamma_{\Omega x,\alpha}^T)\hat{\chi}_{\gamma+4\Gamma x}\left(il+\tfrac{1}{2}\right) \quad , \tag{3.17}$$

donde $\tilde{M}_\alpha^\delta = P_{\delta\gamma}M_\alpha^\gamma$.

Juntando las contribuciones de la botella de Klein, el cilindro y la cinta de Möbius en el canal transverso, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{\alpha} \Big\{ &(O^\alpha)^2\chi_\alpha(il)+(D_\beta^\alpha \text{ tr } \gamma_{\beta,x})^2\chi_\alpha(il)+\\ &+2\times 2^{\frac{D}{2}}\tilde{M}_\beta^\alpha \text{ tr } (\gamma_{\Omega x,\beta}^{-1}\gamma_{\Omega x,\beta}^T)\hat{\chi}_\alpha(il+\tfrac{1}{2}) \Big\} \quad .\end{aligned} \tag{3.18}$$

Notar que a pesar de no haber sectores retorcidos por Γ en el canal directo, las proyecciones hacen aparecer sectores x–retorcidos en el transverso.

La factorización (2.6) para $l\to\infty$, se reduce a

$$(D_\beta^\alpha \text{ tr } \gamma_{\beta,2x})^2+2\times 2^{\frac{D}{2}}\tilde{M}_\beta^\alpha \text{ tr } (\gamma_{\Omega x,\beta}^{-1}\gamma_{\Omega x,\beta}^T)+(O^\alpha)^2=\text{cuadrado perfecto} \quad . \tag{3.19}$$

A saber, $2^{\frac{D}{2}}\tilde{M}_\alpha = D_\alpha O_\alpha$ y

$$\text{tr } (\gamma_{\Omega x,\alpha}^{-1}\gamma_{\Omega x,\alpha}^T)=\pm \text{ tr } \gamma_{2x,\alpha} \tag{3.20}$$

es el mismo tipo de condición que en las compactificaciones tipo orbifold [43]. Es interesante que, con esta condición, las amplitudes factorizadas en la teoría cocientada pueden ser escritas inmediatamente a partir de la teoría sin proyectar haciendo tan sólo el reemplazo

$$n_\alpha \to \text{ tr } \gamma_{\alpha,x} \quad . \tag{3.21}$$

Por otro lado, la condición de carga cero para los campos de RR no masivos (2.7) se halla fácilmente pidiendo

$$D_a^\alpha \text{ tr } \gamma_{a,x}+O^\alpha=0 \tag{3.22}$$

para los caracteres $\chi_{\alpha+2\Gamma x}$ que contengan estados RR no masivos.

En particular, para el sector transverso no retorcido ($x = 0$), se recuperan las condiciones originales, dado que $\text{tr}\ \gamma_{a,0} = n_a$. Como ya se mencionó, cuando se consideran invariantes modulares diagonales, el número de condiciones de tadpole es menor que con otros invariantes, y por lo tanto son más fáciles de resolver. Sin embargo, después de cocientar por simetrías de fase, este número aumenta (debido a los estados de masa cero retorcidos en el transverso).

Las condiciones de cancelación de tadpoles pueden generalizarse a modelos híbridos $T^{2(3-n)} \times$ *Gepner* y cocientes por $\mathbb{Z}_N$ (N impar) de la siguiente manera

$$D_\beta(\ \text{tr}\ \gamma_{\alpha,x}) + 2O_\beta \prod_{i=0}^{3-n} 2\cos\pi x v_i = 0 \tag{3.23}$$

la que viene de transformar al canal transverso (2.170) y las amplitudes del sector abierto

$$Z_C(it) = \left\{ \sum_{\alpha\beta\gamma} \left[\frac{\theta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]}{\eta^3}\right]^2 \prod_{i=1}^{3-n} \frac{\theta\left[\begin{smallmatrix}0\\xv_i\end{smallmatrix}\right]}{\eta} \frac{-2\sin\pi x v_i \eta}{\theta\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}+2xv_i\end{smallmatrix}\right]} C^\gamma_{\alpha\beta} e^{-2i\pi\Gamma x\frac{q}{m}} \chi_\gamma\ \text{Tr}\ \gamma_{x,\alpha}\ \text{Tr}\ \gamma_{x,\beta} \right\}_{\text{susy}}$$

$$Z_M\left(it+\tfrac{1}{2}\right) = \left\{ \sum_{\alpha a} \left[\frac{\theta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]}{\eta^3}\right]^2 \prod_{i=1}^{3-n} \frac{\theta\left[\begin{smallmatrix}0\\xv_i\end{smallmatrix}\right]}{\eta} \frac{-2\sin\pi x v_i \eta}{\theta\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}+2xv_i\end{smallmatrix}\right]} M^\alpha_a e^{-2i\pi\Gamma x\frac{q}{m}} \hat{\chi}_\alpha\ \text{Tr}\ \left[\gamma^{-1}_{\Omega x,a}\gamma^T_{\Omega x,a}\right] \right\}_{\text{susy}} .$$

Recordemos que debido a la acción combinada del retorcimiento por el orbifold y por Ω, debe incluirse una suma sobre momentos cuantizados o sobre enrollamientos (ver [62]). Para obtener las condiciones de cancelación de tadpoles, debemos tomar el límite $t \to 0$ en las distintas trazas y luego hacer un cambio de variables adecuado a l para hallar el comportamiento de las amplitudes para l grande. El último paso es juntar todos los términos que tengan la misma dependencia en "l" en este límite.

3.4. Ejemplos

En esta sección mostramos algunos ejemplos explícitos de modelos quirales en $D = 4$, siguiendo los pasos generales discutidos más arriba. La situación en que el sector interno es *puramente* Gepner se ilustra con cocientes por fase de la quíntica 3^5_A. La situación híbrida de un sector interno Gepner–orbifold es ejemplificada considerando orbifolds de $(1)^6 \times T^2$ y $(1)^3 \times T^4$. El último es un modelo peculiar, en algún sentido, dado que la parte de Gepner es, en realidad, también un caso (especial) de toro. Sin embargo, es útil no sólo para ilustrar el método general sino para mostrar cómo se obtienen modelos donde el rango se reduce.

3.4.1. $\mathbf{3^5_A}/\mathbb{Z}_5$

Una teoría de cuerda abierta consistente donde el sector interno está dado por el modelo de Gepner $\mathbf{3^5}$ con invariante modular, fue construida en 2.7.2 (pág. 39). Seguiremos aquí con la misma notación (ver también [66] y [68]). La función de partición de la botella de Klein se puede escribir como

$$\mathcal{Z}_K(it) = \frac{1}{2}\frac{1}{5}\left[(\chi_I(it) + \chi_{II}(it))^5\right]^{\text{susy}} , \tag{3.24}$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_I &= \chi_{(0,0)} + \chi_{(3,-3)} + \chi_{(3,-1)} + \chi_{(3,1)} + \chi_{(3,3)} \\ \chi_{II} &= \chi_{(2,0)} + \chi_{(2,2)} + \chi_{(1,-1)} + \chi_{(1,1)} + \chi_{(2,-2)} \end{aligned} \tag{3.25}$$

la cual es, en el canal transverso

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2}2^4\sqrt[4]{5}\left[(\kappa^{\frac{3}{2}}\tilde{\chi}_{(0,0)}(il) + \kappa^{-\frac{3}{2}}\tilde{\chi}_{(2,0)}(il))^5\right]^{\text{susy}} , \tag{3.26}$$

donde $\kappa \equiv \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. La función de partición en el canal transverso puede escribirse en términos de $\tilde{\chi}_{(0,0)}(il)^{1-\gamma_i}\tilde{\chi}_{(2,0)}^{\gamma_i}$ (donde los exponentes indican el número de veces que aparece cada factor, sin importar el orden). Cada término está codificado en un vector de 5 componentes (uno para cada teoría) $\vec{\gamma}$ que valen 0 ó 1 (correspondiendo a estados que pertenecen al conjunto I o II en el canal directo, respectivamente). Por ejemplo, reescribiendo (3.26) como

$$\tilde{\mathcal{Z}}_K(il) = \frac{1}{2}\mathcal{O}^2_{\vec{\gamma}}\left[\prod_{i=1}^{5}(\tilde{\chi}_{(0,0)}(il))^{1-\gamma_i}(\tilde{\chi}_{(2,0)}(il))^{\gamma_i}\right]^{\text{susy}} \tag{3.27}$$

encontramos que los únicos coeficientes que no se anulan son

$$\mathcal{O}_{\vec{0}} = 2^4 5^{\frac{1}{8}}\kappa^{\frac{15}{2}} \qquad \mathcal{O}_{\vec{1}} = 2^4 5^{\frac{1}{8}}\kappa^{-\frac{15}{2}} , \tag{3.28}$$

donde $\vec{0} \equiv (0,0,0,0,0)$ y $\vec{1} \equiv (1,1,1,1,1)$.

Similarmente se definen los coeficientes $\mathcal{D}_{\vec{\gamma}}$ y $\mathcal{M}_{\vec{\gamma}}$ para las amplitudes del cilindro y la cinta de Möbius. La consistencia está asegurada por [65]

$$\mathcal{D}^2_{\vec{\gamma}} = \frac{5^{1/4}}{\kappa^{5/2}}\frac{\left(\sum_{\vec{\delta}}\kappa^{(\vec{\gamma}-\vec{\delta})^2}(-1)^{\vec{\gamma}\vec{\delta}}n^{\vec{\delta}}\right)^2}{\kappa^{(\vec{\gamma})^2}} . \tag{3.29}$$

y

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\vec{\gamma}} = \tilde{\mathcal{D}}_{\vec{\gamma}}\tilde{\mathcal{O}}_{\vec{\gamma}} = -\sum_{\vec{\delta}}\sqrt[4]{5}(-1)^{(\vec{\gamma})^2}\kappa^{(\vec{\gamma}-\vec{\delta})^2}(-1)^{\vec{\gamma}.\vec{\delta}}\kappa^{\frac{5}{2}-2(\vec{\gamma})^2}n_{\vec{\delta}} . \tag{3.30}$$

Las condiciones de cancelación de tadpoles son entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\vec{0}} + \mathcal{O}_{\vec{0}} &= 0 \\ \mathcal{D}_{\vec{1}} + \mathcal{O}_{\vec{1}} &= 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

que se traduce en la ya vista ec. 2.137, que repetimos aquí

$$\begin{aligned} n_0 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 &= 12 \\ n_1 + n_2 + 2n_3 + 3n_4 + 5n_5 &= 20 \end{aligned} \tag{3.32}$$

donde $n_i = \sum_{\vec{\gamma}/|\vec{\gamma}|=i} n_{\vec{\gamma}}$ (*e.g.* $n_4 = n_{(1,1,1,1,0)} + n_{(1,1,1,0,1)} + n_{(1,1,0,1,1)} + n_{(1,0,1,1,1)} + n_{(0,1,1,1,1)}$). Estudiando las expresiones del canal directo podemos encontrar el espectro de cuerda abierta [65]. El grupo de calibre es de la forma $\prod_{i=0}^{5} \mathrm{SO}(n_i)$ con estados de materia transformando en las representaciones simétrica, antisimétrica y bifundamental. Por ejemplo, con $n_0 = n_{(0,0,0,0,0)}; n_1 = n_{(1,0,0,0,0)}; n_2 = n_{(1,1,0,0,0)}$ (y todas las demás entradas cero) el espectro no masivo está dado en el cuadro siguiente

Espaciotiempo	Interno	mult.	irrep.
v	$(0,0)^5$	1	$\mathrm{SO}(n_0) \otimes \mathrm{SO}(n_1) \otimes \mathrm{SO}(n_2)$
s	$(2,2)\underline{(3,3)(0,0)^3}$	4	$(1,\Box\Box,1) + (1,1,\Box\Box) + (n_0,n_1,1)$
s	$(3,3)(2,2)(0,0)^3$	1	$(1,1,\Box\Box) + (1,n_1,n_2)$
s	$(0,0)(2,2)\underline{(0,0)^2(3,3)}$	3	$(1,1,\Box\Box) + (1,n_1,n_2)$
s	$(1,1)^2\underline{(0,0)^2(3,3)}$	3	$\big(1,1,\begin{smallmatrix}\Box\\ \Box\end{smallmatrix}\big) + (n_0,1,n_2) + (1,n_1,n_2)$

Espectro no masivo para $3^5_A/\mathbb{Z}_5$.

con

$$n_0 = 12 - n\,; \qquad n_1 = 20 - n\,; \qquad n_2 = n \tag{3.33}$$

v, s indican que los estados son supercampos vectoriales o escalares quirales, respectivamente.

Las simetrías de fase del 3^5 permiten 124 moddings independientes. Por otro lado, se puede realizar más de un modding al mismo tiempo. Se pueden obtener modelos quirales de D–branas encastrando estos moddings con los retorcimientos. Para ilustrar el procedimiento consideremos la situación sencilla donde $n = 0$. Así, nuestro punto de partida es un

$$\begin{aligned} &\mathrm{SO}(12) \otimes \mathrm{SO}(20) \\ &4[(1,\Box\Box) + (12,20)] \quad , \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde, como se ve del cuadro, la multiplicidad viene de las posibles permutaciones en

$$(2,2)(3,3)(0,0)^3+(2,2)(0,0)(3,3)(0,0)^2+(2,2)(0,0)^2(3,3)(0,0)+(2,2)(0,0)^3(3,3) \quad .$$

Elegimos hacer el cociente por $\Gamma = (0,2,-1,-1,0)$ y encajarlo en el retorcimiento genérico de los Chan–Paton

$$V = \frac{1}{5}(0^{l_0}, 1^{l_1}, 2^{l_2}; 0^{m_0}, 1^{m_1}, 2^{m_2}) \tag{3.35}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n_0 &= l_0 + l_1 + l_2 = 6 \\ \frac{1}{2}n_1 &= m_0 + m_1 + m_2 = 10 \quad . \end{aligned} \tag{3.36}$$

El espectro se obtiene proyectando los estados anteriores de acuerdo a (3.5). Aquí $\delta = \frac{\Gamma . q}{5} = 0, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, 0$ para los bosones de calibre y para los cuatro estados de materia no masiva respectivamente, mientras que, por ejemplo

$$\rho_{(Adj,1)} = (\underline{\pm 1, \pm 1, 0, \cdots, 0}; 0 \cdots, 0) \tag{3.37}$$

$$\rho_{(1,\square\square)} = (0, \cdots, 0; (\underline{\pm 1, \pm 1, 0, \cdots, 0})) + (0, \cdots, 0; \underline{\pm 2, \cdots, 0}) \tag{3.38}$$

$$\rho_{(12,20)} = (\underline{\pm 1, 0, \cdots, 0}; \underline{\pm 1, 0, \cdots, 0}) \quad , \tag{3.39}$$

donde las primeras (segundas) 6 (10) entradas corresponden a los vectores de pesos de SO(12) (SO(20)). Así vemos que, por ejemplo, el grupo de calibre original se rompe en $\mathrm{SO}(2l_0) \times \mathrm{U}(l_1) \times \mathrm{U}(l_2) \times \mathrm{SO}(2m_0) \times \mathrm{U}(m_1) \times \mathrm{U}(m_2)$. Los estados de materia pueden calcularse fácilmente. El espectro es genéricamente quiral pero anómalo para valores arbitrarios de los l y m. De hecho, las condiciones de cancelación de tadpoles imponen fuertes restricciones.

Como se vio anteriormente, las ecuaciones de cancelación de tadpoles para la teoría proyectada pueden obtenerse fácilmente de la teoría sin proyectar (ver (3.22)). Basta reemplazar $l_a \rightarrow$ tr $\gamma_{a,x}$ en las expresiones del canal transverso para los correspondientes caracteres retorcidos x veces. A saber,

$$\begin{aligned} n_0 &\rightarrow \quad \mathrm{tr}\ \gamma_{0,x} = 2l_0 + 2l_1 \cos\frac{2}{5}\pi x + 2l_2 \cos\frac{4}{5}\pi x \\ n_1 &\rightarrow \quad \mathrm{tr}\ \gamma_{1,x} = 2m_0 + 2m_1 \cos\frac{2}{5}\pi x + 2m_2 \cos\frac{4}{5}\pi x \quad . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Las condiciones de cancelación de tadpoles son entonces

$$(D_a^\alpha\ \mathrm{tr}\ \gamma_{a,x} + O^\alpha)^2 \chi_{\alpha+2\Gamma x}(il) = 0 \qquad (l \rightarrow \infty) \tag{3.41}$$

para todos los estados x–retorcidos tales que $\vec{\alpha} + 2\Gamma x$ contenga un estado no masivo RR, para este ejemplo estos estados están dados en el cuadro siguiente

$\vec{\alpha}$					x	$\vec{\alpha} + 2\Gamma x$ (no masivo)				
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(2,0)	(2,0)	(2,0)	(2,0)	(2,0)	0	(1,−1)	(1,−1)	(1,−1)	(1,−1)	(1,−1)
(0,0)	(2,0)	(2,0)	(2,0)	(0,0)	1	(0,0)	(1,−1)	(2,−2)	(2,−2)	(0,0)
(2,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(2,0)	2	(1,−1)	(3,−3)	(0,0)	(0,0)	(1,−1)
(0,0)	(0,0)	(2,0)	(2,0)	(0,0)	3	(0,0)	(3,−3)	(1,−1)	(1,−1)	(0,0)
(2,0)	(2,0)	(0,0)	(0,0)	(2,0)	4	(2,−2)	(1,−1)	(0,0)	(0,0)	(2,−2)

Estados no masivos retorcidos $\vec{\alpha} + 2\Gamma x$.

y dan lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
44 + 20\sqrt{5} &= \pm(2 \text{ tr } \gamma_{0,0} + \text{ tr } \gamma_{1,0} + \sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{1,0}) \\
8 &= \pm(11 \text{ tr } \gamma_{0,0} + 5\sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{0,0} - 7 \text{ tr } \gamma_{1,0} - 3\sqrt{5} n_1) \\
12 + 4\sqrt{5} &= \pm(4 \text{ tr } \gamma_{0,2} + 2\sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{0,2} + 7 \text{ tr } \gamma_{1,2} + 3\sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{1,2}) \\
12 + 4\sqrt{5} &= \pm(4 \text{ tr } \gamma_{0,2} + 2\sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{0,2} - 3 \text{ tr } \gamma_{1,2} - \sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{1,2}) \\
16 + 8\sqrt{5} &= \pm(3 \text{ tr } \gamma_{0,4} + \sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{0,4} + 4 \text{ tr } \gamma_{1,4} + 2\sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{1,4}) \\
16 + 8\sqrt{5} &= \pm(3 \text{ tr } \gamma_{0,4} + \sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{0,4} - \text{ tr } \gamma_{1,4} - \sqrt{5} \text{ tr } \gamma_{1,4}) \quad .
\end{aligned}$$

La libertad en el signo se debe a que ambos signos dan lugar a una completación de cuadrado. Las primeras dos ecuaciones son las originales, sin retorcer (3.40), que fijan los rangos de los grupos. Puede verificarse fácilmente que las ecuaciones extra, *x–retorcidas*, son las condiciones para que la teoría sea *libre de anomalías*. La solución de estas ecuaciones de tadpoles es única en este caso (corresponde a la elección de signo $\{+, +, -, +, -, -\}$), a saber

$$\begin{aligned}
l_0 &= 2 \qquad & l_1 &= 4 \qquad & l_2 &= 0 \\
m_0 &= 2 \qquad & m_1 &= 4 \qquad & m_2 &= 4
\end{aligned} \tag{3.42}$$

dando lugar a un grupo de calibre SO(4) × U(4) × SO(4) × U(4) × U(4) con contenido de materia quiral

$$\begin{aligned}
&(1{,}1; 4{,}4{,}1) + (1{,}1; 1{,}\bar{4}{,}4) + (1{,}1; 1{,}1{,}\overline{10}) + (1{,}\bar{4}; 1{,}1{,}4) + (1{,}4; 1{,}\bar{4}{,}1) + (4{,}1; 1{,}4{,}1) + \\
&+ 2[(1{,}1; 1{,}10{,}1) + (1{,}1; 1{,}\bar{4}{,}\bar{4}) + (1{,}1; 4{,}1{,}4) + (1{,}\bar{4}; 1{,}\bar{4}{,}1) + (4{,}1; 1{,}1{,}4) + (1{,}4; 4{,}1{,}1)]
\end{aligned}$$

Así se ve que es fácil obtener grupos unitarios con materia quiral.

Para buscar, por ejemplo, modelos cercanos al Modelo Estándar, se debería hacer una búsqueda adecuadamente dirigida con moddings simultáneos. No intentaremos esto aquí.

Sin embargo, hemos revisado el espectro para los 124 moddings independientes. Para el caso $\mathrm{SO}(n_0) \times \mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{SO}(n_2)$ de (3.33), encontramos que 16 de ellos dan modelos inconsistentes donde los tadpoles no pueden cancelarse. Para algunos de los moddings permitidos, existe más de una solución de las condiciones de cancelación de tadpoles.

Los siguientes 36 moddings dan lugar sólo a modelos no quirales:

$$\Gamma = (0,0,\underline{0,1,-1}),(0,0,\underline{0,2,-2}),\pm(0,1,\underline{-1,2,-2}),\pm(0,2,\underline{1,-1,-2}) \quad .$$

Los otros 72 todos tienen al menos una solución con espectro quiral. Aparecen grupos unitarios de rango grande, hasta U(10). Sin embargo, sólo grupos de rango hasta 4 tienen espectro quiral (ver también [67]). Claramente más proyecciones que den lugar a más rompimientos darán lugar a otras posibilidades.

Hemos verificado, en algunos ejemplos, que las condiciones de cancelación de tadpoles coinciden con las condiciones de cancelación de anomalías.

3.4.2. $(\mathbf{1^3} \times \mathbf{T^4})/\mathbb{Z}_3$

Una teoría de cuerda abierta con sector interno dado por un modelo de Gepner 1^3, con invariante diagonal, fue construida en 2.5.1 (pág. 27). En este caso las funciones de partición del cilindro, la cinta de Möbius y la botella de Klein pueden escribirse en el canal transverso como

$$\tilde{Z}_K + \tilde{Z}_M + \tilde{Z}_C = 2^8 \tilde{\chi}^{\mathrm{susy}}_{(0,0)^3}(il) - 2 \times 2^4 \hat{\tilde{\chi}}^{\mathrm{susy}}_{(0,0)^3}\left(il + \tfrac{1}{2}\right) + n^2 \tilde{\chi}^{\mathrm{susy}}_{(0,0)^3}(il) \quad . \tag{3.43}$$

Dado que $\chi^{susy}_{(0,0)^3}$ contiene estados de RR no masivos, la ecuación de cancelación de tadpoles es entonces $n - 16 = 0$. El espectro de cuerda abierta puede hallarse estudiando las expresiones del canal directo. El grupo de calibre es $\mathrm{Sp}(n)$ con estados de materia masiva transformando en las representación simétrica o antisimétrica. Compactificando de nuevo en un toro T^4, obtenemos una teoría de cuerdas en cuatro dimensiones, con el espectro abierto no masivo dado por el cuadro siguiente

Espaciotiempo	Interno	Irrep.
v	$(0,0)(0,0,0)^3$	Sp(16)
s	$(1,0)\ (0,0,0)^3$	$\square\square$
s	$(0,1)\ (0,0,0)^3$	$\square\square$
s	$(0,0)(1,-1,0)^3$	$\square\square$

Espectro no masivo del sector abierto.

Estos estados forman un multiplete vectorial de Sp(16) y supercampos quirales que transforman en la ($\square\square$). Las simetrías de fase de $1^3 \times T^4$ permiten dos moddings diferentes

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1,-1,0) \qquad & v &= \left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \\ \Gamma &= (1,1,0) \qquad & v &= \left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

aunque el primero da lugar a $N=2$ supersimetrías en el espaciotiempo y por lo tanto a modelos no quirales. Se pueden obtener modelos quirales de D–branas encastrando el segundo modding con un retorcimiento. Por lo que decidimos realizar el modding (3.44) y encajarlo con un retorcimiento genérico de los Chan–Paton.

$$V = \frac{1}{3}(0^{l_0}, 1^{l_1}) \tag{3.45}$$

con $l_0 + l_1 = 8$. El espectro se obtiene proyectando los estados anteriores de acuerdo a la ecuación (3.8). Aquí $\delta = \frac{\Gamma q}{m} = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ para los bosones de calibre y los tres estados no masivos, respectivamente. Así, a partir de (3.45) y (3.8) hemos roto los grupos originales en $\mathrm{Sp}(2l_0) \times \mathrm{U}(l_1)$. Los estados de materia se pueden calcular fácilmente y dan lugar a una representación quiral $3[(2l_0, l_1) + (1, \square\square)]$. El espectro es quiral pero anómalo para valores arbitrarios de l_0, l_1. Sin embargo, las fuertes restricciones impuestas por las condiciones de cancelación de tadpoles aseguran un espectro libre de anomalías.

Como hemos mostrado, las ecuaciones de cancelación de tadpoles anteriores para la teoría proyectada pueden obtenerse fácilmente a partir de las expresiones del canal transverso. Las ecuaciones de cancelación de tadpoles dadas en (3.23) son entonces

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_x - 2\left(2\cos\frac{\pi x}{3}\right)^2 = 0 \tag{3.46}$$

para todos los x tales que$\chi_{\alpha+2\Gamma x}$ contiene algún estado de RR no masivo. Estos estados están dados en el cuadro siguiente

x	$\alpha + 2\Gamma x$ = Et $\times$ Gepner
0	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$;$(0,1,1)(0,1,1)(0,1,1)$ + otros
1	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$;$\underline{(0,-1,-1)(0,-1,-1)(0,1,1)}$
2	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$;$\underline{(0,1,1)(0,1,1)(0,-1,-1)}$

Estados no masivos de RR en el canal transverso.

Estos dan lugar a las ecuaciones

$$l_0 + l_1 = 8 \tag{3.47}$$

$$2l_0 - l_1 = 4 \quad . \tag{3.48}$$

La primer ecuación es la original, sin retorcer. La ecuación extra, retorcida, es tan sólo la condición para que la teoría sea libre de anomalías.

La solución a estas ecuaciones de tadpoles es única, a saber $l_0 = l_1 = 4$, dando lugar a un grupo de calibre $\mathrm{Sp}(8) \times \mathrm{U}(4)$ con contenido de materia quiral $3[(8,4) + (1, \overline{\Box\!\Box})]$.

De forma similar al modelo de Gepner 3^5 vemos que grupos unitarios con materia quiral pueden obtenerse fácilmente en los modelos híbridos. Por otra parte, este ejemplo da lugar a tres generaciones de materia. Es interesante comparar este cálculo con el de tipo orbifold. Por ejemplo, en el orientifolio tipo IIB sobre $T^6/\mathbb{Z}_3$ el espectro no masivo es

$$\begin{array}{ll} \text{Vector} & \mathrm{SO}(2l_0) \times \mathrm{U}(l_1) \\ \text{Quiral} & 3\left[(2l_0, l_1) + \left(1, \overline{\begin{smallmatrix}\Box\\\Box\end{smallmatrix}}\right)\right] \end{array} \quad \begin{array}{r} (3.49) \\ (3.50) \end{array}$$

y las condiciones de cancelación de tadpoles son

$$l_0 + l_1 = 16 \quad (3.51)$$

$$2l_0 - l_1 = -4 \quad . \quad (3.52)$$

Así, comparado con este caso, vemos que son similares si hacemos el siguiente reemplazo: $\mathrm{SO}(l) \to \mathrm{Sp}(l)$ y $\begin{smallmatrix}\Box\\\Box\end{smallmatrix} \to \Box\!\Box$. Además, notar que el modelo de Gepner da lugar una reducción del rango, el que puede explicarse a partir de la presencia de un campo antisimétrico NSNS.

3.4.3. $(\textbf{Modelo de Gepner})^{\mathbf{c=6}} \times \mathbb{T}^{\mathbf{2}}$

También podemos considerar los casos en que el sector interno es un orbifold de modelos de Gepner $c = 6$ por un dos–toro. Un ejemplo muy sencillo, de juguete, es el de empezar con un modelo 1_A^6 ya visto, y cocientar por las simetrías de fase codificadas en $v = (0, \frac{2}{3})$ y en $\Gamma = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0)$. Se obtiene el grupo de calibre $\mathrm{U}(4)$ con materia en la $\mathbf{6}$ ó $\bar{\mathbf{6}}$.

Capítulo 4

Modelos $\mathbb{CP}_m$ no diagonales y sus Polinomios de Poincaré

4.1. Introducción

En una generalización del esquema presentado en los capítulos anteriores, Kazama y Suzuki ([54]) construyen el sector interno a partir del producto tensorial de modelos de clases laterales.

La información de esta estructura algebraica puede ser codificada en un polinomio de Poincaré, el que cuenta el número de estados primarios junto con su carga $U(1)$. La construcción de estos polinomios de Poincaré es relevante para hallar la relación entre este método algebraico y las compactificaciones de Calabi–Yau. Esta relación ha sido establecida en algunos casos en las refs. [72, 73, 74, 75, 90, 91]. En las próximas secciones calculamos los polinomios de Poincaré para modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$, *i.e.* modelos $SU(m+1)/SU(m)\times U(1)$, acoplando los sectores derecho e izquierdo con invariantes modulares no diagonales para $SU(m+1)$ y $SU(m)$.

Debido a la enorme degeneración de los vacíos de cuerdas cuadri–dimensionales, y la falta de un argumento teórico para seleccionar el correcto, se ha invertido un gran esfuerzo [76, 50, 94, 77, 78, 79, 89] en estudiar sistemáticamente todos los posibles modelos de cuerdas $N=2$. En la ref. [79] fue calculado, por construcción directa del espectro de masa cero, el número de generaciones de E_6 para los modelos $\mathbb{CP}_m$ con un gran conjunto de acoplamientos no diagonales para los sectores izquierdo y derecho de $SU(m+1)$.

El conocimiento de los polinomios de Poincaré es particularmente útil para realizar este tipo de cálculos, como fue demostrado por Vafa en ref. [80], y aplicado en este contexto por Buturovic [77]. Siguiendo a estos autores generalizamos los resultados de la ref. [79] calculando el número de generaciones quirales de compactificaciones de cuerdas $(2,2)$ con modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$ que tengan al menos un invariante no diagonal para $SU(m)$. El número de generaciones de E_6 que se obtiene de esta manera es demasiado grande para hacer estos modelos fenomenológicamente tratables. Cuando se tienen en cuenta cocientes (*moddings*) por simetrías discretas, este número se reduce considerablemente. Por esto discutimos estos cocientes y los describimos en términos de los polinomios de Poincaré para los sectores retorcidos.

4.2. Modelos de Clases Laterales $\mathbb{CP}_m$ con $N = 2$

Consideremos la teoría cociente $SU(m+1)_k \times SO(2m)_1/SU(m)_{k+1} \times U(1)$, a la que nos referiremos como (m,k). Denotamos los pesos fundamentales de $SU(m+1)$ y $SU(m)$ por ω_i con i yendo de 0 a m y $m-1$ respectivamente. Los estados del álgebra superconforme (SCA) $N = 2$ izquierda están etiquetados con $|\Lambda, \lambda, \tilde{\Lambda}\rangle$, donde Λ es un peso de $SU(m+1)$ a nivel k ($\Lambda = \sum_{i=1}^{m} m_i\omega_i$; $0 \leq \sum_{i=1}^{m} m_i \leq k$); $\tilde{\Lambda}$ es un peso de $SO(2m)$ a nivel 1 (por lo que sólo puede tomar los valores 0, v, s, $\overline{s}$) y λ es un peso de $SU(m)\times U(1)$ a nivel $k+1$ obtenido descomponiendo $|\Lambda\rangle \otimes |\tilde{\Lambda}\rangle$ en las representaciones irreducibles de $SU(m) \times U(1)$. Además, λ se descompone en un peso $\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{m-1} n_i\omega_i$ de $SU(m)$ y una carga q de $U(1)$ (correspondiente al $U(1)$ de $SU(m) \times U(1)$) así

$$\lambda = \hat{\lambda} + \frac{\omega_m}{m} q \quad . \tag{4.1}$$

La dimensión conforme Δ y la carga de supersimetría Q de $U(1)$ están dados por

$$\Delta = \frac{\Lambda(\Lambda + 2\rho_{m+1}) - \lambda(\lambda + 2\rho_m)}{2(k+m+1)} + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{2} + N \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} Q &= -\sum_{l=1}^{2m} \tilde{\Lambda}^l + \frac{2}{k+m+1}(\rho_{m+1} - \rho_m).\lambda + 2M = \\ &= -\sum_{l=1}^{2m} \tilde{\Lambda}^l + \frac{q}{k+m+1} + 2M \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde ρ_{m+1} y ρ_m denotan la semisuma de las raíces positivas de $SU(m+1)$ y $SU(m)$ respectivamente, y N, M son enteros.

Sin embargo, no todos los estados construidos de esta manera son independientes. Esto se debe a la identificación de campos implicada por la existencia de automorfismos externos propios σ del diagrama de Dynkin extendido del álgebra afín de Lie de $SU(m+1)$. Bajo estos automorfismos un estado$|\Lambda,\hat{\lambda},q,\tilde{\Lambda}\rangle$ cambia a [81, 82, 83] $|\sigma(\Lambda),\sigma(\hat{\lambda}),\sigma(q),\sigma(\tilde{\Lambda})\rangle$, donde

$$\begin{aligned}
\sigma(\Lambda) &= (k-\sum_{i=1}^{m} n_i)\omega_1 + \sum_{i=2}^{m} n_{i-1}\omega_i \\
\sigma(\hat{\lambda}) &= (k-\sum_{i=1}^{m-1} n_i)\omega_1 + \sum_{i=2}^{m-1} n_{i-1}\omega_i \\
\sigma(q) &= q+k+m+1 \\
\sigma(\tilde{\Lambda}=(0),(v),(s),(\bar{s})) &= ((v),(0),(\bar{s}),(s)) \quad .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Estos estados deben identificarse para que los campos formen una representación unitaria del grupo modular. Como los modelos $\mathbb{CP}_m$ no poseen puntos fijos frente a estos automorfismos, la identificación de campos no presenta más problemas (para una discusión de puntos fijos en modelos de clases laterales ver refs. [78, 84]).

Los caracteres del SCA $N=2$ están definidos por

$$\chi^G_\Lambda\,\chi^{SO(d)}_{\tilde{\Lambda}} = \sum_\lambda \chi^{N=2}_{\Lambda,\lambda,\tilde{\Lambda}}\,\chi^H_\lambda \quad . \tag{4.5}$$

Bajo transformaciones modulares

$$\begin{aligned}
\chi^{N=2}_{\Lambda,\lambda,\tilde{\Lambda}}(-1/\tau) &= S_{\Lambda,\Lambda'}\,S_{\tilde{\Lambda},\tilde{\Lambda}'}\,S^*_{\lambda,\lambda'}\,\chi^{N=2}_{\Lambda,\lambda,\tilde{\Lambda}}(\tau) \\
\chi^{N=2}_{\Lambda,\lambda,\tilde{\Lambda}}(\tau+1) &= T_{\Lambda,\Lambda'}\,T_{\tilde{\Lambda},\tilde{\Lambda}'}\,T^*_{\lambda,\lambda'}\,\chi^{N=2}_{\Lambda,\lambda,\tilde{\Lambda}}(\tau) \quad .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Así, una función de partición invariante modular general para un modelo de clases laterales dado tiene la forma

$$Z = \sum_{\Lambda,\lambda,\bar{\Lambda},\bar{\lambda},\tilde{\Lambda}} \chi^{N=2}_{\Lambda,\lambda,\tilde{\Lambda}}\;\mathcal{N}_{\Lambda,\bar{\Lambda}}\;\mathcal{M}_{\lambda,\bar{\lambda}}\;\chi^{N=2\,*}_{\bar{\Lambda},\bar{\lambda},\tilde{\Lambda}} \quad . \tag{4.7}$$

En la ecuación anterior la suma se extiende sobre los estados (Λ,λ) y $(\bar{\Lambda},\bar{\lambda})$ que satisfacen la condición $C(\Lambda-\lambda)$ de [81], la que para el sector NS corresponde a $\Lambda-\lambda\in M$, la red de raíces de $SU(m+1)$. $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ denotan respectivamente a los invariantes modulares para $SU(m+1)$ y $SU(m)\times U(1)$. Por ahora no existe una clasificación completa de los invariantes modulares para $SU(N)$, $N>3$ [99]. Sin embargo, en [79], se empleó una gran variedad de ellos para construir modelos. Sólo un invariante, dentro de los que son relevantes para las compactificaciones de cuerdas con invariantes no diagonales para $SU(m)$, no había sido calculado explícitamente antes de este trabajo, a saber, el invariante $C(5,8)$ derivado de encajar $SU(6)_8$ en $SO(21)_1$ [85], y al que listamos en 7.3. Para los demás invariantes referimos al lector a [79]. Para todos los invariantes aquí considerados se verifica la condición $\mathcal{N}_{\Lambda,\Lambda'} = \mathcal{N}_{\sigma(\Lambda),\sigma(\Lambda')}$. En la referencia anterior, el invariante $SU(4)_{k\text{impar}}$ de G no satisface esta relación. Sin embargo, en este caso, los resultados son idénticos a los que se obtienen con el invariante diagonal.

4.3. Polinomios de Poincaré

Los estados primarios quiral–quiral (quiral–antiquiral) del SCA $N = 2$ son estados en el sector de Neveu–Schwarz (NS) definidos por la condición $\Delta = \frac{Q}{2}$, $\bar{\Delta} = \frac{\bar{Q}}{2}$ ($\Delta = \frac{Q}{2}$, $\bar{\Delta} = -\frac{\bar{Q}}{2}$). Con nuestra convención, las cantidades barradas se refieren al álgebra $N = 2$ derecha. Para los modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$, los estados que satisfacen $\Delta = Q/2$ son aquellos de la forma [86]

$$|\Lambda, \Lambda, (0)\rangle = |\sum_{i=1}^{m} n_i\omega_i, \sum_{i=1}^{m} n_i\omega_i, (0)\rangle \tag{4.8}$$

y sus transformados por σ. Para los estados que son como en (4.8), los enteros N, M en las ecuaciones (4.2), (4.3) son cero [86], mientras que para sus transformados por σ, N, M se ajustan para dar los mismos valores de Δ y Q.

Se sabe que el conjunto de campos primarios de una SCA $N = 2$ posee una estructura de álgebra bigraduada conmutativa [86, 87], con la bigraduación dada por las cargas de supersimetría $U(1)$ izquierda y derecha Q y $\bar{Q}$. El polinomio de Poincaré asociado a este álgebra quiral (de dimensión finita) puede definirse como

$$\mathcal{P}(t, \bar{t}) = \sum_{estados\ quirales} t^{DQ}\, \bar{t}^{D\bar{Q}} \quad . \tag{4.9}$$

Aquí D es el menor entero positivo tal que DQ es entero para todos los estados.

En estas secciones calcularemos los polinomios de Poincaré para aquellos modelos $\mathbb{CP}_m$ con invariantes modulares no diagonales que son relevantes para las compactificaciones de cuerdas. Se construyeron todos los estados primarios con un programa de computadora, y se calculó su carga $U(1)$. Las identificaciones de campos (4.4) fueron tenidas en cuenta apropiadamente.

Si alguno de $\mathcal{N}$ o $\mathcal{M}$ son diagonales, entonces $Q = \bar{Q}$ y los polinomios toman la forma sencilla

$$\mathcal{P}(t\bar{t}) = \sum_{|\Lambda,\Lambda,(0)\rangle} \mathcal{N}_{\Lambda,\Lambda}\mathcal{M}_{\Lambda,\Lambda}\, (t\bar{t})^{\frac{Dq(|\Lambda,\Lambda,(0)\rangle)}{k+m+1}} \quad . \tag{4.10}$$

Por ejemplo, para los modelos de clases laterales $SU(3)_9/SU(2)_{10} \times U(1) \equiv (2, 9)CA$ [1]

con invariantes $\mathcal{N}_{\Lambda,\bar{\Lambda}}$= C(2,9) y $\mathcal{M}_{\lambda,\bar{\lambda}} = \delta_{\lambda,\bar{\lambda}}$=A(1,10) obtenemos el polinomio

$$\mathcal{P}(t\bar{t}) = 1 + 3(t\bar{t})^2 + 4(t\bar{t})^3 + 3(t\bar{t})^4 + (t\bar{t})^6 \qquad D = 4 \quad . \tag{4.11}$$

Además, si ambos $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ son diagonales, recuperamos los resultados de [77]. Para los invariantes serie, los polinomios pueden escribirse en forma compacta para valores arbitrarios de k. En el cuadro 7.2 se dan ejemplos para $\mathbb{CP}_1$ y $\mathbb{CP}_2$. Los estados con $Q \neq \bar{Q}$ sólo aparecen cuando $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ son ambos no diagonales. Estos modelos no admiten una descripción de Landau–Ginzburg. En el cuadro 7.3 [88] listamos los polinomios de Poincaré para algunos de estos casos.

Se puede ver que, aunque estamos considerando invariantes no diagonales para $SU(m)$, el campo C_{max} con carga $Q_{max} = \bar{Q}_{max} = c/3$ siempre está en la teoría, y por lo tanto el polinomio de Poincaré posee la propiedad de dualidad [91, 86]

$$P(\frac{1}{t}, \frac{1}{\bar{t}}) = (t\bar{t})^{-cD/3}\, P(t, \bar{t}) \quad . \tag{4.12}$$

Algunas equivalencias entre modelos con $\mathcal{M}$ diagonal ya han sido listadas en la literatura [76, 50, 94, 79]. Las hemos reconfirmado y agregamos las siguientes identidades (denotadas por $\equiv$) entre los polinomios de Poincaré correspondientes a los modelos

$$\begin{aligned}&(3,8)DD \equiv (3,8)DC \equiv (3,8)DE \equiv (3,8)CD \equiv (3,8)CE \equiv (3,8)ED \equiv\\ &(3,8)EC \equiv (3,8)EE \equiv (4,5)DD_2 \equiv (4,5)DC \equiv (4,5)CD_2 \equiv (4,5)EC\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
(2,5)CF \equiv (2,5)CA & (2,9)DE \equiv (2,9)EE \\
(2,9)CA \equiv (2,9)CF \equiv (3,4)CA & (2,9)CE \equiv (3,4)CC \\
(2,15)AE \equiv (3,5)AA & (2,15)DE \equiv (3,5)AD \\
(2,21)CA \equiv (2,21)CF & (2,27)DE \equiv (3,6)D_2A \\
(3,8)D_2E \equiv (4,5)DA & (3,8)CC \equiv (4,5)CC \\
(m,k)AX \equiv (m-1,k+1)XA\ (1,\frac{k-m+1}{m})A &
\end{array}$$

donde X denota un invariante arbitrario.

4.4. Construcción de cuerdas D = 4

Para obtener una teoría de cuerdas a partir de estos modelos seguimos la generalización de Kazama y Suzuki a la construcción de Gepner: cada sector (izquierdo y derecho) va a ser un producto de bosones y fermiones en el espaciotiempo por el

[1] Llamamos $(m,k)\mathcal{N}\mathcal{M}$ al modelo de clases laterales $SU(m+1)_k/SU(m)_{k+1} \times U(1)$ con invariantes $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$

producto de r campos internos (de clase lateral) $N=2$, tal que $c_{int}=9$. Para obtener supersimetría $N=1$ en el espaciotiempo se realiza una proyección sobre estados con carga Q (de $U(1)$) entera impar.

Como ahora la notación debe tener en cuenta un número mayor de parámetros que en el caso de los modelos de Gepner, es conveniente modificar un poco la notación.

Como el sector interno se construye como el producto tensorial de r modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$ [54], los estados de la teoría interna completa están dados por

$$\otimes_{i=1}^{r}|\Lambda_i,\hat{\lambda}_i,q_i,\tilde{\Lambda}_i\rangle \quad . \tag{4.13}$$

Es útil denotar a cada estado en la teoría completa por un vector

$$V=(\tilde{\Lambda}_0;q_1,\cdots,q_r;\tilde{\Lambda}_1,\cdots,\tilde{\Lambda}_r) \tag{4.14}$$

donde $\tilde{\Lambda}_0$ es un peso de $SO(2)$. También introducimos el producto escalar

$$V\cdot V'=\sum_{i=0}^{r}\tilde{\Lambda}_i\tilde{\Lambda}_i'-\sum_{i=1}^{r}\frac{q_iq_i'}{2\eta_i(k_i+m_i+1)} \tag{4.15}$$

y los vectores

$$\begin{aligned}\beta_0 &= (\bar{s};\eta_1,\cdots,\eta_r;s_1,\cdots,s_r)\\ \beta_i &= (v;0,\cdots,0;0,\cdots,v,\cdots,0) \qquad (v \text{ en la posición } i\text{-ésima})\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde $\eta_i=\frac{1}{2}m_i(m_i+1)$.

La proyección de supersimetría y las condiciones de contorno alineadas (RR y NSNS) se obtienen mediante

$$Q(\bar{V})=2\beta_0\cdot\bar{V}\in 2\,\mathbb{Z}+1 \tag{4.17}$$

$$2\beta_i\cdot\bar{V}\in 2\,\mathbb{Z} \quad . \tag{4.18}$$

Para estados de NS, la condición (4.17) es lo mismo que tener carga interna Q_{int} par. Para mantener la invariancia modular hay que incluir los sectores retorcidos. Esto se consigue con la condición

$$V=\bar{V}+s\beta_0+\sum_{i=1}^{r}n_i\beta_i \tag{4.19}$$

con $s,n_i\in\mathbb{Z}$. Un estado dado es permitido cuando ambos invariantes $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ son distintos de cero, y su multiplicidad está dada por el producto de los coeficientes modulares. La ecuación (4.19) implica que, para los estados NSNS en el s-ésimo sector retorcido, la condición $q_i=\bar{q}_i$ debe reemplazarse por

$$q_i-\bar{q}_i=2s\eta_i \quad . \tag{4.20}$$

Sin embargo, dado que el vector de desplazamiento β_0 tiene carga entera par ($Q(\beta_0) = 2$), la relación $Q_{int} - \bar{Q}_{int} \in \mathbb{Z}$ sigue valiendo para $c_{int} \in 3\mathbb{Z}$.

La construcción heterótica se implementa reemplazando los fermiones espaciotemporales izquierdos por bosones libres internos con carga central $c = 24$ para cancelar la anomalía bosónica. La invariancia modular de la teoría se debe al isomorfismo entre las representaciones de $SO(2)$ y el nuevo grupo de calibre $E_8 \times SO(10)$ ante el grupo modular. Con la proyección de supersimetría el grupo de calibre aumenta de $E_8 \times SO(10)$ a $E_8 \times E_6$.

Los campos de materia (antimateria) no masiva pertenecen a las representaciones $\mathbf{27}$ ($\overline{\mathbf{27}}$) de E_6, que se descomponen en las de $SO(10) \times U(1)$ de la siguiente manera $\mathbf{27} = \mathbf{10_1} + \mathbf{16_{-1/2}} + \mathbf{1_{-2}}$ ($\overline{\mathbf{27}} = \mathbf{10_{-1}} + \overline{\mathbf{16}}_{\mathbf{1/2}} + \mathbf{1_2}$). El número de generaciones quirales N_{27} ($N_{\overline{27}}$) puede obtenerse mirando el acoplamiento de un escalar de $SO(2)$ en el sector izquierdo con un vector de $SO(10)$ en el sector derecho. La condición de masa cero implica que los $\mathbf{27}$ corresponden a estados quirales con $\Delta_{int} = Q_{int}/2 = 1/2$, $\overline{\Delta}_{int} = \overline{Q}_{int}/2 = 1/2$ y los $\overline{\mathbf{27}}$ corresponden a estados antiquirales con $\Delta_{int} = Q_{int}/2 = 1/2$, $\overline{\Delta}_{int} = -\overline{Q}_{int}/2 = 1/2$. Alternativamente, un contaje equivalente de los $\overline{\mathbf{27}}$ puede obtenerse considerando el escalar del $SO(10)$ derecho, *i.e.* estados con $\overline{\Delta}_{int} = \overline{Q}_{int}/2 = 1$. El número neto de generaciones está dado entonces por $N_{gen} = |N_{\mathbf{27}} - N_{\overline{\mathbf{27}}}|$.

Si la teoría interna corresponde a una compactificación en una variedad de Calabi–Yau, el número de $\overline{\mathbf{27}}$ y $\mathbf{27}$ son los $b_{1,1}$ y $b_{1,2}$ respectivamente, donde $b_{p,q}$ es el número de (p,q) formas armónicas en la variedad. La característica de Euler es, para $c_{int} = 9$,

$$\chi = \sum_{p,q=0}^{3} (-1)^{p+q} b_{p,q} = 2(b_{1,1} - b_{1,2}) \quad . \tag{4.21}$$

Una forma de calcular χ se basa en el conocimiento de los polinomios de Poincaré construidos más arriba. Cada modelo de supercuerdas, con su sector interno compuesto por el producto tensorial de modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$, estará caracterizado por su polinomio de Poincaré

$$\mathcal{P}(t, \bar{t}) = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i(t^{D/D_i}, \bar{t}^{\ D/D_i}) \quad , \tag{4.22}$$

donde $\mathcal{P}_i$ son los polinomios de Poincaré para cada modelo de clases laterales, D_i es el menor entero positivo (en cada modelo) tal que $D_i Q_{int} \in \mathbb{Z}$ y D es el mínimo múltiplo común de todos los D_i.

Sin embargo, este polinomio sólo cuenta estados en el sector no retorcido. Para incluir los sectores retorcidos debemos definir los "polinomios retorcidos" $\mathcal{P}^{(s)}(t, \bar{t}) =$

$\prod_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i^{(s)}(t^{D/D_i}, \bar{t}^{D/D_i})$. Éstos se construyen sumando sobre los estados quirales izquierdos y derechos, acoplados de acuerdo a los invariantes modulares, y satisfaciendo la condición (4.20),

$$\mathcal{P}_i^{(s)} = \sum_{q_i - \bar{q}_i = 2s\eta_i} t^{DQ_i}\, \bar{t}^{\ D\bar{Q}_i} \quad . \tag{4.23}$$

El número de **27** y $\overline{\mathbf{27}}$ se obtiene como el coeficiente de $t^D \bar{t}^D$ y $t^D \bar{t}^{2D}$ en

$$\mathcal{P}^{sum} = \sum_{s=0}^{D-1} \mathcal{P}^{(s)} \quad . \tag{4.24}$$

Si sólo se está interesado en la característica de Euler, estas expresiones pueden calcularse empleando la fórmula derivada por Vafa [80] para los modelos de Landau–Ginzburg y extendida a teorías $N = 2$ superconformes más generales por Buturovic [77],

$$N_{gen} = \frac{1}{2D} \sum_{r,s=0}^{D-1} P_{r,s} \tag{4.25}$$

donde

$$P_{r,s} = Tr \left\{ (-1)^{rc/3} e^{2i\pi r J_0} e^{i\pi(Q-\bar{Q})} \right\} \Big|_{R_0^{(s)}} \tag{4.26}$$

y $R_0^{(s)}$ es el estado fundamental de Ramond del s-ésimo sector retorcido. La suma sobre s incluye todos los sectores retorcidos y la suma sobre r proyecta sobre Q_{int} entera. El factor $e^{i\pi(Q_{int}-\bar{Q}_{int})}$ tiene en cuenta el término $(-1)^{p+q}$ de la ecuación (4.21).

Debido a la invariancia modular, es posible escribir la contribución de los sectores retorcidos en términos del no retorcido como [80, 77] $P_{r,s} = P_{x_{r,s},0}$ con $x_{r,s}$ el máximo divisor común de r, s. El estado fundamental de Ramond R_0 puede ser relacionado, mediante el flujo espectral, con el anillo quiral $\mathcal{R}$ del sector de NS. Se sigue entonces que la traza (4.26) sobre los estados fundamentales retorcidos de Ramond es el polinomio de Poincaré de la teoría evaluado en valores particulares de los parámetros $t, \bar{t}$:

$$P_{x,0} = \mathcal{P}(t = e^{2i\pi x/D + i\pi/D}; \bar{t} = e^{-i\pi/D}) \quad . \tag{4.27}$$

Notar que, dado que estamos considerando invariantes modulares no diagonales, mantenemos el término $e^{i\pi(Q-\bar{Q})}$ en el sector no retorcido.

Cuando consideremos cocientes por simetrías discretas, necesitaremos expresiones que relacionen los distintos sectores retorcidos para cada teoría interna de clase lateral. Por esto reescribimos explícitamente la ecuación (4.25) en término de los polinomios retorcidos

$$N_{gen} = \frac{1}{2D} \sum_{r,s=0}^{D-1} \prod_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i^{(s)}(t = e^{2i\pi r/D + i\pi/D}, \bar{t} = e^{-i\pi/D}) \quad . \tag{4.28}$$

4.5. Cocientes por simetrías discretas

Como es bien sabido [8, 89, 48], los modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$ poseen una simetría $\mathbb{Z}_{k+m+1}$ que, si se divide por ella, puede reducir el número neto de generaciones de la correspondiente compactificación de cuerdas. Cocientar por $\mathbb{Z}_N$ es equivalente a introducir condiciones de contorno retorcidas, las que se pueden incluir en los correspondientes polinomios de Poincaré como discutiremos a continuación.

En 2.8.1 vimos que los moddings están caracterizados por un vector Γ. Para la generalización a los modelos de Kazama–Suzuki conviene definir un vector similar de la siguiente manera

$$\Gamma = (0; \gamma_1\eta_1, \cdots, \gamma_r\eta_r; 0, \cdots; 0) \tag{4.29}$$

donde los γ_i son enteros que satisfacen

$$2\beta_0 \cdot \Gamma = -\sum_{i=1}^{r} \frac{\gamma_i\eta_i}{k_i + m_i + 1} \in \mathbb{Z} \quad . \tag{4.30}$$

Los estados de los sectores retorcidos satisfacen

$$V = \bar{V} + s\beta_0 + \sum_{i=1}^{r} n_i\beta_i + 2x\Gamma \tag{4.31}$$

y la proyección GSO generalizada sobre estados con Q_{int} entera está dada ahora por las condiciones [89]

$$\begin{aligned} Q(\bar{V}) = 2\beta_0 \cdot \bar{V} &\in 2\mathbb{Z} + 1 && (4.32)\\ 2\beta_i \cdot \bar{V} &\in 2\mathbb{Z} && (4.33)\\ -\Gamma \cdot (2\bar{V} + 2x\Gamma) &\in \mathbb{Z} \quad . && (4.34) \end{aligned}$$

Una función de partición invariante modular se construye sumando sobre todos los sectores retorcidos e implementando la proyección anterior. Recordando que sólo se acoplan los estados permitidos por los invariantes $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ (con sus correspondientes multiplicidades), y definiendo

$$\begin{aligned} &Z(s, n_i, x; r, m_i, y) = && (4.35)\\ &= \sum_V (-1)^{s+r} e^{-2i\pi V(r\beta_0 + \sum_i m_i\beta_i)}\, e^{-2i\pi y\Gamma(2V+2x\Gamma)}\, \chi_V\, \chi^*_{V+s\beta_0+\sum_i n_i\beta_i+2x\Gamma} \end{aligned}$$

la función de partición está dada por

$$Z = \frac{1}{D^{r+1}M} \sum_{r,s,n_i,m_i}^{D-1} \sum_{x,y=0}^{M-1} Z(s, n_i, x; r, m_i, y) \quad . \tag{4.36}$$

La suma sobre y implementa la condición (4.34) y la suma sobre x es tal que están incluidos todos los sectores retorcidos por Γ. Por lo tanto, ambas sumas deben hacerse desde 0 hasta $M-1$, donde M es el menor entero positivo tal que $M\gamma_i = I \mod (k_i+m_i+1)\ \forall i$, donde I es un entero positivo.

El cálculo de la característica de Euler para la variedad compactificada asociada puede llevarse a cabo conociendo los polinomios de Poincaré retorcidos. Para generalizar (4.26) incluyendo los moddings, introducimos la función

$$P_{r,y;s,x} = Tr\left\{(-1)^{rc/3} e^{i\pi(Q-\bar{Q})} e^{2i\pi r J_0} e^{2i\pi y \sum_i \gamma_i (q_i+\bar{q}_i)/2(k_i+m_i+1)}\right\}_{R_0^{(s,x)}} \tag{4.37}$$

donde $R_0^{(s,x)}$ se refiere al estado fundamental de Ramond tal que

$$V - \bar{V} = 2s\beta_0 + 2x\Gamma \quad . \tag{4.38}$$

La ecuación (4.37) puede factorizarse así

$$\begin{aligned} P_{r,y;s,x} &= \prod_i (P_i)_{r,y;s,x} = \qquad (4.39)\\ &= Tr\left\{\prod_i \left[(-1)^{rc_i/3} e^{i\pi(Q_i-\bar{Q}_i)} e^{2i\pi r J_{0i}} e^{2i\pi y\gamma_i (q_i+\bar{q}_i)/2(k_i+m_i+1)}\right]_{R_{0_i}^{(s,x)}}\right\} \end{aligned}$$

donde $R_{0_i}^{(s,x)}$ consiste de los estados que satisfacen la condición

$$(q_i - \bar{q}_i) = 2\eta_i(s + x\gamma_i) \quad . \tag{4.40}$$

Esta condición nos permite reemplazar $q_i+\bar{q}_i$ por $2q_i - 2\eta_i(s+x\gamma_i)$ en la ecuación (4.39). En consecuencia, es posible reemplazar $q_i/(k_i+m_i+1)$ por Q_i. Más aún, $(P_i)_{r,y;s,x} = (P_i)_{r,y;s+x\gamma_i,0}$.

El número de generaciones quirales está dado por

$$N_{gen} = \frac{1}{2MD} \sum_{r,s=0}^{D-1} \sum_{x,y=0}^{M-1} P_{r,y;s,x} \quad . \tag{4.41}$$

De nuevo, $P_{r,y;s,x}$ puede escribirse en términos de productos de polinomios de Poincaré retorcidos así

$$\begin{aligned} P_{r,y;s,x} &= \prod_{i=1}^{r} (P_i)_{r,y;s,x} = \qquad (4.42)\\ &= \prod_{i=1}^{r} e^{-2i\pi y \gamma_i^2 x \eta_i/(k_i+m_i+1)}\, \mathcal{P}_i^{(s+x\gamma_i)}(t = e^{2i\pi r/D + i\pi/D + 2i\pi y\gamma_i/D}; \bar{t} = e^{-i\pi/D}) \quad . \end{aligned}$$

Capítulo 5

Permutaciones cíclicas en modelos de cuerdas de Kazama–Suzuki

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores vimos que cocientando por simetrías discretas es posible construir nuevas teorías invariantes modulares En particular cuando dos ó más teorías internas son iguales, aparecen las simetrías de permutación. De hecho, el primer modelo de cuerdas $(2,2)$ con tres generaciones (hallado por Gepner [60]) se obtiene cocientando por una simetría de fase $\mathbb{Z}_3$ y una simetría de permutación. Un estudio sistemático de las simetrías de permutación en los modelos de Gepner fue realizado en [49, 50] (ver también [89]), donde se introdujo un método interesante para calcular el espectro no masivo de las teorías *orbifoldizadas*.

Se pueden construir vacíos de cuerda supersimétrica orbifoldizando modelos de Landau–Ginzburg (LG) [74, 90, 91]. Una clasificación completa de los superpotenciales de LG a partir de los cuales se pueden construir modelos de cuerdas $(2,2)$, incluyendo permutaciones de factores idénticos, fue hecha en [92]. Cuando el superpotencial de LG describe un modelo de Gepner ambos métodos dan el mismo número de generaciones de E_6. Sin embargo, en el caso de los modelos de LG, el anillo quiral caracteriza completamente la teoría, mientras que el método introducido en [49, 50] requiere considerar también los estados no quirales y permite extraer más información (por ejemplo, la función de partición de la teoría permutada puede escribirse explícitamente).

En esta sección estudiamos las simetrías por permutaciones cíclicas de modelos de cuerdas en cuatro dimensiones construidas a partir de modelos de clases laterales $N=2$ superconformes más generales. En la sección 5.2 repasamos la construcción de modelos de LG cocientados por simetrías abelianas [80, 93, 92] y aplicamos estos métodos al cálculo del número de generaciones de E_6 de modelos de cuerdas construidos a partir del producto tensorial de modelos de clases laterales del tipo $\mathbb{CP}_m = SU(m+1)/SU(m) \times U(1)$. Extendemos luego el método de las referencias [49, 50] para incluir invariantes modulares no diagonales que no admiten una descripción de LG.

Aunque los pasos básicos siguen a [49, 50], el cálculo concreto demanda un estudio cuidadoso de cada teoría componente. Se conoce una fórmula cerrada para los campos quirales (antiquirales), pero se necesita hacer un cálculo caso por caso para los demás campos. En la sección 5.3 resumimos el método general de las referencias [49, 50] y remarcamos las particularidades para los modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$. Ilustramos el procedimiento cocientando por simetrías de permutación cíclica de M teorías (con M primo) con dos ejemplos. El caso particular $M = 2$ es analizado en la sección 5.4. Algunos pasos útiles de la construcción explícita de los caracteres para los modelos de clases laterales $N = 2$ es descripta brevemente en 7.6 (usando como ejemplo $\mathbb{CP}_2$).

5.2. Permutaciones cíclicas en modelos de Landau Ginzburg

Cuando se consideran modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$ con invariantes modulares no diagonales, se puede simplificar el cálculo de las generaciones de fermiones quirales aprovechando la relación que tienen con los modelos LG $N = 2$. Las expresiones básicas de la descripción de LG de teoría $N = 2$ superconformes pueden verse en [74, 90, 91]. Aquí nos concentraremos en el cálculo del número de generaciones quirales en el correspondiente vacío de supercuerda.

La acción de LG en el superespacio es

$$S = \left(\int d^2 z d^4 \theta \; K(\phi_i, \bar{\phi}_i) \right) + \left(\int d^2 z d^2 \theta \; W(\phi_i) + c.c. \right) \quad . \tag{5.1}$$

El superpotencial W es holomorfo en los campos quirales ϕ_i y, en el punto fijo de las trayectorias del grupo de renormalización, define una teoría superconforme con potencial cuasihomogéneo

$$W(\lambda^{n_i} \phi_i) = \lambda^D W(\phi_i) \quad . \tag{5.2}$$

Para describir un vacío de cuerdas $N = 2$ a partir de una teoría de LG, se deben imponer las condiciones GSO sobre los estados internos de carga entera. Esto corresponde a considerar un orbifold por el grupo de simetría discreta que transforma los campos así

$$\Phi_i \rightarrow e^{2\pi i n_i / D} \Phi_i \tag{5.3}$$

donde n_i son los pesos y D es el orden del superpotencial.

El número de generaciones fermiónicas contenidas en esta teoría se puede calcular con la siguiente fórmula derivada en [80, 93],

$$N_{gen} = -\frac{1}{2D} \sum_{p,s=0}^{D-1} (-)^{(\frac{c}{3}-r)(p+s+ps)} \prod_{pQ_i, sQ_i \in Z} \frac{n_i - D}{n_i} \tag{5.4}$$

donde el producto se toma sobre todos los n_i tales que $pQ_i \in Z$ y $sQ_i \in Z$ simultáneamente.

En general, los modelos de LG poseen un grupo de simetrías discretas más grande que el generado por (5.3). Estos modelos han sido clasificados en [92] donde se construyen vacíos de cuerdas como orbifolds por simetrías abelianas discretas. En una base en la que todos los elementos del grupo de simetría actúan en forma diagonal sobre los campos, es posible caracterizar cada elemento g de un grupo cíclico G por el orden de g y por un vector de r componentes enteras $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_r)$

$$g : \phi_i \longrightarrow e^{2\pi i \Theta_i^g} \phi_i = e^{2\pi i \gamma_i / M} \phi_i \quad . \tag{5.5}$$

Cuando $\det(g) = 1\ \forall g \in G$, el orbifold del modelo de LG es $(2,2)$ supersimétrico y tiene una interpretación como variedad de Calabi–Yau o como un orbifold de un Calabi–Yau.

El número de generaciones de una teoría orbifoldizada por n grupos cíclicos caracterizados por $\gamma^{(1)}, \cdots, \gamma^{(n)}$ es [93]

$$N_{gen} = -\frac{1}{2\prod_{i=0}^{n} M_i} \sum_{p_i, s_i = 0}^{M_i - 1} \prod_{\substack{j/ \\ \sum_i p_i \gamma_j^{(i)}/M_i \in Z \\ \sum_i s_i \gamma_j^{(i)}/M_i \in Z}} \left(1 - \frac{D}{n_j}\right) \tag{5.6}$$

donde $M_0 = D, p_0 = p, s_0 = s$ y $g^{(0)} = (n_1, \cdots, n_r)$. Esta expresión no incluye torsión discreta y es válida para $(\frac{c}{3} - r)$ par. Puede agregarse un campo trivial si esta condición no se satisface, a saber $W' = W + \phi_t^2$.

Para cocientar por una simetría discreta usando este formalismo, notar que si un potencial genérico W tiene una simetría de permutación cíclica de M campos (M primo), a saber

$$W(\phi_0, \cdots, \phi_{M-1}) = W(\phi_{M-1}, \phi_0, \cdots, \phi_{M-2}) \tag{5.7}$$

es posible realizar el siguiente cambio de variables

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-2\pi i k j / M} \phi_k \tag{5.8}$$

que transforma la simetría de permutación de los campos ϕ_k en una simetría de fase de ψ_k (dado que $\phi_k \to \phi_{k+1}$ implica $\psi_j \to e^{2\pi ij/M}\psi_j$). Notar que ϕ_k y ψ_k tienen el mismo peso, por lo que el orbifold por β_0 no es modificado por el cambio de variables. El número de generaciones de la teoría puede calcularse entonces con la ecuación (5.6) eligiendo $\gamma_0 = (n, \cdots, n, n_M, \cdots, n_r)$ y $\gamma^{(1)} = (0, 1, 2, \cdots, M-1, 0, \cdots, 0)$ de orden M. Que M sea primo implica

$$\det(g) = e^{2\pi i \sum_{j=0}^{M-1} \frac{j}{M}} = 1 \quad . \tag{5.9}$$

Notar que no es necesario conocer el superpotencial explícitamente para calcular N_{gen} en la teoría cocientada. Alcanza con conocer los pesos y el orden de W.

Aplicando este procedimiento a todos los modelos de Gepner $N = 2$ hemos reobtenido los resultados de [50]. El mismo tipo de cálculo fue realizado para los modelos de Kazama–Suzuki que pueden ser descriptos por un superpotencial de LG. Éstos son los modelos diagonales $(m, k)_{AA}$ (los subíndices denotan los invariantes modulares $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ respectivamente) los que tienen [73, 91]

$$W = \sum_{j_1+2j_2+\cdots+mj_m=k+m+1} A_{n_1\cdots n_m} \phi_1^{j_1} \cdots \phi_m^{j_m} \tag{5.10}$$

donde los coeficientes $A_{n_1\cdots n_m}$ son tales que cada ϕ_i tiene peso j.

Los resultados están listados en el cuadro 5.1 donde los superpotenciales correspondientes son denotados por $D, (n_1, \cdots, n_r)$ y las permutaciones cíclicas consideradas se pueden deducir de los vectores γ. No hemos incluido modelos que se sabe son equivalentes a nivel del sector quiral, porque claramente darán resultados idénticos. Notar que la ecuación (5.6) permite realizar por separado la suma sobre los p_i's sector por sector. Sin embargo, para los modelos que no son de LG, se debe buscar otro método. En las secciones siguientes describiremos tal método, donde también enfatizaremos otros resultados de esta formulación.

Cuadro 5.1:

Número de generaciones en modelos $\mathbb{CP}_m$ cocientados por permutaciones cíclicas

Modelo	$D,(n_1,\cdots,n_r)$	M,γ	N_{gen}
$(2,3)_{AA}\times(2,3)_{AA}\times(2,3)_{AA}$	6,(1,2,1,2,1,2)	3,(0,0,1,1,2,2)	36
$(2,3)_{AA}\times(2,3)_{AA}\times(2,3)_{AA}$	6,(1,2,1,2,1,2)	2,(0,0,1,1,0,0)	54
$(4,5)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 1_A$	30,(3,6,9,12,10,10,10)	3,(0,0,0,0,0,1,2)	0
$(3,4)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 2_A$	24,(3,6,9,8,8,8,6)	3,(0,0,0,0,1,2,0)	0
$(3,3)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 5_A$	21,(3,6,9,7,7,7,3)	3,(0,0,0,0,1,2,0)	0
$(3,4)_{AA}\times 2_A\times 2_A\times 2_A$	8,(1,2,3,2,2,2)	3,(0,0,0,0,1,2)	40
$(3,4)_{AA}\times 6_D\times 6_D$	8,(1,2,3,2,3,2,3)	2,(0,0,0,0,0,1,1)	40
$(3,3)_{AA}\times 12_D\times 12_D$	7,(1,2,3,1,3,1,3)	2,(0,0,0,0,0,1,1)	56
$(2,4)_{AA}\times(2,4)_{AA}\times 5_A$	7,(1,2,1,2,1)	2,(0,0,1,1,0)	51
$(2,6)_{AA}\times(2,6)_{AA}\times 1_A$	9,(1,2,1,2,3)	2,(0,0,1,1,0)	42
$(2,6)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 1_A$	9,(1,2,3,3,3,3,3)	3,(0,0,0,1,2,0,0)	60
$(2,6)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 1_A$	9,(1,2,3,3,3,3,3)	5,(0,0,0,1,2,3,4)	12
$(2,6)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 1_A$	9,(1,2,3,3,3,3,3)	2,(0,0,0,1,0,1,0)	48
$(2,6)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 4_A$	18,(2,4,6,6,6,3)	3,(0,0,0,1,2,0)	60
$(2,4)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 1_A\times 12_A$	42,(6,12,14,14,14,3)	3,(0,0,0,1,2,0)	0
$(2,6)_{AA}\times 1_A\times 1_A\times 2_A\times 2_A$	36,(4,8,6,15,6,15)	2,(0,0,0,0,1,1)	0
$(2,4)_{AA}\times 26_D\times 26_D$	28,(4,8,2,13,2,13)	2,(0,0,0,0,1,1)	102

5.3. Permutaciones cíclicas en modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$

En esta sección adaptaremos lo hecho en 2.8.3 para el caso de modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$. Notar que pasaremos de la notación de 2.8.3 a la de la sección 4.5.

En resumen,(4.32), (4.33) y (4.34) seguirán siendo válidas en el sector retorcido si definimos el nuevo vector de $1+2(r-M+1)$ componentes como

$$\begin{aligned} V &= (\tilde{\Lambda}_0; q_1, q_{M+1}, \cdots, q_r; \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_{M+1}, \cdots, \tilde{\Lambda}_r) \\ \beta_0 &= (\bar{s}; M\eta_1, \eta_{M+1}, \cdots, \eta_r; s_1, s_{M+1}, \cdots, s_r) \\ \beta_i &= (v; 0, \cdots, 0; 0, \cdots, v, \cdots, 0) \end{aligned} \quad (5.11)$$

y similarmente para el vector de fases

$$\Gamma = (0; M\gamma_1\eta_1, \gamma_{M+1}\eta_{M+1}, \cdots, \gamma_r\eta_r; 0, \cdots, 0) \tag{5.12}$$

donde las M teorías idénticas originales fueron reemplazadas por sólo una en el primer bloque.

La ecuación (4.31) ahora significa que los estados izquierdos NS pueden acoplarse a los derechos si

$$\begin{aligned} q_1 - \bar{q}_1 &= m_1(m_1+1)M(s+x\gamma_1) \mod m_1(m_1+1)M(k_1+m_1+1) && (5.13) \\ q_i - \bar{q}_i &= m_i(m_i+1)(s+x\gamma_i) \mod m_i(m_i+1)(k_i+m_i+1) && (5.14) \end{aligned}$$

para $i = M+1, \cdots, r$.

De la misma manera que se comentó en la página 56, es necesario tener cuidado con las identificaciones de campos en la teoría cocientada. En la nueva teoría, expresada en términos de un sólo bloque original, el orden de la órbita bajo σ ha sido aumentado a $M(m_1+1)m_1$. Una indicación de esto es que si calculamos el peso conforme h en (2.191) usando sólo los estados (4.4) transformados por σ, los pesos en el sector retorcido (4.31) estarán en $h_{\rm nueva} + \mathbb{Z}$ sólo después de aplicar $Mm_1(m_1+1)$ veces la transformación σ [83].

Los estados no masivos de materia (antimateria) quiral–quiral (quiral–antiquiral) satisfacen $h_{int} = Q_{int}/2$ y $\bar{h}_{int} = \bar{Q}_{int}/2$ ($\bar{h}_{int} = -\bar{Q}_{int}/2$). Los estados quirales (antiquirales) del producto tensorial de modelos se obtienen como productos de los estados quirales (antiquirales) de cada clase lateral. Similarmente para la nueva teoría, los estados quirales tienen $h_{\rm nueva} = Q_{\rm nueva}/2 = Q/2$.

Aplicaremos ahora el método ya discutido para cocientar por la permutación cíclica de $M = 3$ bloques en la teorías $(2,1)^4_{AA}$ ($c_{int} = 6$) y $(2,2)^3_{AA}3_A$ ($c_{int} = 9$), y calcularemos el espectro quiral no masivo en ambos casos (**56**, **27** y $\bar{\mathbf{27}}$ de E_6 respectivamente). Las teorías permutadas las pondremos entre corchetes *i.e.* $\{(2,1)^3_{AA}\}(2,1)_{AA}$ y $\{(2,2)^3_{AA}\}3_A$ respectivamente.

De acuerdo a la notación de la sección 4.2, en una teoría genérica $(2,k)$

$$\begin{aligned} \Lambda &= m_1 w_1 + m_2 w_2 && (5.15) \\ \lambda &= n\hat{w}_1 + \frac{q}{2} w_2 && (5.16) \end{aligned}$$

por lo que un estado de la clase lateral puede escribirse como $(m_1, m_2)(n, q)s$ (con $s = 0, 2, 1, -1$ correspondiendo a $0, v, s, \bar{s}$). Las restricciones $C(\Lambda, \lambda)$ son, para el sector

NS

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_2 - q &= 0 \mod 3 \\ 4m_1 + 2m_2 - q - 3n &= 0 \mod 6 \end{aligned}$$

(con $m_1 + m_2 \leq k$ y $q \equiv q + m(m+1)(k+m+1)$) y los pesos y cargas son

$$h = \frac{1}{12(k+m+1)}[4m_1^2 + 4m_2^2 + 4m_1m_2 + 12m_1 + 12m_2 - 3n(n+2) - q^2] + \frac{s^2}{8} + L \quad (5.17)$$

$$Q = \frac{-q}{k+m+1} + \frac{s}{2} + 2L' \quad . \quad (5.18)$$

Consideremos la clase lateral $(2,1)_{AA}$. En este caso, para $M = 3$, las condiciones anteriores dan lugar a seis estados de peso máximo, a saber

estado #	(m_1, m_2)	n	q	s	h	Q	h_{nuevo}
1	$(0,0)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$(0,1)$	0	2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	$(1,0)$	0	-2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
4	$(1,0)$	1	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{24}$
5	$(0,1)$	1	-1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$
6	$(1,0)$	0	4	2	$\frac{1}{2} + L$	$2L'$	$\frac{1+L}{3}$

y sus correspondientes estados transformados por σ (4.4). Notar que los enteros L, L' que aparecen en (5.17) y (5.18) sólo son desconocidos para el sexto estado, dado que es el único que no es quiral ni antiquiral. Para calcularlos exactamente miramos la expresión del carácter correspondiente (ver apéndice 7.6) expresado como una expansión en potencias de $x = e^{2i\pi\tau}$ e $y = e^{2i\pi z}$. (Notar que basta conocer el coeficiente no nulo para la menor potencia de x e y respectivamente).

Los primeros términos del carácter para este estado son

$$\chi_{(0,4)}^{(1,0)} = x^{1/2}y^0[1 + (y + y^{-1})x^{1/2} + 2x + (y + y^{-1})x^{3/2} + 4x^2 \cdots] \quad . \quad (5.19)$$

Por lo tanto, $h = 1/2$ y $Q = 0$. La siguiente potencia de x es mayor en $1/2$. Esto refleja el hecho general de que el álgebra superconforme $N = 2$ original puede separarse en subálgebras construidas aplicando un número par o impar de veces las corrientes $G^{\pm}_{-1/2}$ al estado primario original (ver [8]). Los estados obtenidos a partir del primario por una de estas subálgebras están denotadas con $s = 0$, y la otra con $s = 2$. Dado que la transformación σ intercambia $s = 0$ y $s = 2$, es posible que un estado primario tenga $s = 2$ como más arriba (notar que el estado ((1,0)(0,4)2) está identificado con

((0,1)(2,0)0)). Como una verificación de nuestros cálculos se puede ver que los otros campos en la órbita por σ producen el mismo carácter.

Notar que, en el caso que estamos considerando, los enteros L y L' podrían haber sido adivinados suponiendo que se verifica la relación de dualidad (válida después de la identificación de campos) $(m,k) = (k,m)$ [54], de modo que $(2,1)_{AA}$ corresponde al bien conocido modelo minimal 2_A. Hemos verificado explícitamente esta relación comparando los caracteres de los dos modelos para varias potencias de x e y.

Veamos ahora qué ocurre con las permutaciones cíclicas. Queremos calcular el número de estados quiral–quiral y quiral–antiquiral en la teoría proyectada. De (2.191) y (2.192) se ve que los estados quirales (antiquirales) en el sector retorcido vienen de estados en las órbitas por σ de

estado #	$((m_1,m_2)(n,q)s)$	h	Q	h_{nuevo}
2	$((0,1)(0,2)0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	$((1,0)(0,-2)0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
7	$G^{+}_{-1/2}((1,0)(0,4)2)$	1	1	$\frac{1}{2}$
8	$G^{-}_{-1/2}((1,0)(0,4)2)$	1	-1	$\frac{1}{2}$
9	$G^{-}_{-1/2}((0,1)(1,-1)0)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{3}{8}$
10	$G^{+}_{-1/2}((1,0)(1,1)0)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$

Pegando los estados quirales de la cuarta teoría $(2,1)_{AA}$ (*i.e.* la teoría no permutada) y acoplando los modos derechos e izquierdos de acuerdo a (4.32), (4.33) y (4.34) obtenemos los siguientes estados quiral–quiral en el sector retorcido

$$\begin{array}{cccccc}
\{7\} & 1 & - & \{7\} & 1 \\
\{10\} & 5 & - & \{10\} & 5 \\
\{3\} & 3 & - & \{3\} & 3 \\
\{7\} & 1 & - & \sigma^6(\{3\}) & \sigma^2(3) \\
\{10\} & 5 & - & \sigma^9(\{10\}) & \sigma^3(5) \\
\{3\} & 3 & - & \sigma^{12}(\{7\}) & \sigma^4(1)
\end{array}$$

donde los números denotan el estado # en el cuadro anterior.

Agregando los estados del sector no retorcido finalmente obtenemos un total de 20 estados. Esto coincide con el resultado de [50] para el modelo $\{2_A\}^3 2_A$, como era de esperar.

Discutamos ahora el segundo ejemplo $\{(2,2)^3_{AA}\}3_A$. Se sabe que el modelo de clase lateral $(2,2)_{AA}$ y el modelo minimal 8_D tienen el mismo espectro [94, 75, 96], por lo que sus polinomios de Poincaré coinciden. Sin embargo las teorías conformes totales son diferentes, la teoría 8_D tiene 25 estados primarios del álgebra de Virasoro mientras que $(2,2)_{AA}$ tiene 20. Por ejemplo, los primarios con (l,q,s) y $(l,-q,s)$ iguales a (6,4,0), (6,2,0), (6,0,0), (8,4,0) y (8,0,0) son estados de 8_D, pero no hay estados con los correspondientes cargas y pesos en $(2,2)_{AA}$. Notar que los estados con $l=4$ tienen multiplicidad 2 debido al invariante modular. Por otro lado, los caracteres de algunos de los estados quirales primarios son diferentes en 8_D y en $(2,2)_{AA}$ (para el mismo peso conforme). Por ejemplo el carácter de la identidad en 8_D es

$$\begin{aligned} \chi_{0,0} &= 1+x+3x^2+6x^3+x^4(13+y^2+y^{-2})+x^{3/2}(y+y^{-1})+ \\ &+2x^{5/2}(y+y^{-1})+5x^{7/2}(y+y^{-1})+... \end{aligned} \tag{5.20}$$

mientras que en $(2,2)_{AA}$ es

$$\begin{aligned} \chi_{0,0}^{0,0} &= 1+x+4x^2+8x^3+x^4[19+2(y^{-2}+y^2)]+x^{3/2}(y^{-1}+y)+ \\ &+3x^{5/2}(y^{-1}+y)+7x^{7/2}(y^{-1}+y)+... \end{aligned} \tag{5.21}$$

indicando que ambos campos transforman de distinto modo bajo el álgebra conforme. Los estados que no son quirales ni antiquirales pueden contribuir a los estados quirales retorcidos en la teoría nueva (ver (2.191), (2.192)) y, como estos estados no son los mismos para ambas teorías, se puede esperar que el número de estados en los sectores retorcidos difieran. Sin embargo, este no es el caso en estos dos modelos que estamos discutiendo.

Los nuevos estados quirales (antiquirales) en el sector retorcido son

estado	h	Q	$h_{\rm nuevo}$
$(2,0)(0,\pm4)0$	$\frac{2}{5}$	$\mp\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
$G^{\pm}_{-1/2}((0,1)(1,5)2)$	$\frac{7}{10}$	± 1	$\frac{1}{2}$

Pegando los estados quirales (antiquirales) de 3_A de manera que los pesos y cargas totales sumen 1/2 y 1 (-1), obtenemos 4 estados en el sector retorcido de **27** y también para $\overline{\mathbf{27}}$. El mismo número de estados retorcidos fue obtenido en [50] para el modelo $\{8_D^3\}3_A$. Esta coincidencia no era de esperar a priori, dado que el largo de las σ-órbitas de ambas teorías es diferente. Sin embargo, dado que los modos izquierdos y derechos tienen que acoplarse en el modelo $(2,2)_{AA}$ de acuerdo a los invariantes modulares $\mathcal{N}_{\Lambda,\bar{\Lambda}}$ y $\mathcal{M}_{\lambda,\bar{\lambda}}$, sólo 3 estados en la cadena por σ pueden contribuir potencialmente al sector retorcido en forma similar al caso de 8_D.

En el ejemplo bajo discusión los resultados equivalentes para ambas teorías pueden explicarse notando que, aún si los campos de ambas teorías transforman de distinto modo frente a la acción de los generadores conformes, las funciones de partición resultan ser iguales. De hecho hemos verificado explícitamente que algunos de los caracteres de $(2,2)_{AA}$ son suma de caracteres de 8_D, y que lo son de manera que las funciones de partición de ambos modelos coincidan. Los demás caracteres de los modelos 8_D y $(2,2)_{AA}$ son iguales uno a uno (por lo que los correspondientes estados transforman de la misma manera bajo el grupo conforme).

5.4. Permutaciones $\mathbb{Z}_2$

Como se discute en [50], es necesario tener cuidado cuando se permuta un par de bloques. Dado que los estados con $s = 2$ ($\bar{s} = 2$) pueden obtenerse actuando con $G^{\pm}_{-1/2}$ ($\bar{G}^{\pm}_{-1/2}$) sobre los correspondientes estados con $s = 0$ ($\bar{s} = 0$), permutar un par de estados que tengan ambos uno de estos operadores fermiónicos introduce un signo menos del que resulta la cancelación del estado simetrizado. Por supuesto este signo no aparece si se considera un número de permutaciones de dos teorías, la cancelación no ocurre y (2.185) es aplicable directamente.

Los sectores retorcidos, como se muestra en [50], deben ser construidos en el sector R de la teoría original en el caso de permutaciones $\mathbb{Z}_2$.

Como un ejemplo estudiamos las permutaciones $M = 2$ en $(2,1)^4$. Consideremos primero las permutaciones de dos bloques, *i.e.* $\{(2,1)^2\}\{(2,1)^2\}$. Aplicando el desplazamiento β_0 del flujo espectral a los estados NS obtenemos el siguiente cuadro de estados de R

estado	h	h_{nuevo}	Q
$(0,0)(0,3)1$	$1/16$	$1/8$	$1/4$
$(0,1)(0,5)1$	$1/16$	$1/8$	$-1/4$
$(1,0)(0,1)1$	$9/16$	$3/8$	$3/4$
$(1,0)(1,4)1$	$1/16$	$1/8$	0
$(0,1)(1,2)1$	$5/16$	$1/4$	$1/2$
$(1,0)(0,7)-1$	$9/16$	$3/8$	$1/4$

Acoplando los modos derechos e izquierdos de acuerdo a (5.13) obtenemos los siguientes estados quiral–quiral en el sector retorcido

$$
\begin{array}{lcl}
\{(0,0)(0,3)1\}\ \{(1,0)(0,1)1\} & - & \{(0,0)(0,3)1\}\ \{(1,0)(0,1)1\} \\
\{(0,0)(0,3)1\}\ \{(1,0)(0,1)1\} & - & \sigma^6\{(0,0)(0,3)1\}\ \sigma^6\{(1,0)(0,1)1\} \\
\{(1,0)(0,1)1\}\ \{(0,0)(0,3)1\} & - & \{(1,0)(0,1)1\}\ \{(0,0)(0,3)1\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\{(1,0)(0,1)1\}\ \{(0,0)(0,3)1\} & - & \sigma^6\{(1,0)(0,1)1\}\ \sigma^6\{(0,0)(0,3)1\} \\
\{(0,1)(1,2)1\}\ \{(0,1)(1,2)1\} & - & \{(0,1)(1,2)1\}\ \{(0,1)(1,2)1\} \\
\{(0,1)(1,2)1\}\ \{(0,1)(1,2)1\} & - & \sigma^3\{(0,1)(1,2)1\}\ \sigma^3\{(0,1)(1,2)1\} \\
\{(0,1)(1,2)1\}\ \{(0,1)(1,2)1\} & - & \sigma^6\{(0,1)(1,2)1\}\ \sigma^6\{(0,1)(1,2)1\} \\
\{(0,1)(1,2)1\}\ \{(0,1)(1,2)1\} & - & \sigma^9\{(0,1)(1,2)1\}\ \sigma^9\{(0,1)(1,2)1\}
\end{array}
$$

I.e., un total de ocho estados retorcidos. Dado que este modelo tiene cuatro estados invariantes, aplicar (2.185) da lugar a 20 estados quiral–quiral, lo que es consistente con un modelo con $c_{int} = 6$.

Consideremos ahora el caso $\{(2,1)^2\}\ \ (2,1)^2$, *i.e.* permutaciones de sólo un par de bloques. Tenemos que combinar los estados R de la teoría "nueva" con los estados NS de las dos teorías sin permutar. De nuevo obtenemos ocho estados en el sector retorcido. Estos son

$$
\begin{array}{c}
\{(0,0)(0,3)1\}((0,1)(1,-1)0)((1,0)(0,-2)0)-\{(0,0)(0,3)1\}((0,1)(1,-1)0)((1,0)(0,-2)0) \\
\{(0,0)(0,3)1\}((1,0)(0,-2)0)((0,1)(1,-1)0)-\{(0,0)(0,3)1\}((1,0)(0,-2)0)((0,1)(1,-1)0) \\
\{(1,0)(0,1)1\}((0,1)(1,-1)0)((0,0)(0,0)0)-\{(1,0)(0,1)1\}((0,1)(1,-1)0)((0,0)(0,0)0) \\
\{(1,0)(0,1)1\}((0,0)(0,0)0)((0,1)(1,-1)0)-\{(1,0)(0,1)1\}((0,0)(0,0)0)((0,1)(1,-1)0) \\
\{(0,1)(1,2)1\}((0,1)(1,-1)0)((0,1)(1,-1)0)-\{(0,1)(1,2)1\}((0,1)(1,-1)0)((0,1)(1,-1)0) \\
\{(0,1)(1,2)1\}((0,0)(0,0)0)((1,0)(0,-2)0)-\{(0,1)(1,2)1\}((0,0)(0,0)0)((1,0)(0,-2)0) \\
\{(0,1)(1,2)1\}((1,0)(0,-2)0)((0,0)(0,0)0)-\{(0,1)(1,2)1\}((1,0)(0,-2)0)((0,0)(0,0)0) \\
\{(0,1)(1,2)1\}((0,1)(1,-1)0)((0,1)(1,-1)0)-\sigma^6\{(0,1)(1,2)1\}\sigma^3((0,1)(1,-1)0)\sigma^3((0,1)(1,-1)0)
\end{array}
$$

Para obtener el número total de estados en la representación **56** de E_6 tenemos que tener en cuenta que hay un estado en la teoría original que se cancela al ser simetrizado. Esto da de nuevo N_{56}=20 como era de esperar.

Comparando este ejemplo con el caso equivalente de Gepner, a saber $\{2_A^2\}\ \ 2_A^2$, aparece una diferencia. En [50] se usa la presencia de la $(3,0)$-forma acoplada con la identidad como un criterio para determinar si es posible hacer una permutación $\mathbb{Z}_2$. En el caso presente el estado

$$
(0,0,0)\ \ (0,0,0)\ \ -\ \ (0,-2,-2)\ \ (0,-2,-2) \tag{5.22}
$$

se cancela en la combinación simetrizada y por lo tanto no es parte del espectro. Notar que si se agregan un par de teorías triviales (*i.e.* con $k = 0$), la $(3,0)$-forma acoplada a la identidad no se cancelaría al simetrizar. Sin embargo, en el caso equivalente de Kazama–Suzuki, *i.e.* $\{(2,1)^2\}\ \ (2,1)^2$ la $(3,0)$-forma es el estado $(0,0)(0,-6)0$. Por lo tanto, al acoplarlo con la identidad, no se cancela al simetrizar. Este será el caso para todos los modelos de clases laterales con m par.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

La motivación general del trabajo presentado ha sido la de abordar la construcción de modelos de cuerdas cuando la variedad interna es una variedad de tipo esencialmente no toroidal. Las variedades tipo toroidales (donde incluimos los orbifolios) son de gran interés, especialmente por su directa interpretación geométrica y por su simplicidad, pero constituyen sólo un conjunto reducido dentro del rico conjunto de las posibles variedades donde puede compactificarse la teoría de cuerdas. Es entonces necesario ir más allá de éstas si se quiere tener una visión más completa sobre la estructura de la teoría.

Más específicamente, basados en las ideas introducidas por D. Gepner en [8], hemos considerado el caso de variedades internas que pueden ser descriptas en forma algebraica en términos de teorías conformes exactamente solubles. En esta tesis hemos abordado el estudio de compactificaciones de la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ y de orientifolios de la cuerda Tipo IIB sobre variedades internas de este tipo.

En el caso heterótico, como resumimos abajo con más detalle, hemos considerado variedades construidas en base a teorías superconformes de clases laterales tipo CP_m generalizando compactificaciones sobre modelos minimales CP_1 (llamados de Gepner).

Para la cuerda tipo IIB nos hemos concentrado en compactificaciones sobre modelos de Gepner.

Si bien nuestro primer estudio se ha referido a la cuerda heterótica hemos decidido presentar los resultados, en el cuerpo de la tesis, en el orden inverso teniendo en cuenta el interés creciente despertado por el estudio de los orientifolios y también por razones de claridad ya que los modelos de clases laterales aparecen como generalización del caso minimal.

Respecto del estudio de la cuerda tipo IIB hemos construido orientifolios en $D = 8, 6$

y $D = 4$ dimensiones, donde el sector interno está basado en modelos de Gepner, extendiendo trabajos preliminares en este tema.2

Un paso importante en esta construcción es la identificación, siguiendo las ideas originales de Gepner, del carácter $N = 1$ *supersimétrico* $\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}(\tau)$ en (2.53) para los modos izquierdos y derechos. En particular, una vez que se han obtenido estos caracteres, es fácil implementar formalmente los cocientes por simetrías tanto de fase como de permutaciones cíclicas, como se presentó en la subsección 2.8.

Por supuesto, una limitación seria para el cálculo explícito es el gran número de caracteres a considerar. Este número aumenta genéricamente con el número de dimensiones internas y con el nivel k de las teorías internas. De hecho, aunque las condiciones de cancelación de tadpoles RR sólo requieren tener en cuenta los estados no masivos en el canal transverso, la factorización debe ser verificada para todos los estados, tanto masivos como no masivos. En algunos modelos esto requiere considerar miles de caracteres, una tarea difícil aún para una computadora rápida. Por esto, se debe dedicar particular atención a las técnicas que permitan reducir el número de caracteres a manipular. Por ejemplo, como hemos mostrado explícitamente en los ejemplos en $D = 8$, los cálculos se simplifican notablemente cuando se usan las matrices *reducidas* de transformaciones modulares que tienen en cuenta sólo los estados con carga *impar*, en vez de considerar las matrices del producto tensorial total de los bloques. El uso del carácter del álgebra conforme completa (dado en términos de (l, q) en vez de (l, q, s)), también parece presentar algunas ventajas en los cálculos concretos de la factorización y de la cancelación de tadpoles, al reducir el número de estados que hay que manejar.

Por otro lado, más allá de su interés fenomenológico potencial, el cocientar por estas simetrías discretas permite también reducir estos números. Por ejemplo, los cientos de caracteres de materia (izquierda) no masiva en el modelo 3^5 pueden ser reducidos a cuatro al cocientar simultáneamente por simetrías de fase y de permutaciones.

Hemos realizado un estudio detallado de diversos modelos en $D = 8$, para los que encontramos un amplio conjunto de soluciones. Esto permitió adquirir un mayor manejo de este tipo de construcciones en ejemplos sencillos y a la vez poder comparar con otras construcciones. También estudiamos ejemplos $D = 6$ y 4. Allí se ve cómo se puede modificar el número de generaciones, cómo puede crecer el grupo de calibre, cómo los moddings por fase pueden inducir un cambio topológico, etc. En estos casos nos hemos concentrado en ejemplos con niveles k impares para evitar las complicaciones adicionales debidas a la presencia de puntos fijos.

Respecto de la construcción de modelos con potencial interés fenomenológico hay dos requerimientos básicos que deben cumplirse para que un modelo sea aceptable

- El grupo de calibre debe ser suficientemente grande como para contener al grupo del Modelo Estándar
- Debe contener fermiones quirales

El estudio general realizado en la primera parte nos permitió abordar estas construcciones de forma controlada y analítica.

Por un lado sabemos que, cuando se consideran invariantes diagonales, el número de ecuaciones de tadpole a resolver es considerablemente menor al que aparece con otros invariantes facilitando el tratamiento del problema. Por ejemplo aparecen dos ecuaciones para el 3^5 diagonal frente a decenas para otros invariantes [1].

Sin embargo, por otra parte, se puede mostrar que los invariantes diagonales producen siempre espectros no quirales. En en particular para modelos con nivel k impar, sólo aparecen grupos simplécticos u ortogonales [100] [2].

El análisis realizado para implementar el cociente por las simetrías de fase nos abrió el camino para conseguir modelos quirales a partir de casos no quirales. La idea es que la acción de dividir por la simetría de fase, en el sector interno, puede acompañarse por una proyección sobre el sector de gauge de cuerda abierta de la misma manera que una rotación orbifolio de las coordenadas internas debe acompañarse por una acción sobre los factores de Chan-Paton. El resultado general es que el grupo original se rompe a un subgrupo que puede ser unitario y que en general contiene materia quiral. Este estudio fue presentado en el Capítulo 3. Recientemente han aparecido trabajos relacionados como [69, 70]. Mostramos también que es posible hacer una compactificación híbrida donde una parte de la variedad está construida en base a modelos de Gepner mientras la otra corresponde a un toro. El modding por fases debe entonces acompañarse por una acción tipo orientifolio sobre las coordenadas del toro. Estas construcciones híbridas son particularmente interesantes ya que permiten tener una coordenada transversa grande y así bajar la escala de la cuerda.

Implementando estas ideas hemos construido diversos ejemplos con materia quiral. Usando la construcción híbrida hemos obtenido, en casos sencillos, algunos modelos

[1]Esto en realidad está asociado a que estos casos diagonales (conocidos como Tipo B) tienen asociadas branas que se envuelven en dos–ciclos de la variedad compactificada. El número de ecuaciones de tadpole será como máximo igual al número de dos–ciclos $h_{11}+1$ (h_i son los números de Hodge de la variedad) mientras que en, por ejemplo los conjugados de carga (Tipo A) los ciclos relevantes son 3–ciclos ($h_{21}+1$). En particular $h_{11}=1$ y $h_{21}=101$ para la quíntica 3^5.

[2]Recordar que no aparecen representaciones espinoriales en el espectro no perturbativo.

con contenido fermiónico cercano al Modelo Estándar o extensiones de él (Modelos *Left–Right symmetric*).

Una estrategia posible es comenzar con invariantes modulares sencillos para los modelos de Gepner, por ejemplo uno diagonal, dando lugar a un número pequeño de ecuaciones de tadpoles. Una vez que se encontró una solución consistente, podemos proyectar por alguna de las simetrías para obtener grupos unitarios, materia quiral, etc. Esto funciona en forma muy parecida a las proyecciones de orbifold del grupo SO(32) de la teoría de cuerdas tipo I. Las ecuaciones de tadpoles son fáciles de escribir una vez que se conoce la teoría inicial. Una aplicación alternativa, de alguna manera opuesta, de los cocientes por fases es usarlos para reducir el número de ecuaciones de tadpoles que hay que resolver [67].

Nos hemos concentrado en algunos ejemplos sencillos para ilustrar el método, más que para intentar una búsqueda sistemática de los modelos fenomenológicamente interesantes. Una ventaja importante de este procedimiento es que varios de los resultados pueden ser obtenidos analíticamente.

Respecto a la parte del trabajo referida a cuerda heterótica hemos analizado las compactificaciones donde la parte interna se construye en base teorías de clases laterales tipo $\mathbb{CP}_m$. En particular, en la sección 4.3 hemos construido los polinomios de Poincaré para estos modelos con una gran variedad de invariantes modulares no diagonales. Los polinomios son expresiones concisas que contienen información acerca de los elementos del álgebra quiral del modelo. Las equivalencias entre modelos pueden establecerse más fácilmente observando si sus polinomios de Poincaré coinciden. Cuando se construyen modelos de supercuerdas en cuatro dimensiones, como se discute en la sección 4.4 el espectro no masivo se puede hallar a partir del polinomio de Poincaré, sin pasar por la construcción explícita de los estados caso por caso.

Hemos usado las fórmulas derivadas en esta misma sección para calcular el número de generaciones para las compactificaciones de cuerdas basadas en el producto tensorial de modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$, en el que al menos uno de las clases laterales posee un invariante $SU(m)$ no diagonal. Una lista completa de los resultados está dada en [88]. Estos resultados no son muy diferentes de los hallados previamente en la literatura [76, 50, 78, 79, 89] para modelos menos generales. El número de generaciones varía desde 0 hasta 360 para los 1144 modelos considerados. Los números más usuales son 0, ó múltiplos de 8, 12 y 18. Los modelos con $0 < N_{gen} < 12$ están listados en el cuadro 7.5.

Es interesante que algunos modelos de clases laterales poseen polinomios de Poincaré que se anulan cuando se los evalúa en valores apropiados de $t, \bar{t}$ dados por (4.27). Por lo tanto, todas las compactificaciones de cuerdas que contengan estas clases laterales como teorías internas tendrán número de generaciones cero. Estos pueden corresponderse con los modelos con $N_{\mathbf{27}} = N_{\overline{\mathbf{27}}} = 5, 9, 13$ como a compactificaciones en $K_3 \times T$ con $N_{\mathbf{27}} = N_{\overline{\mathbf{27}}} = 21$. Los modelos que tienen polinomios que se anulan de esta manera son mostrados en el cuadro 7.4.

Para buscar modelos de supercuerdas con bajo número de generaciones hemos aplicado los resultados de la sección 4.5 a los ya mencionados modelos de clases laterales. Estudiamos un total de 4819 modelos con un sólo modding por simetría de fase. Hallamos que más de la mitad de éstos tienen cero generaciones. También encontramos 2, 18, 59 y 367 modelos con N_{gen}=4, 6, 8 y 12, respectivamente.

En el capítulo 5 hemos calculado el número de generaciones quirales en la **27** de E_6 para modelos de cuerdas construidos a partir del producto tensorial de modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$ que pueden describirse en términos de superpotenciales de LG. Hemos también extendido el método desarrollado en [49, 50] para estudiar simetrías de permutación cíclica en modelos de cuerdas $\mathbb{CP}_m$ que no admiten una formulación de LG. Este estudio contribuye a una comprensión más profunda de las teorías de clases laterales. En particular hemos usado fórmulas explícitas (expansión en serie de potencias) de los caracteres de los campos primarios, basadas en las construcciones generales de [95]. Para conocer los pesos y cargas exactos de estos campos basta tener la primer potencia de los caracteres. Quizás este cálculo pueda simplificarse aislando esta potencia de las demás con algún proceso de paso al límite [97]. Notar que las expansiones explícitas de los caracteres permiten verificar equivalencias entre teorías, que habían sido conjeturadas esencialmente a partir de las estructuras quirales. La información necesaria de la teoría original para construir la proyectada va más allá de la estructura quiral. Por esto, teorías que no son idénticas desde el punto de vista del grupo conforme total (*i.e.* sus espectros de pesos y cargas conformes no son iguales) pueden dar resultados diferentes. Por ejemplo, en el caso de los modelos minimales, si es válida la equivalencia al nivel quiral, entonces el espectro quiral de las teorías coincide. Sin embargo el espectro de singletes puede diferir [50]. Una pregunta abierta que queda, es respecto de las permutaciones $\mathbb{Z}_2$ de modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$ con m impar. En el ejemplo presentado (a saber $\{(2,1)^2\}(2,1)^2)$, los estados masivos contribuyen al espectro no masivo de la teoría cociente, mientras que no lo hacen en el caso "equivalente" de Gepner ($\{2_A^2\}2_A^2$).

Como se muestra, para el caso de modelos de Gepner, en 2.8, es fácil incorporar a este esquema cocientes por simetrías de fase que conmuten con las permutaciones cíclicas.

El trabajo referido a la cuerda heterótica realizado en la tesis, se ha concentrado en la cuerda con grupo $E_8 \times E_8$. Una extensión interesante sería generalizar la construcción realizada para considerar compactificaciones de la cuerda heterótica con grupo $SO(32)$. Sin embargo, cuando se compactifica a $D = 4$ el grupo resultante es $SO(26)$, un grupo real, sin interés desde el punto de vista fenomenológico. Esta es una de las razones por las cuales la cuerda heterótica $SO(32)$ fue menos estudiada en un principio. De todas maneras, es claro que, como lo muestran por ejemplo las compactificaciones en orbifolios, el grupo puede romperse a subgrupos con contenido de materia quiral con interés fenomenológico.

En nuestras construcciones sería posible, en principio, romper el grupo a subgrupos que contengan materia quiral. Esto podría implementarse cocientando la teoría interna por alguna de sus simetrías de fase realizando a la vez una proyección sobre los grados de libertad de gauge (para un ejemplo ver [101, 102]. Es la misma idea que hemos implementado en los orientifolios para obtener modelos quirales a partir de orientifolios diagonales no quirales.

Este es un tema a desarrollar tanto para modelos de clases laterales generales como para el caso mas simple de los modelos de Gepner $\mathbb{CP}_1$. En particular, además del posible interés fenomenológico, podría resultar interesante comparar estos modelos con los resultantes de los orientifolios en diversas dimensiones, en el marco de la dualidad Tipo IIB–heterótica $SO(32)$.

En cuanto a posibles extensiones del trabajo referido a los orientifolios Tipo IIB sería interesante considerar ahora variedades internas tipo clases laterales [54], en particular como las $\mathbb{CP}_m$ consideradas en el caso heterótico. Formalmente los pasos a seguir son los presentados en nuestro trabajo aunque, en la práctica, el cálculo concreto de modelos consistentes puede resultar complejo. En particular involucra explícitamente a las matrices de las transformaciones modulares de la clase lateral que, si bien se conocen formalmente, son de difícil manejo a la hora de realizar por ejemplo el estudio de un espectro no masivo, etc. Un caso manejable podría ser el de modelos sobre clases $\mathbb{CP}_2$ a nivel k dados por

$$\frac{\widehat{SU}(3)_k \times \widehat{SO}(4)_1}{\widehat{SU}(2)_{k+1} \times \widehat{U}(1)_{6(k+3)}} \,, \tag{6.1}$$

.

Desde el punto de vista fenomenológico sería interesante profundizar en la construcción de modelos para niveles k pares y modelos híbridos sobre puntos Gepner $D = 6$–orbifolio de T^2. En la tesis hemos planteado la construcción en general pero hemos estudiado más detalladamente ejemplos con niveles impares y en el caso de construcciones híbridas hemos presentado algunos ejemplos sencillos donde el modelo de Gepner está en $D = 8$ (y por lo tanto corresponde a un toro).

Podría ser interesante estudiar, en la misma línea de trabajo que aquí, la versión de cuerda abierta del modelo de Gepner de 3 generaciones tipo heterótico [60], el que involucra tanto cocientes por simetrías de fase como de permutaciones cíclicas.

Esperamos que nuestro trabajo, basado en la función de partición, pueda ayudar a clarificar las conexiones con interpretaciones más geométricas. En particular sería interesante reformular nuestra construcción en términos de estados de borde.

Capítulo 7

Apéndices

7.1. Caracteres $N=2$ y sus transformaciones

Caracteres de los modelos minimales superconformes $N=2$ **y cuerdas** $N=2$

En este apéndice juntamos varias propiedades de los caracteres que son útiles para demostrar varias afirmaciones hechas en el cuerpo principal de la tesis.

Recordemos la definición de $\chi_{(l,q)}$ en (2.32)

$$\chi_{l,q}(\tau,z) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{(l,q)}}(e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})\tau}e^{2\pi i J_0 z}) = \chi_{(l,q,s)}(\tau,z)+\chi_{(l,q,s+2)}(\tau,z) \quad . \tag{7.1}$$

Expresiones explícitas para los caracteres de los modelos minimales superconformes $N=2$ han sido calculadas en las referencias [55, 56, 57] y han sido usadas extensivamente en [8, 58]. En términos de las funciones ϑ de Riemann son [59]

$$\chi_{l,q}(\tau,z) = \frac{\vartheta\left[{0 \atop 0}\right](\tau,z)\vartheta\left[{-\frac{l+1}{m}+\frac{1}{2} \atop \frac{1}{2}}\right](m\tau,0)\eta^3(m\tau)e^{\pi i(\frac{l+1}{m}-\frac{1}{2})}}{\eta^3(\tau)\vartheta\left[{\frac{l+q+1-m}{2m} \atop 0}\right](m\tau,z)\vartheta\left[{\frac{-l+q-1+m}{2m} \atop 0}\right](m\tau,z)} \tag{7.2}$$

donde $m=k+2$, η es la función de Dedekind y las definiciones y propiedades de las funciones ϑ pueden ser halladas en [2].

Consideremos las combinaciones $\chi^{\pm}_{l,q}(\tau,z) \equiv \chi_{l,q,s}(\tau,z) \pm \chi_{l,q,s+2}(\tau,z)$ con $s=0,-1$ para NS, R respectivamente. Las siguientes relaciones pueden hallarse fácilmente a partir de la definición

$$\begin{aligned}
\chi^{\pm}_{l,q}(\tau,z+\frac{1}{2}) &= e^{\pi i Q_{l,q}}\chi^{\mp}_{l,q}(\tau,z) \\
\chi^{\pm}_{l,q}(\tau,z+A) &= e^{2\pi i Q_{l,q}A}\chi^{\pm}_{l,q}(\tau,z) \qquad A \in \mathbb{Z} \quad .
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Usando que $mQ_{l,q}$ es un número entero, estas propiedades permiten implementar la proyección GSO sobre el producto de caracteres de cuerdas $N=2$ de la siguiente manera

$$\sum_{p=0}^{2m-1}\frac{(-1)^p}{2m}[\chi_\nu(\tau,z+\frac{p}{2})]^d\prod_{i=1}^{r}\chi_{l_i,q_i}(\tau,z+\frac{p}{2})=\frac{\delta_{Q_{\vec\alpha},\mathbb{Z}}}{2}(1-e^{\pi i Q_{\vec\alpha}})[\chi_\nu(\tau,z)]^d\prod_{i=1}^{r}\chi_{l_i,q_i}(\tau,z)\}\quad . \tag{7.4}$$

Se deduce de esta expresión que las combinaciones de caracteres que sobreviven la proyección GSO son aquellas que verifican que $\sum_{i=1}^{r} Q_{l_i,q_i,s_i}+\sum_{j=1}^{d} Q_j$ es un entero impar.

Es también conveniente expresar los caracteres retorcidos $\chi_{l,q+n}(\tau,z)$ en términos de $\chi_{l,q}(\tau,z)$. Esto puede hacerse haciendo un desplazamiento en z así

$$\chi_{l,q+n}(\tau,z)=e^{2\pi i(n^2\tau\frac{c}{24}+n\frac{c}{6}z)}\chi_{l,q}(\tau,z+\frac{n}{2}\tau)\quad . \tag{7.5}$$

Como se ha mencionado en el texto, es necesario retorcer $n=2(k+2)$ veces para recuperar el carácter original en $n=0$, excepto para $l=\frac{k}{2}$ cuando k es par. En este caso basta retorcer $n=(k+2)$ veces.

Finalmente, las proyecciones GSO y de supersimetría pueden implementarse así

$$\chi^{susy}_{\vec\alpha}(\tau,z)= \tag{7.6}$$
$$\sum_{n,p \bmod 2\mathrm{m}}\frac{(-1)^{n+p}}{2m}e^{2\pi i(n^2\tau\frac{c}{24}+n\frac{c}{6}z)}\left[\chi_0(\tau,z+\frac{n}{2}\tau+\frac{p}{2})\right]^d\prod_{i=1}^{r}\chi_{l_i,q_i}(\tau,z+\frac{n}{2}\tau+\frac{p}{2})$$

con $c=12$.

Estos caracteres supersimétricos pueden partirse de la siguiente manera

$$\chi^{susy}_{\vec\alpha}(\tau,z)=\chi^{NS}_{\vec\alpha}(\tau,z)-\chi^{R}_{\vec\alpha}(\tau,z)\quad , \tag{7.7}$$

donde

$$\chi^{NS}_{\vec\alpha}=\sum_{n=0\ (\mathrm{par})}^{2m-2}\chi_{\vec\alpha^{(n)}}\qquad ,\qquad \chi^{R}_{\vec\alpha}=\sum_{n=1\ (\mathrm{impar})}^{2m-1}\chi_{\vec\alpha^{(n)}}\quad . \tag{7.8}$$

Estos dos bloques contienen estados con pesos y cargas conformes idénticos, por lo que (7.7) implica $\chi^{susy}_{\vec\alpha}(\tau,z)\equiv 0$.

Una descomposición alternativa de los caracteres supersimétricos es la siguiente

$$\chi^{susy}_{\vec\alpha}(\tau,z)=\frac{1}{2}((\chi^{+}_{\vec\alpha}(\tau,z)-\chi^{-}_{\vec\alpha}(\tau,z)) \tag{7.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
\chi^{+}_{\vec\alpha}(\tau,z) &\equiv \chi^{NS^+}_{\vec\alpha}(\tau,z)-\chi^{R^+}_{\vec\alpha}(\tau,z)\\
\chi^{NS^+}_{\vec\alpha}(\tau,z) &= \sum_{n=0\ (\mathrm{par})}^{2m-2}\delta_{Q_{\vec\alpha},\mathbb{Z}}\,[\chi^{NS^+}_{\nu+n}(\tau,z)]^d\prod_{i=1}^{r}\chi^{NS^+}_{\alpha_i+n}(\tau,z).\\
\chi^{R^+}_{\vec\alpha}(\tau,z) &= \sum_{n=1\ (\mathrm{impar})}^{2m-1}\delta_{Q_{\vec\alpha},\mathbb{Z}}\,[\chi^{NS^+}_{\nu+n}(\tau,z)]^d\prod_{i=1}^{r}\chi^{NS^+}_{\alpha_i+n}(\tau,z)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

y

$$\begin{aligned}
\chi^{-}_{\vec{\alpha}}(\tau,z) &\equiv \chi^{NS^-}_{\vec{\alpha}}(\tau,z)-\chi^{R^-}_{\vec{\alpha}}(\tau,z)\\
\chi^{NS^-}_{\vec{\alpha}}(\tau,z) &= \sum_{n=0\ (\text{par})}^{2m-2} \delta_{Q_{\vec{\alpha}},\mathbb{Z}}\, e^{i\pi Q_{\vec{\alpha}^{(n)}}}[\chi^{NS^-}_{\nu+n}(\tau,z)]^d \prod_{i=1}^{r}\chi^{NS^-}_{\alpha_i+n}(\tau,z)\\
\chi^{R^-}_{\vec{\alpha}}(\tau,z) &= \sum_{n=1\ (\text{impar})}^{2m-1} \delta_{Q_{\vec{\alpha}},\mathbb{Z}}\, [\chi^{NS^-}_{\nu+n}(\tau,z)]^d \prod_{i=1}^{r}\chi^{NS^-}_{\alpha_i+n}(\tau,z) \quad .
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Transformaciones modulares de los caracteres supersimétricos

Para estudiar las transformaciones modulares de $\chi^{susy}_{\vec{\alpha}}$ es conveniente introducir la siguiente notación

$$\chi_{l,q;n,p}(\tau,z) \equiv e^{2\pi i(n^2\frac{c}{24}+n\frac{c}{6}(z+\frac{p}{2}))}\chi_{l,q}(\tau,z+\frac{n}{2}\tau+\frac{p}{2}) \tag{7.12}$$

$$\chi_{\nu;n,p}(\tau,z) = e^{2\pi i(n^2\frac{c_{st}}{24}+n\frac{c_{st}}{6}(z+\frac{p}{2}))}\chi_{\nu}(\tau,z+\frac{n}{2}\tau+\frac{p}{2}) \quad . \tag{7.13}$$

De (2.39) se sigue que

$$\chi_{l,q;n,p}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{2\pi i\frac{cnp}{12}}e^{2\pi i\frac{z^2c}{6\tau}}\sum_{l',q'}S_{l,q;l',q'}\chi_{l',q';p,-n}(\tau,z) \tag{7.14}$$

$$\chi_{l,q;n,p}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = e^{2\pi i\frac{cnp}{12}}e^{2\pi i\frac{z^2c}{6\tau}}\sum_{l',q'}S^{-1}_{l,q;l',q'}\chi_{l',q';-p,n}(\tau,-z) \quad . \tag{7.15}$$

La transformación modular S de $\chi^{susy}_{\vec{\alpha}}$ puede obtenerse multiplicando los elementos de matriz $S_{l,q;l',q'}$ de cada teoría individual. Para los caracteres de espaciotiempo, S es la matriz unidad con un factor extra $(-i\tau)^d$.

Notar que S intercambia n y p, por lo que S: $\chi^{NS^+}\longleftrightarrow\chi^{NS^+},\chi^{NS^-}\longleftrightarrow\chi^{R^+}$ y $\chi^{R^-}\longleftrightarrow\chi^{R^-}$. Por otra parte, la invariancia modular implica que no es posible conseguir supersimetría sin la proyección GSO y viceversa.

La transformación modular S actúa sobre el producto de caracteres de la siguiente manera

$$\chi^{NS/R}_{\vec{\alpha}}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = (-i\tau)^{-d}e^{2\pi i\frac{z^2c}{6\tau}}\sum_{\vec{\alpha}'}\left[\prod_{i=1}^{r}S_{(i)}\right]_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'}\chi^{+/-}_{\vec{\alpha}'}(\tau,z) \tag{7.16}$$

$$\chi^{+/-}_{\vec{\alpha}}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) = (-i\tau)^{-d}e^{2\pi i\frac{z^2c}{6\tau}}\sum_{\vec{\alpha}'}\left[\prod_{i=1}^{r}S_{(i)}\right]_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'}\chi^{NS/R}_{\vec{\alpha}'}(\tau,z) \quad . \tag{7.17}$$

La suma sobre $\vec{\alpha}'$ corre sobre todos los vectores con componentes $\alpha_i=(l_i,q_i)$ en rango estándar. Usando la identidad (2.58) y notando que $\left[\prod_{i=1}^{r}S_{(i)}\right]_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'^{(n)}}=\left[\prod_{i=1}^{r}S_{(i)}\right]_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'}$, para todo $\vec{\alpha}$ tal que $Q_{\vec{\alpha}}$ sea un número entero, podemos definir una matriz S que actúa sobre los caracteres independientes $\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}$ de esta manera

$$S_{\vec{\alpha}\vec{\delta}} = \frac{m}{2^{\epsilon_{\vec{\delta}}}} \left[\prod_{i=1}^{r} S_{(i)} \right]_{\vec{\alpha}\vec{\delta}} \tag{7.18}$$

donde $\epsilon_{\vec{\delta}} = 1$ si k_i es par para todo i y $\vec{\delta}$ es corto y $\epsilon_{\vec{\delta}} = 0$ en los demás casos. El rango de S está dado por el número de caracteres independientes.

Esta matriz S *no* es simétrica cuando hay un vector corto. Aplicándola dos veces se obtiene

$$\chi_{\vec{\alpha}}^{NS/R}(\tau, z) = S^2_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'} \chi_{\vec{\alpha}'}^{NS/R}(\tau, -z) \quad , \tag{7.19}$$

la que junto con (2.35) implica $S^2 = C$, con C la matriz de conjugación de carga.

Para la transformación T se puede mostrar que

$$\chi_{\vec{\alpha}}^{NS^\pm}(\tau+1, z) = e^{2\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{c}{24} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})} \chi_{\vec{\alpha}}^{NS^\mp}(\tau, z) \quad ; \quad \chi_{\vec{\alpha}}^{R^\pm}(\tau+1, z) = e^{2\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})} \chi_{\vec{\alpha}}^{R^\pm}(\tau, z) \tag{7.20}$$

y

$$\chi_{\vec{\alpha}}^{NS/R}(\tau+1, z) = e^{2\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})} \chi_{\vec{\alpha}}^{NS/R}(\tau, z) \quad . \tag{7.21}$$

Se puede pensar en la fase $e^{2\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})}$ como un elemento diagonal de la matriz

$$T_{\vec{\alpha}} \equiv e^{2\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})} \delta_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'} \quad . \tag{7.22}$$

Notar que la transformación $\mathsf{T}^{(2)} : \tau \to \tau + 2$ puede realizarse por T^2 así

$$\begin{aligned} \chi_{\vec{\alpha}}^{NS^+/NS^-}(\tau+2, z) &= e^{4\pi i \Delta_{\vec{\alpha}}} \chi_{\vec{\alpha}}^{NS^+/NS^-}(\tau, z) \\ \chi_{\vec{\alpha}}^{R^+/R^-}(\tau+2, z) &= e^{4\pi i \Delta_{\vec{\alpha}}} \chi_{\vec{\alpha}}^{R^+/R^-}(\tau, z) \quad . \end{aligned} \tag{7.23}$$

Los elementos diagonales son las fases $e^{4\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})}$, las que se reducen a $e^{4\pi i \Delta_{\vec{\alpha}}}$ cuando se actúa sobre un carácter no nulo (*i.e.* aquellos con $Q_{\vec{\alpha}}$ entera).

La transformación P

Los caracteres en los canales directo y transverso de la cinta de Möbius están relacionados por la transformación P: $it + \frac{1}{2} \to \frac{i}{4t} + \frac{1}{2}$. Ésta puede generarse a partir de las transformaciones modulares S y T de la siguiente manera

$$\mathsf{P} = \mathsf{TST^2S} \tag{7.24}$$

su cuadrado es la identidad, al igual que el de la transformación S

$$\mathsf{P}^2 = \mathsf{S}^2 = 1 \quad . \tag{7.25}$$

Hay una matriz P que realiza esta transformación sobre los caracteres $\chi_{\vec{\alpha}}^{R/NS}$. En términos de las matrices S y T, P es

$$P = TST^2S^{-1} \quad , \tag{7.26}$$

y se puede mostrar que

$$P = TST^2S^{-1} = TS^{-1}T^2S \quad . \tag{7.27}$$

Esta matriz relaciona caracteres con diferentes argumentos así

$$\chi_{\vec{\alpha}}^{NS/R}(\frac{\tau-1}{2\tau-1}, -\frac{z}{2\tau-1}) = (1-2\tau)^{-d} e^{2\pi i \frac{z^2 c}{3(2\tau-1)}} \sum_{\vec{\alpha}'} P_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'} \chi_{\vec{\alpha}'}^{NS/R}(\tau, z) \quad . \tag{7.28}$$

Es fácil ver la siguiente acción sobre los caracteres

$$\sum_{\vec{\alpha}', \vec{\alpha}''} P_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}''} P_{\vec{\alpha}''\vec{\alpha}'} \chi_{\vec{\alpha}'}^{NS/R}(\tau, z) = \chi_{\vec{\alpha}}^{NS/R}(\tau, -z) \tag{7.29}$$

de modo que

$$\sum_{\vec{\alpha}'} (P^2)_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'} \chi_{\vec{\alpha}'}^{NS/R}(\tau, z) = \chi_{\vec{\alpha}}^{NS/R}(\tau, -z) \tag{7.30}$$

y de (2.35) se puede mostrar que

$$(P^2)_{\vec{\alpha}'\vec{\alpha}} = C_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'} \quad . \tag{7.31}$$

El carácter $\chi_{\vec{\alpha}}(it + \frac{1}{2})$ es una expansión en potencias de $q \equiv e^{-2\pi t}$ multiplicado por una fase $e^{\pi i(\Delta_{\vec{\beta}}^{GSO} - \frac{1}{2})}$. Recordando (2.57), esta fase es igual a $\pm e^{\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})}$ cuyo cuadrado es $T_{\vec{\alpha}}$, por lo que la llamaremos $T_{\vec{\alpha}}^{(\frac{1}{2})}$. Extrayendo esta fase el carácter se vuelve real. Es conveniente trabajar en la base de caracteres reales $\hat{\chi}_{\vec{\alpha}}$ definidos por

$$\hat{\chi}_{\vec{\alpha}^{(n)}}^{R/NS}(it + \tfrac{1}{2}, 0) \equiv e^{-\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})} \chi_{\vec{\alpha}^{(n)}}^{R/NS}(t) \quad . \tag{7.32}$$

La transformación $\hat{\mathsf{P}}$ que conecta las amplitudes *reales* de la cinta de Möbius en los canales directo y transverso la realiza la matriz

$$\hat{P} = T^{(-1/2)} S T^2 S^{-1} T^{(1/2)} \tag{7.33}$$

donde

$$T_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}}^{(1/2)} = e^{\pi i(\Delta_{\vec{\alpha}} - \frac{Q_{\vec{\alpha}}}{2})} \quad . \tag{7.34}$$

Notar que $T_{\vec{\alpha}^{(n)}\vec{\alpha}^{(n)}}^{(1/2)} = \pm T_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}}^{(1/2)}$ por lo que los caracteres reales $\hat{\chi}_{\vec{\alpha}}$ transforman frente a un retorcimiento como $\hat{\chi}_{\vec{\alpha}^{(n)}}(it + \frac{1}{2}) = \pm \hat{\chi}_{\vec{\alpha}}(it + \frac{1}{2})$. *Eligiendo* un $\vec{\alpha}$ tendremos un $T^{(1/2)}$ correspondiente a esta elección.

Finalmente los caracteres en los canales directo y transverso están relacionados por

$$\hat{\chi}_{\vec{\alpha}}^{NS/R}(it + \tfrac{1}{2}) = (2it)^d \hat{P}_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}'} \hat{\chi}_{\vec{\alpha}'}^{NS/R}(\frac{i}{4t} + \tfrac{1}{2}) \quad . \tag{7.35}$$

7.2. Espectro de algunos modelos de Gepner

En este apéndice listamos las combinaciones proyectadas por GSO de los estados contenidos en los caracteres de algunos modelos de Gepner.

En las columnas de espaciotiempo escribimos los pesos de Weyl de las representaciones espinoriales y vectoriales del grupo pequeño. Los estados masivos se juntarán en representaciones del grupo completo. Por ejemplo, los modelos en $D = 8$ tienen a $SO(6)$ como grupo pequeño y a $SO(7)$ como grupo total, y los pesos dados son los de $SO(6)$ (incluso para los estados masivos).

Espectro de estados de 1^3

Las combinaciones proyectadas por GSO de los estados contenidos en los caracteres del modelo de Gepner 1^3 son las de los cuadros siguientes

estado de peso máximo	espaciotiempo	Δ_{st}	Q_{st}	Δ_{int}	Q_{int}	Δ	Q
$(0,0,0)^3$	$\underline{(\pm 1,0,0)}$	$\frac{1}{2}$	± 1	0	0	$\frac{1}{2}$	± 1
$(0,1,1)^3$	$\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 -1
$(1,-1,0)^3$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$(1,1,0)^3$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1
$(0,-1,-1)^3$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 -1

CUADRO B.1: estados proyectados por GSO contenidos en $\chi^{susy}_{(0,0)^3}$

estado de peso máximo	espaciotiempo	Δ_{st}	Q_{st}	Δ_{int}	Q_{int}	Δ	Q
$(0,0,0)(1,-1,2)(1,1,0)$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	-1	$\frac{5}{6}$	-1
$(0,0,0)(1,-1,0)(1,1,2)$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{6}$	1
$(0,0,0)(1,-1,0)(1,1,0)$	$\underline{(\pm 1,0,0)}$	$\frac{1}{2}$	± 1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{6}$	± 1
$(0,1,1)(1,0,-1)(0,-1,-1)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1 -1
$(0,1,1)(1,0,1)(0,-1,-1)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	-1 1
$(1,-1,2)(1,1,0)(0,0,0)$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	-1	$\frac{5}{6}$	-1
$(1,-1,0)(1,1,2)(0,0,0)$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{6}$	1
$(1,-1,0)(1,1,0)(0,0,0)$	$\underline{(\pm 1,0,0)}$	$\frac{1}{2}$	± 1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{6}$	± 1
$(1,0,-1)(0,-1,-1)(0,1,1)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1 -1
$(1,0,1)(0,-1,-1)(0,1,1)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	-1 1
$(1,1,0)(0,0,0)(1,-1,-2)$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	-1	$\frac{5}{6}$	-1
$(1,1,2)(0,0,0)(1,-1,0)$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{6}$	1
$(1,1,0)(0,0,0)(1,-1,0)$	$\underline{(\pm 1,0,0)}$	$\frac{1}{2}$	± 1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{6}$	± 1
$(0,-1,-1)(0,1,1)(1,0,-1)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1 -1
$(0,-1,-1)(0,1,1)(1,0,1)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	-1 1

CUADRO B.2: estados proyectados por GSO contenidos en $\chi^{susy}_{(0,0)(1,-1)(1,1)}$

Espectro de estados de 2^2

Todas las representaciones del modelo minimal $k=2$ se obtienen retorciendo (por supersimetría) los pares $(0,0,0)$; $(0,0,2)$ y $(1,-1,0)$; $(1,-1,2)$, a saber

n	Representación	Δ	Q	n	Representación	Δ	Q
0	$(0,0,0)$	0	0	0	$(0,0,2)\ \sim(2,\pm4,\pm4)$	$\frac{3}{2}$	±1
1	$(0,1,1)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	$(0,1,3)\sim(1,-2,-3)$	$\frac{17}{16}$	$-\frac{3}{4}$
2	$(0,2,2)\sim(2,-2,0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	$(2,-2,-2)$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
3	$(2,-1,1)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	3	$(2,-1,-1)$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{1}{4}$
4	$(2,0,2)^*$	1	±1	4	$(2,0,0)$	$\frac{1}{2}$	0
5	$(2,1,-1)$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{3}{4}$	5	$(2,1,1)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$
6	$(2,2,0)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	6	$(2,2,2)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
7	$(2,3,1)$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{4}$	7	$(2,3,3)$	$\frac{17}{16}$	$\frac{3}{4}$

n	Representación	Δ	Q	n	Representación	Δ	Q
0	$(1,-1,0)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$(1,-1,-2)$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{3}{4}$
1	$(1,0,1)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	1	$(1,0,-1)$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{2}$
2	$(1,1,2)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	2	$(1,1,0)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$
3	$(1,2,3)$	$\frac{17}{16}$	1	3	$(1,2,1)$	$\frac{1}{16}$	0
4	$(1,-1,-2)$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{3}{4}$	4	$(1,-1,0)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
5	$(1,0,-1)$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{2}$	5	$(1,0,1)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$
6	$(1,1,0)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	6	$(1,1,2)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
7	$(1,2,1)$	$\frac{1}{16}$	0	7	$(1,2,3)$	$\frac{17}{16}$	1

CUADRO B.3: Representaciones del modelo minimal $k=2$

De las definiciones de $\chi_{\vec{\alpha}}^{susy}$ se verifican las siguiente identidades entre caracteres

$$
\begin{aligned}
\chi_{(0,0)^2}^{susy} &\equiv \chi_{(2,-2)^2}^{susy} \equiv \chi_{(2,0)^2}^{susy} \equiv \chi_{(2,2)^2}^{susy} \\
\chi_{(0,0)(2,0)}^{susy} &\equiv \chi_{(2,-2)(2,2)}^{susy} \equiv \chi_{(2,0)(0,0)}^{susy} \equiv \chi_{(2,2)(2,-2)}^{susy} \\
\chi_{(1,-1)(1,1)}^{susy} &\equiv \chi_{(1,1)(1,-1)}^{susy}
\end{aligned}
\tag{7.36}
$$

Las combinaciones de estados proyectados por GSO contenidos en el modelo de Gepner 2^2 están dadas en los cuadros siguientes.

Teoría interna	espaciotiempo	Δ_{st}	Q_{st}	Δ_{int}	Q_{int}	Δ	Q
$(0,0,0)^2$	$\underline{(\pm 1,0,0)}$	$\frac{1}{2}$	± 1	0	0	$\frac{1}{2}$	± 1
$(0,1,1)^2$	$\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 -1
$(0,2,2)^2$ $(2,2,0)^2$	$(0,0,0)$ $(0,0,0)$	0 0	0 0	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1 -1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1 -1
$(2,3,1)^2$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1 1

CUADRO B.4: estados proyectados por GSO contenidos en $\chi^{susy}_{(0,0)^2}$

Teoría interna	espaciotiempo	Δ_{st}	Q_{st}	Δ_{int}	Q_{int}	Δ	Q
$(0,0,0)(2,0,0)$	$\underline{(\pm 1,0,0)}$	$\frac{1}{2}$	± 1	$\frac{1}{2}$	0	1	± 1
$(0,0,0)(2,0,2)$	$(0,0,0)$	0	0	1	± 1	1	± 1
$(0,1,1)(2,1,1)$	$\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	1	1 -1
$(0,1,1)(2,1,-1)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1 1
$(0,2,2)(2,2,0)$	$\underline{(\pm 1,0,0)}$	$\frac{1}{2}$	± 1	$\frac{1}{2}$	0	1	± 1
$(0,2,2)(2,2,2)$	$(0,0,0)$	0	0	1	1	1	1
$(2,-2,-2)(2,2,0)$	$(0,0,0)$	0	0	1	-1	1	-1
$(2,-1,-1)(2,3,1)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1 1
$(2,-1,1)(2,3,1)$	$\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	1	1 -1

CUADRO B.5: estados proyectados por GSO contenidos en $\chi^{susy}_{(1,-1)(1,1)}$

Teoría interna	espaciotiempo	Δ_{st}	Q_{st}	Δ_{int}	Q_{int}	Δ	Q
$(1,-1,0)(1,1,0)$	$\underline{(\pm 1,0,0)}$	$\frac{1}{2}$	± 1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	± 1
$(1,-1,2)(1,1,0)$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	1
$(1,-1,0)(1,1,2)$	$(0,0,0)$	0	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	1
$(1,0,1)(1,2,1)$	$\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1 -1
$(1,0,-1)(1,2,1)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\underline{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-1 1

CUADRO B.6: estados proyectados por GSO contenidos en $\chi^{susy}_{(0,0);(2,0)}$

Espectro de estados del 4 1

Los estados del modelo minimal $k=4$ están listados en los cuadros siguientes

n	Representación	Δ	Q	n	Representación	Δ	Q
0	$(0,0,0)$	0	0	0	$(0,0,2)\ \sim(4,\pm 6,\pm 4)$	$\frac{3}{2}$	± 1
1	$(0,1,1)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	1	$(4,-5,-3)$	$\frac{13}{12}$	$-\frac{2}{3}$
2	$(0,2,2)\sim(4,-4,0)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	$(4,-4,-2)$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$
3	$(4,-3,1)$	$\frac{3}{4}$	1	3	$(4,-3,-1)$	$\frac{3}{4}$	0
4	$(4,-2,2)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	4	$(4,-2,0)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$
5	$(4,-1,-1)$	$\frac{13}{12}$	$-\frac{1}{3}$	5	$(4,-1,1)$	$\frac{13}{12}$	$\frac{2}{3}$
6	$(4,0,0)$	1	0	6	$(4,0,\pm 2)$	$\frac{3}{2}$	± 1
7	$(4,1,1)$	$\frac{13}{12}$	$\frac{1}{3}$	7	$(4,1,-1)$	$\frac{13}{12}$	$-\frac{2}{3}$
8	$(4,2,2)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	8	$(4,2,0)$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$
9	$(4,3,-1)$	$\frac{3}{4}$	-1	9	$(4,3,1)$	$\frac{3}{4}$	0
10	$(4,4,0)$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	10	$(4,4,2)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$
11	$(4,5,1)$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$	11	$(4,5,3)$	$\frac{13}{12}$	$\frac{2}{3}$

n	Representación	Δ	Q	n	Representación	Δ	Q
0	$(2,0,0)$	$\frac{1}{3}$	0	0	$(2,0,\pm2)$	$\frac{5}{6}$	±1
1	$(2,1,1)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	1	$(2,1,-1)$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{2}{3}$
2	$(2,2,2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	$(2,2,0)$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
3	$(2,\pm3,\pm3)$	$\frac{13}{12}$	±1	3	$(2,3,1)$	$\frac{1}{12}$	0
4	$(2,-2,-2)$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	4	$(2,4,2)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
5	$(2,-1,-1)$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{3}$	5	$(2,-1,1)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$

CUADRO B.7: Representaciones en el modelo minimal $k=4$

Espectro de estados del 1^6

Teoría interna	espaciotiempo	Δ_{st}	Q_{st}	Δ_{int}	Q_{int}	Δ	Q
$(0,0,0)^6$	$\underline{(\pm1,0)}$	$\frac{1}{2}$	±1	0	0	$\frac{1}{2}$	±1
$(0,1,1)^6$	$\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$(0,-1,-1)^6$	$\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1

CUADRO B.8: estados proyectados por GSO contenidos en $\chi^{susy}_{(0,0)^6}$

Teoría interna	espaciotiempo	Δ_{st}	Q_{st}	Δ_{int}	Q_{int}	Δ	Q
$(0,0,0)^4(1,-1,2)(1,1,0)$	$(0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	-1	$\frac{5}{6}$	-1
$(0,0,0)^4(1,-1,0)(1,1,2)$	$(0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{6}$	1
$(0,0,0)^4(1,-1,0)(1,1,0)$	$\underline{(\pm1,0)}$	$\frac{1}{2}$	±1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{6}$	±1
$(1,-1,0)^4(1,1,0)(0,0,0)$	$(0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{6}$	1
$(1,1,0)^4(0,0,0)(1,-1,0)$	$(0,0)$	0	0	$\frac{5}{6}$	-1	$\frac{5}{6}$	-1
$(0,1,1)^4(1,0,-1)(1,-1,-1)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{7}{12}$	0	$\frac{5}{6}$	1
$(0,1,1)^4(1,0,1)(1,-1,-1)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{7}{12}$	0	$\frac{5}{6}$	-1
$(0,1,1)^4(1,0,1)(1,-1,-1)$	$\underline{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{12}$	1	$\frac{5}{6}$	1
$(0,-1,-1)^4(0,1,1)(1,0,1)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{7}{12}$	0	$\frac{5}{6}$	1
$(0,-1,-1)^4(0,1,1)(1,0,1)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{7}{12}$	0	$\frac{5}{6}$	-1
$(0,-1,-1)^4(0,1,1)(1,0,-1)$	$\underline{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{12}$	-1	$\frac{5}{6}$	-1

CUADRO B.9: estados proyectados por GSO contenidos en $\chi^{susy}_{(0,0)^4(1,-1)(1,1)}$

Teoría interna	espaciotiempo	Δ_{st}	Q_{st}	Δ_{int}	Q_{int}	Δ	Q
$(0,0,0)^3(1,-1,0)^3$	$(0,0)$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$(1,1,0)^3(0,0,0)^3$	$(0,0)$	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1
$(0,-1,-1)^3(0,1,1)^3$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	$+1$ -1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$+1$ -1

CUADRO B.10: estados proyectados por GSO contenidos en $\chi^{susy}_{(0,0)^3(1,-1)^3}$

Espectro de estados del 3^5

Los estados en el modelo $k = 3$ pueden clasificarse en dos grupos: los que tienen $l = 0, 3$ y los que tienen $l = 1, 2$. A saber

Representación	Δ	Q	Representación	Δ	Q
$(0,0,0)$	0	0	$(0,0,2)$	$\frac{3}{2}$	± 1
$(3,-3,0)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$(3,-3,-2)$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$
$(3,-1,\pm 2)$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{4}{5},\frac{6}{5}$	$(3,-1,0)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$
$(3,1,0)$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$(3,1,\pm 2)$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5},-\frac{6}{5}$
$(3,3,2)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$(3,3,0)$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$

Representación	Δ	Q	Representación	Δ	Q
$(1,-1,0)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$(1,-1,-2)$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$
$(1,1,2)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$(1,1,0)$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$
$(2,-2,2)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{5}$	$(2,-2,0)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$(2,0,\pm 2)$	$\frac{9}{10}$	± 1	$(2,0,0)$	$\frac{2}{5}$	0
$(2,2,0)$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$(2,2,2)$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{7}{5}$

CUADRO B.11: Representaciones modelo minimal $k = 3$

donde ambos grupos contienen también los estados que se obtienen retorciendo los anteriores.

Es útil listar las combinaciones proyectadas por GSO con peso conforme $\frac{1}{2}$ en el sector NS. Son las siguientes

Teoría interna	espaciotiempo	Carácter
$(0,0,0)^5$	± 1	$\chi_{(0,0)^5}$
$(0,0,0)^3(3,-3,0)(2,-2,0)$	0	$\chi_{(0,0)^3(3,-3)(2,-2)}$
$(0,0,0)^2(3,-3,0)(1,-1,0)^2$	0	$\chi_{(0,0)^2(3,-3)(1,-1)^2}$
$(1,1,0)^5$	0	$\chi_{(2,0)^5}$
$(0,0,0)(1,-1,0)^3(2,-2,0)$	0	$\chi_{(0,0)(1,-1)^3(2,-2)}$
$(0,0,0)^2(1,-1,0)(2,-2,0)^2$	0	$\chi_{(0,0)^2(1,-1)(2,-2)^2}$

CUADRO B.12: estados proyectados por GSO con peso conforme $\frac{1}{2}$ y sus conjugadas de carga.

7.3. Invariante modular para $SU(6)_8$

Cuadro 7.1: Invariante modular para $SU(6)$ a nivel 8 a partir del *embedding* conforme en $SO(21)$ a nivel 1. [a]

$$
\begin{aligned}
C(5,8) \quad = \quad & |\chi_{00000} + \chi_{20002} + \chi_{21012} + \chi_{03030} + \chi_{03103} + \\
& \chi_{30130} + \chi_{30203} + \chi_{12221} + \chi_{02420} + \chi_{00800}|^2 + \\
& |\chi_{00024} + \chi_{01301} + \chi_{02030} + \chi_{10122} + \chi_{00008} + \\
& \chi_{31031} + \chi_{22210} + \chi_{30302} + \chi_{24200} + \chi_{08000}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{00002} + \chi_{20012} + \chi_{21030} + \chi_{21103} + \chi_{03121} + \chi_{30221} + \chi_{12320} + \chi_{02600} + \chi_{04004}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{00012} + \chi_{20030} + \chi_{20103} + \chi_{22004} + \chi_{30320} + \chi_{03220} + \chi_{04022} + \chi_{12500} + \chi_{21121}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{40012} + \chi_{30100} + \chi_{12102} + \chi_{03000} + \chi_{12140} + \chi_{02212} + \chi_{00430} + \chi_{00503} + \chi_{22022}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{00121} + \chi_{01004} + \chi_{21022} + \chi_{30005} + \chi_{21400} + \chi_{22121} + \chi_{04301} + \chi_{05030} + \chi_{20220}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{00220} + \chi_{01022} + \chi_{10005} + \chi_{20400} + \chi_{30023} + \chi_{22301} + \chi_{23030} + \chi_{05210} + \chi_{21121}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{60000} + \chi_{32001} + \chi_{22103} + \chi_{12110} + \chi_{10312} + \chi_{03022} + \chi_{01232} + \chi_{00260} + \chi_{00400}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{00123} + \chi_{02210} + \chi_{10302} + \chi_{11031} + \chi_{00026} + \chi_{23200} + \chi_{31211} + \chi_{26000} + \chi_{40040}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{40220} + \chi_{32201} + \chi_{25000} + \chi_{20040} + \chi_{03200} + \chi_{01032} + \chi_{00303} + \chi_{00125} + \chi_{11211}|^2 + |cr|^2 + \\
& |\chi_{00050} + \chi_{21210} + \chi_{14001} + \chi_{10221} + \chi_{43010} + \chi_{10043} + \chi_{01214} + \chi_{50300} + \chi_{02202}|^2 + |cr|^2
\end{aligned}
$$

[a] $|cr|$ denota sumar la representación conjugada

7.4. Polinomios de Poincaré

Cuadro 7.2: Polinomios de Poincaré para los modelos $\mathbb{CP}_1$ y $\mathbb{CP}_2$ con invariantes serie

Modelo	Polinomio de Poincaré	
$(1,k)D,F$	$P(t\bar{t})=\sum_{i=0}^{k/2}(t\bar{t})^{2i}+(t\bar{t})^{k/2}$	$k\in 2\mathbb{N}$
$(2,k)DA$	$P(t\bar{t})=\sum_{n=0}^{\frac{k}{3}-1}(\left[\frac{3n}{2}\right]+1)[(t\bar{t})^{3n}+(t\bar{t})^{2k-3n}]+(\left[\frac{k}{2}\right]+3)(t\bar{t})^{k}$	$k\in 3\mathbb{N}$
$(2,k)AD$	$P(t\bar{t})=\sum_{n=0}^{\frac{k-1}{2}}(n+1)[(t\bar{t})^{n}+(t\bar{t})^{k-n}]+\sum_{n=\frac{k+1}{4}}^{\frac{3k-1}{4}}(t\bar{t})^{n}$	$k=4j-1, j\in\mathbb{N}$
$(2,k)AF$	$P(t\bar{t})=\sum_{n=0}^{\frac{k-1}{2}}(n+1)[(t\bar{t})^{2n}+(t\bar{t})^{2k-2n}]+\sum_{n=\frac{k-1}{4}}^{\frac{3k+1}{4}}(t\bar{t})^{2n+1}$	$k=4j+1, j\in\mathbb{N}_0$
$(2,k)DD$	$P(t,\bar{t})=\sum_{n=0}^{\frac{k-3}{6}}(3n+1)[(t\bar{t})^{n}+(t\bar{t})^{k/3-n}]+$	$k=4j-1=3j'$
	$\sum_{n=\frac{k+9}{12}}^{\frac{3k-9}{12}}(t\bar{t})^{n}+t^{\frac{k-3}{12}}\bar{t}^{\frac{3k+3}{12}}+t^{\frac{3k+3}{12}}\bar{t}^{\frac{k-3}{12}}$	$j,j'\in\mathbb{N}$
$(2,k)DF$	$P(t,\bar{t})=\sum_{n=0}^{\frac{k-3}{6}}(3n+1)[(t\bar{t})^{2n}+(t\bar{t})^{2k/3-2n}]+$	$k=4j+1=3j'$
	$\sum_{n=\frac{k+3}{12}}^{\frac{3k-15}{12}}[(t\bar{t})^{2n+1}]+t^{\frac{k-3}{6}}\bar{t}^{\frac{3k+3}{6}}+t^{\frac{3k+3}{6}}\bar{t}^{\frac{k-3}{6}}$	$j,j'\in\mathbb{N}$

[.] denota la parte entera.

Cuadro 7.3: Polinomios de Poincaré para modelos de clases laterales con $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ excepcionales

Modelo	Polinomio de Poincaré
$(2,9)CE$, $(3,4)CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + t^2 + t\bar{t} + t\bar{t}^3 + \bar{t}^2 + (t\bar{t})^2 + t^3\bar{t} + (t\bar{t})^3$
$(2,9)EE$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + t\bar{t} + 5(t\bar{t})^2 + 4(t\bar{t})^3 + 5(t\bar{t})^4 + (t\bar{t})^5 + (t\bar{t})^6$
$(3,8)CC$, $(4,5)CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + 2t + t^2 + 2\bar{t} + 4t\bar{t} + 2t^2\bar{t} + \bar{t}^2 + 2t\bar{t}^2 + (t\bar{t})^2$
$(3,8)CE$, EC, EE, $(4,5)EC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + t^2 + 20t\bar{t} + \bar{t}^2 + (t\bar{t})^2$
$(4,7)CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + 2(t\bar{t})^2 + (t\bar{t})^3 + (t\bar{t})^4 + 2(t\bar{t})^5 + (t\bar{t})^7 +$ $+ t^3 + \bar{t}^3 + 2t^2\bar{t}^5 + 2t^5\bar{t}^2 + t^4\bar{t}^7 + t^7\bar{t}^4$
$(4,7)CE$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + 4(t\bar{t})^2 + t^2\bar{t}^5 + 8(t\bar{t})^3 + 8(t\bar{t})^4 + t^5\bar{t}^2 + 4(t\bar{t})^5 + (t\bar{t})^7$
$(5,6)CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + 2t^2 + t^4 + t\bar{t} + 2t\bar{t}^3 + t\bar{t}^5 + 2\bar{t}^2 + 4(t\bar{t})^2 + 2t^2\bar{t}^4 +$ $+ 2t^3\bar{t} + 4(t\bar{t})^3 + 2t^3\bar{t}^5 + \bar{t}^4 + 2t^4\bar{t}^2 + (t\bar{t})^4 + t^5\bar{t} + 2t^5\bar{t}^3 + (t\bar{t})^5$
$(5,6)\tilde{C}C$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + t^2 + t\bar{t} + t\bar{t}^3 + \bar{t}^2 + 2(t\bar{t})^2 + t^2\bar{t}^4 + t^3\bar{t} +$ $+ 2(t\bar{t})^3 + t^3\bar{t}^5 + t^4\bar{t}^2 + (t\bar{t})^4 + t^5\bar{t}^3 + (t\bar{t})^5$
$(6,7)CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = 1 + 3t + 3t^2 + t^3 + 3\bar{t} + 9t\bar{t} + 9t\bar{t}^2 + 3t\bar{t}^3 + 3\bar{t}^2 + 9t^2\bar{t} +$ $+ 9(t\bar{t})^2 + 3t^2\bar{t}^3 + \bar{t}^3 + 3t^3\bar{t} + 3t^3\bar{t}^2 + (t\bar{t})^3$

Cuadro 7.4: Modelos con polinomios de Poincaré que se anulan en $t = e^{2i\pi x/D + i\pi/D}$; $\bar{t} = e^{-i\pi/D}$

Modelo	Polinomio de Poincaré
(2,3)DD	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = (1+t)(1+\bar{t})$
(2,9)CE, (3,4)CC	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = (1+t^2)(1+\bar{t}^2)(1+t\bar{t})$
(3,8)CC, (4,5)CC	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = (1+t)^2(1+\bar{t})^2$
(5,6)CC	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = (1+t^2)^2(1+\bar{t}^2)^2(1+t\bar{t})$
(5,6)$\tilde{C}$C	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = (1+t^2)(1+\bar{t}^2)(1+t\bar{t})(1+t^2\bar{t}^2)$
(6,7)CC	$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = (1+t)^3(1+\bar{t})^3$

7.5. Modelos con número de generaciones pequeño

Cuadro 7.5: Modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$ con $0 < N_{gen} < 12$.

Modelo	$N_{\mathbf{27}}$	$N_{\overline{\mathbf{27}}}$	N_{gen}
(2,9)EF (1,3)A (1,18)A	25	21	4
(2,9)DF (2,9)AA	28	22	6
(2,9)DA (2,9)AF	28	22	6
(2,9)DF (2,9)DA	28	22	6
(2,9)DF (1,4)A (1,10)A	28	22	6
(3,4)FC (1,6)A (1,6)A	29	21	8
(3,4)FC (1,6)F (1,6)F	29	21	8
(3,4)D_2C (3,4)AC	27	19	8
(3,4)FC (3,4)AC	19	27	8
(3,4)D_2C (3,4)D_2C	27	19	8
(3,4)FC (3,4)D_2C	19	27	8
(3,4)FC (3,4)FC	27	19	8
(3,4)AC (2,9)EF	24	16	8
(3,4)D_2C (2,9)EF	24	16	8
(3,4)FC (2,9)EA	24	16	8
(6,7)AC	16	8	8
(6,7)DC	16	8	8

7.6. Ayudas para el cálculo del carácter de $\mathbb{CP}_2$

En este apéndice resumimos algunos pasos útiles para calcular los caracteres usando [95]. Allí el carácter de $\mathbb{CP}_2$=$SU(3)_k/(SU(2)_{k+1}\times U(1))$ se descompone de acuerdo a

$$\frac{SU(3)_k\times SU(2)_1\times U(1)}{SU(2)_{k+1}\times U(1)}=\frac{SU(3)_k}{SU(2)_k\times U(1)}\times\frac{SU(2)_k\times SU(2)_1}{SU(2)_{k+1}}\times U(1)$$

Las fórmulas para las representaciones de los modelos minimales del segundo factor han sido construidas en [98]. El carácter para un estado con carga m de la teoría $U(1)$ está dado por la siguiente función theta de $SU(2)_k$

$$\theta_{m,k}(x,y)=\sum_{n\in Z}x^{k\ (n+m/k)^2}y^{k\ (n+m/k)/2}\qquad .$$

El carácter para el estado $|\Lambda,\lambda=l\ \hat{w}_1+\frac{w_2}{2}q,\tilde{\Lambda}=0\rangle$ es [95]:

$$\chi^{\Lambda}_{l,q}(x,y)=\sum_{\substack{l'=0,\ldots,k\\ m=-5,\ldots,6}}b^{\Lambda}_{l',m}(x)\ \chi_{l,l'}(x)\ \theta_{(k+3)\frac{m-q}{6}+\frac{q}{2};k(k+3)}(x,y)$$

donde $\mathrm{b}^{\Lambda}_{l,q}$ son las *branching functions* que se pueden obtener de [95] así

$$\begin{aligned} b^{\Lambda}_{l,q} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{-n})^{-5}\sum_{\substack{\sigma\in W\\ l_1,l_2\in\mathbb{Z}\\ s_1,s_2=0,\ldots,\infty}}(-1)^{s1+s2}\epsilon(\sigma)\times\\ &\times\ x^{\frac{1}{2(k+3)}\{[\sigma(\Lambda+\rho)+(k+3)[(l_1+\frac{2}{3}s_2-\frac{1}{3}s_1)\alpha_1+(l_2+\frac{1}{3}s_2+\frac{1}{3}s_1)\alpha_2]]^2-2\}}\\ &\times\ x^{-\frac{1}{12k}[q+k(s_1+s_2)]^2-\frac{1}{4(k+2)}\{[l+1+(k+2)(s_2-s_1)]^2-1\}}\end{aligned}$$

donde $x=e^{2i\pi\tau}$, $\rho=\alpha_1+\alpha_2$ y α_1,α_2 (y $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$) denotan las raíces de $SU(3)$ con $\alpha_i^2=2$. Se toma la normalización usual $2\frac{\alpha_i\omega_j}{\alpha_i^2}=\delta_{ij}$ para los pesos. W es el grupo de Weyl de $SU(3)$. Notar que la suma *no está* bien definida, porque depende del orden de los términos, las sumas sobre s_i deben realizarse *antes* que las sumas sobre l_i para obtener las *branching functions* correctas. Al hacerlo así, algunos términos se cancelan entre sí si $p_i>0$ debido a la identidad [95]

$$\sum_{s=0}^{2p-1}(-1)^s x^{\frac{1}{2}(s-(p-\frac{1}{2}))^2-\frac{1}{2}(p-\frac{1}{2})^2}=0$$

y la suma sobre s_i para l_i fijo puede reescribirse como

$$\sum_{s=2p}^{\infty}(-1)^s x^{\frac{1}{2}(s-(p-\frac{1}{2}))^2-\frac{1}{2}(p-\frac{1}{2})^2}=-\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{-(s+1)}x^{\frac{1}{2}(-(s+1)-(p-\frac{1}{2}))^2-\frac{1}{2}(p-\frac{1}{2})^2}$$

como puede verse haciendo el reemplazo $s \to -(s+1)$ y un cambio global de signo. Las siguientes condiciones son equivalentes a $p > 0$ para la suma sobre s_i

$$
\begin{array}{ll}
s_1: & \frac{1}{3}(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \sigma(\Lambda + \rho) + (k+3)(l_2 - l_1) + \frac{l+1}{2} - \frac{q}{6} < 0 \\
s_2: & \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \sigma(\Lambda + \rho) + (k+3)\; l_1 - \frac{l+1}{2} - \frac{q}{6} < 0
\end{array}
$$

Bibliografía

[1] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 1: Introduction", Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).
M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology", Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[2] J. Polchinski, "String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string", Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p.
J. Polchinski, "String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond", Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p.

[3] B. Zwiebach, "A first course in string theory", Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 558 p.

[4] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Nucl. Phys. B **258** (1985) 46;
D. Friedan, A. Kent, S. Shenker and E. Witten, sin publicar;
A. Sen, Nucl. Phys. B **278** (1986) 289;
A. Sen, Nucl. Phys. B **284** (1987) 423;

[5] T. Banks, L. J. Dixon, D. Friedan and E. J. Martinec, Nucl. Phys. B **299** (1988) 613.

[6] Algunas reseñas de fenomenología de cuerdas con referencias a la literatura original son
F. Quevedo, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **62** (1998) 134 [arXiv:hep-ph/9707434];
F. Quevedo, arXiv:hep-th/9603074;
K. R. Dienes, arXiv:hep-ph/0004129;

K. R. Dienes, Phys. Rept. **287** (1997) 447 [arXiv:hep-th/9602045];
J. D. Lykken, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **52A** (1997) 271 [arXiv:hep-th/9607144];
M. Dine, arXiv:hep-th/0003175;
G. Aldazabal, arXiv:hep-th/9507162.
L. E. Ibáñez, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 1117 [arXiv:hep-ph/9911499];
L. E. Ibanez, arXiv:hep-ph/9804236;
L. E. Ibáñez, arXiv:hep-th/9505098;
Z. Kakushadze and S. H. H. Tye, arXiv:hep-th/9512155;
I. Antoniadis, arXiv:hep-th/0102202;
E. Dudas, Class. Quant. Grav. **17** (2000) R41 [arXiv:hep-ph/0006190];
D. Bailin, G. V. Kraniotis and A. Love, arXiv:hep-th/0108127.

[7] C. Angelantonj and A. Sagnotti, Phys. Rept. **371**, (2002) 1 [Erratum-ibid. **376**, (2003) 339] [arXiv:hep-th/0204089].

[8] D. Gepner, Nucl. Phys. B **296** (1988) 757;
D. Gepner, *Lectures on* $N = 2$ *strings*, Proceedings of the Trieste Spring School 1989, M. Green et al. (eds.), Singapore: World Scientific 1990.

[9] G. Aldazabal, L. E. Ibáñez, F. Quevedo and A. M. Uranga, JHEP **0008**, (2000) 002 [arXiv:hep-th/0005067].

[10] C. Bachas, arXiv:hep-th/9503030;
R. Blumenhagen, L. Goerlich, B. Kors and D. Lust, JHEP **0010** (2000) 006 [arXiv:hep-th/0007024];
R. Blumenhagen, B. Kors and D. Lust, JHEP **0102** (2001) 030 [arXiv:hep-th/0012156];
M. Berkooz, M. R. Douglas and R. G. Leigh, Nucl. Phys. B **480** (1996) 265 [arXiv:hep-th/9606139];
G. Aldazabal, S. Franco, L. E. Ibáñez, R. Rabadán and A. M. Uranga, JHEP **0102** (2001) 047 [arXiv:hep-ph/0011132];
A. M. Uranga, Class. Quant. Grav. **20** (2003) S373 [arXiv:hep-th/0301032];
C. Angelantonj, I. Antoniadis, E. Dudas and A. Sagnotti, Phys. Lett. B **489** (2000) 223 [arXiv:hep-th/0007090].
A. M. Uranga, Class. Quant. Grav. **20** (2003) S373 [arXiv:hep-th/0301032];
L. E. Ibáñez, F. Marchesano and R. Rabadán, JHEP **0111** (2001) 002 [arXiv:hep-th/0105155];

S. Forste, G. Honecker and R. Schreyer, JHEP **0106** (2001) 004 [arXiv:hep-th/0105208];
M. Cvetic, G. Shiu and A. M. Uranga, Nucl. Phys. B **615** (2001) 3 [arXiv:hep-th/0107166];
M. Cvetic, G. Shiu and A. M. Uranga, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 201801 [arXiv:hep-th/0107143].

[11] R. Blumenhagen, V. Braun, B. Kors and D. Lust, JHEP **0207** (2002) 026 [arXiv:hep-th/0206038].

[12] J. Fuchs, L. R. Huiszoon, A. N. Schellekens, C. Schweigert and J. Walcher, Phys. Lett. B **495** (2000) 427 [arXiv:hep-th/0007174].

[13] L. R. Huiszoon, K. Schalm and A. N. Schellekens, Nucl. Phys. B **624** (2002) 219 [arXiv:hep-th/0110267].

[14] J. M. Maldacena, G. W. Moore and N. Seiberg, JHEP **0107** (2001) 046 [arXiv:hep-th/0105038].

[15] C. Angelantonj, M. Bianchi, G. Pradisi, A. Sagnotti and Y. S. Stanev, Phys. Lett. B **387** (1996) 743 [arXiv:hep-th/9607229].

[16] R. Blumenhagen and A. Wisskirchen, Phys. Lett. B **438** (1998) 52 [arXiv:hep-th/9806131].

[17] A. Recknagel and V. Schomerus, Nucl. Phys. B **531** (1998) 185 [arXiv:hep-th/9712186].

[18] A. Recknagel, JHEP **0304** (2003) 041 [arXiv:hep-th/0208119].

[19] M. Gutperle and Y. Satoh, Nucl. Phys. B **543** (1999) 73 [arXiv:hep-th/9808080].

[20] I. Brunner and K. Hori, JHEP **0407** (2004) 023 [arXiv:hep-th/0208141];
I. Brunner and K. Hori, JHEP **0411** (2004) 005 [arXiv:hep-th/0303135].

[21] S. Govindarajan and J. Majumder, JHEP **0402** (2004) 026 [arXiv:hep-th/0306257].

[22] D. Fioravanti, G. Pradisi and A. Sagnotti, Phys. Lett. B **321** (1994) 349 [arXiv:hep-th/9311183].

[23] G. Pradisi, A. Sagnotti and Y. S. Stanev, Phys. Lett. B **354** (1995) 279 [arXiv:hep-th/9503207];
G. Pradisi, A. Sagnotti and Y. S. Stanev, Phys. Lett. B **356** (1995) 230 [arXiv:hep-th/9506014];
G. Pradisi, A. Sagnotti and Y. S. Stanev, Phys. Lett. B **381** (1996) 97 [arXiv:hep-th/9603097].

[24] W. Fischler and L. Susskind, Phys. Lett. B **171** (1986) 383;
W. Fischler and L. Susskind, Phys. Lett. B **173** (1986) 262.

[25] E. Dudas and J. Mourad, Phys. Lett. B **486** (2000) 172 [arXiv:hep-th/0004165].

[26] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724 [arXiv:hep-th/9510017].

[27] E. G. Gimon and J. Polchinski, Phys. Rev. D **54** (1996) 1667 [arXiv:hep-th/9601038].

[28] J. Polchinski, S. Chaudhuri and C. V. Johnson, arXiv:hep-th/9602052.

[29] M. Bianchi and A. Sagnotti, Phys. Lett. B **247** (1990) 517.

[30] M. Bianchi and A. Sagnotti, Nucl. Phys. B **361** (1991) 519.

[31] A. Sagnotti, arXiv:hep-th/0208020.

[32] M. Bianchi, G. Pradisi and A. Sagnotti, Nucl. Phys. B **376** (1992) 365.

[33] E. Witten, JHEP **9802** (1998) 006 [arXiv:hep-th/9712028].

[34] J. Park, Phys. Lett. B **418** (1998) 91 [arXiv:hep-th/9611119].

[35] C. Angelantonj and R. Blumenhagen, Phys. Lett. B **473** (2000) 86 [arXiv:hep-th/9911190].

[36] J. A. Strathdee, Int. J. Mod. Phys. A **2** (1987) 273.

[37] J. L. Cardy, Nucl. Phys. B **324** (1989) 581.

[38] E. P. Verlinde, Nucl. Phys. B **300** (1988) 360.

[39] A. Abdurrahman, F. Anton, M. A. Namazie and C. Núñez, Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995) 3985;
P. Minces, M. A. Namazie and C. Núñez, Phys. Lett. B **422** (1998) 117 [arXiv:hep-th/9801035].

[40] M. Wakimoto, arXiv:hep-th/9807144.

[41] R. I. Nepomechie, J. Phys. A **34** (2001) 6509 [arXiv:hep-th/0102010].

[42] P. Bantay, Nucl. Phys. B **633** (2002) 365 [arXiv:hep-th/9910079];
P. Bantay, arXiv:hep-th/0007164.

[43] E. G. Gimon and C. V. Johnson, Nucl. Phys. B **477** (1996) 715 [arXiv:hep-th/9604129].

[44] A. Dabholkar and J. Park, Nucl. Phys. B **477** (1996) 701 [arXiv:hep-th/9604178].

[45] J. Fuchs and A. Klemm, Annals Phys. **194** (1989) 303;
J. Fuchs, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1705.

[46] M. Bianchi, Nucl. Phys. B **528** (1998) 73 [arXiv:hep-th/9711201].

[47] A. M. Uranga, Nucl. Phys. B **598** (2001) 225 [arXiv:hep-th/0011048].

[48] D. Gepner and Z. a. Qiu, Nucl. Phys. B **285** (1987) 423.

[49] A. Klemm and M. G. Schmidt, Phys. Lett. B **245** (1990) 53.

[50] J. Fuchs, A. Klemm and M. G. Schmidt, Annals Phys. **214** (1992) 221.

[51] G. Aldazabal, I. Allekotte, E. Andrés and C. Núñez, Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995) 3283 [arXiv:hep-th/9409184].

[52] A. Font, L. E. Ibáñez, M. Mondragón, F. Quevedo and G. G. Ross, Phys. Lett. B **227** (1989) 34.

[53] L. R. Huiszoon, A. N. Schellekens and N. Sousa, Nucl. Phys. B **575** (2000) 401 [arXiv:hep-th/9911229].

[54] Y. Kazama and H. Suzuki, Nucl. Phys. B **321** (1989) 232.

[55] V. K. Dobrev, Phys. Lett. B **186** (1987) 43.

[56] Y. Matsuo, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 793.

[57] E. Kiritsis, Int. J. Mod. Phys. A **3** (1988) 1871.

[58] T. Jayaraman, M. A. Namazie, K. S. Narain, C. Núñez and M. H. Sarmadi, Nucl. Phys. B **336** (1990) 610.

[59] G. Aldazabal, I. Allekotte, M. Bonini and C. Núñez, Phys. Lett. B **251** (1990) 254.

[60] D. Gepner, arXiv:hep-th/9301089.

[61] M. R. Douglas and G. W. Moore, arXiv:hep-th/9603167;
Z. Kakushadze, Nucl. Phys. B **512** (1998) 221 [arXiv:hep-th/9704059];
Z. Kakushadze and G. Shiu, Phys. Rev. D **56** (1997) 3686 [arXiv:hep-th/9705163];
C. Angelantonj, M. Bianchi, G. Pradisi, A. Sagnotti and Y. S. Stanev, Phys. Lett. B **385** (1996) 96 [arXiv:hep-th/9606169];
L. F. Alday and G. Aldazabal, JHEP **0205** (2002) 022 [arXiv:hep-th/0203129].

[62] G. Aldazabal, A. Font, L. E. Ibáñez and G. Violero, Nucl. Phys. B **536** (1998) 29 [arXiv:hep-th/9804026].

[63] M. R. Douglas, S. Govindarajan, T. Jayaraman and A. Tomasiello, Commun. Math. Phys. **248** (2004) 85 [arXiv:hep-th/0203173].

[64] S. Mizoguchi and T. Tani, Nucl. Phys. B **611** (2001) 253 [arXiv:hep-th/0105174].

[65] G. Aldazabal, E. C. Andrés, M. Leston and C. Núñez, JHEP **0309** (2003) 067 [arXiv:hep-th/0307183].

[66] R. Blumenhagen, JHEP **0311** (2003) 055 [arXiv:hep-th/0310244].

[67] R. Blumenhagen and T. Weigand, JHEP **0402** (2004) 041 [arXiv:hep-th/0401148].

[68] I. Brunner, K. Hori, K. Hosomichi and J. Walcher, arXiv:hep-th/0401137.

[69] T. P. T. Dijkstra, L. R. Huiszoon and A. N. Schellekens, Nucl. Phys. B **710** (2005) 3 [arXiv:hep-th/0411129];
T. P. T. Dijkstra, L. R. Huiszoon and A. N. Schellekens, Phys. Lett. B **609** (2005) 408 [arXiv:hep-th/0403196].

[70] R. Blumenhagen and T. Weigand, Phys. Lett. B **591** (2004) 161 [arXiv:hep-th/0403299].

[71] L. E. Ibáñez, J. Mas, H. P. Nilles and F. Quevedo, Nucl. Phys. B **301** (1988) 157.

[72] D. Gepner, Phys. Lett. B **199** (1987) 380;

[73] D. Gepner, Nucl. Phys. B **322** (1989) 65.

[74] E. J. Martinec, Phys. Lett. B **217** (1989) 431.

[75] B. R. Greene, C. Vafa and N. P. Warner, Nucl. Phys. B **324** (1989) 371.

[76] C. A. Lütken and G. G. Ross, Phys. Lett. B **213** (1988) 152;
M. Lynker and R. Schimmrigk, Nucl. Phys. B **339** (1990) 121;
J. Fuchs, A. Klemm, C. Scheich and M. G. Schmidt, Phys. Lett. B **232** (1989) 317;
J. Fuchs, A. Klemm, C. Scheich and M. G. Schmidt, Annals Phys. **204** (1990) 1;
E. Buturović, Phys. Lett. B **236** (1990) 277;
D. Bailin, D. C. Dunbar and A. Love, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 1659;
M. Lynker and R. Schimmrigk, Phys. Lett. B **253** (1991) 83.

[77] E. Buturović, Nucl. Phys. B **352** (1991) 163.

[78] A. N. Schellekens, Nucl. Phys. B **366** (1991) 27.

[79] G. Aldazabal, I. Allekotte, A. Font and C. Núñez, Int. J. Mod. Phys. A **7** (1992) 6273 [arXiv:hep-th/9111018].

[80] C. Vafa, Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 1615.

[81] D. Gepner, Phys. Lett. B **222** (1989) 207.

[82] A. Sierra, FTUAM-91-09

[83] Y. Cai and A. He, Phys. Lett. B **252** (1990) 63.

[84] A. N. Schellekens and S. Yankielowicz, Nucl. Phys. B **334** (1990) 67. , A. N. Schellekens and S. Yankielowicz, Int. J. Mod. Phys. A **5**, 2903 (1990).

[85] A. N. Schellekens and N. P. Warner, Phys. Rev. D **34** (1986) 3092;
F. A. Bais and P. G. Bouwknegt, Nucl. Phys. B **279** (1987) 561;
R. C. Arcuri, J. F. Gomes and D. I. Olive, Nucl. Phys. B **285** (1987) 327.

[86] D. Gepner, Commun. Math. Phys. **142** (1991) 433.

[87] M. Atiyah and I. Macdonald, “Introduction to Commutative Algebra", Reading, MA: Addison Wesley 1969;
R. Stanley, “Combinatorics and Commutative Algebra", Boston: Birkhäuser 1983;
N. Bourbaki, “Groups and Lie Algebras", Chap. V.5.III, Paris: Hermann 1968.

[88] Las listas completas de resultados para los modelos de clases laterales $\mathbb{CP}_m$ pueden ser encontrados en: G. Aldazabal, I. Allekotte, E. Andrés and C. Núñez, Technical Report CNEA-CAB-92/033.

[89] A. Font, L. E. Ibáñez, F. Quevedo and A. Sierra, Nucl. Phys. B **337** (1990) 119.

[90] C. Vafa and N. P. Warner, Phys. Lett. B **218** (1989) 51.

[91] W. Lerche, C. Vafa and N. P. Warner, Nucl. Phys. B **324** (1989) 427.

[92] M. Kreuzer, R. Schimmrigk and H. Skarke, Nucl. Phys. B **372** (1992) 61 [arXiv:hep-th/9112047];
M. Kreuzer and H. Skarke, Nucl. Phys. B **405** (1993) 305 [arXiv:hep-th/9211047].

[93] K. A. Intriligator and C. Vafa, Nucl. Phys. B **339** (1990) 95.

[94] A. Font, L. E. Ibáñez and F. Quevedo, Phys. Lett. B **217** (1989) 272.

[95] K. Huitu, D. Nemenschansky and S. Yankielowicz, Phys. Lett. B **246** (1990) 105.

[96] J. H. Schwarz, Int. J. Mod. Phys. A **4** (1989) 2653.

[97] V. G. Kac, "Infinite-dimensional Lie Algebras–An Introduction", Birkhauser, Boston, 1983, 2^{nd} edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[98] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, Commun. Math. Phys. 103 (1986) 105

[99] T. Gannon, arXiv:math.qa/0103044, y artículos allí referenciados.

[100] G. Aldazabal, E. C. Andrés and J. E. Juknevich, JHEP **0405** (2004) 054 [arXiv:hep-th/0403262].

[101] A. Font, L. E. Ibáñez, M. Mondragón, F. Quevedo and G. G. Ross, Phys. Lett. B **227** (1989) 34.

[102] Andrés Tanasijczuk, Tesis de Maestría del Instituto Balseiro, "Modelos de Gepner Heteróticos en 4 y 6 dimensiones", Diciembre de 2003.